PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2025

Nombre: _____

RUT: _____ N lista: _____

Control 02

Duración total: 70 minutos

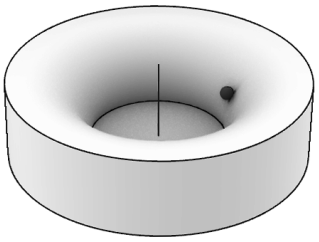
Reglas generales:

1. Escriba su nombre, RUT, y sección, de manera clara y legible.
2. Las mochilas se deben dejar en el área designada para ello.
3. Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
4. No se podrá abandonar la sala hasta el término de la evaluación. Si necesita ir al baño se registrará su salida/entrada.
5. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
6. **No se aceptan preguntas de ningún tipo**. Si cree que hay algún error, déjelo claramente explicado al final de la prueba.
7. Todo acto contrario a la honestidad académica realizado durante el desarrollo de esta evaluación, será sancionado con la suspensión inmediata de la actividad y con la reprobación de ésta. Se considerarán infracciones a la honestidad académica las siguientes:
   - Cometer fraude en la evaluación.
   - Adulterar el acta de asistencia.
   - Adulterar en forma posterior al término de la evaluación la hoja de respuestas.
   - Cualquier acto u omisión que sea calificado como infracción académica.
   - Cualquier acto u omisión que vaya en contra del *código de honor* `http://www.uc.cl/codigodehonor`

Nota El control 01 consideraba 2 formas diferentes. La presente pauta de solución contiene la solución de todos los problemas utilizados.

Problema 1 [3.0 puntos]

Un bowl gira con velocidad angular constante e igual a ω. Una bolita se encuentra al interior del bowl sin caer ni subir por las paredes del mismo. El roce (fricción) entre la bolita y las paredes del bowl giratorio es despreciable. Desprecie el roce con el aire y considere la aceleración de gravedad como una constante igual a g Determine una expresión para la velocidad angular del bowl ω en función de el ángulo α a la que la bolita se mantiene sin caer ni subir. Exprese su solución en términos de las magnitudes conocidas (i.e. g, B, y α).



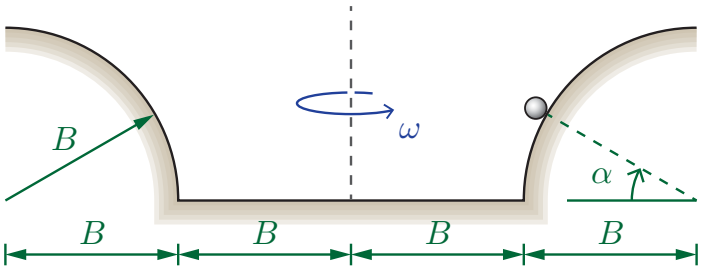


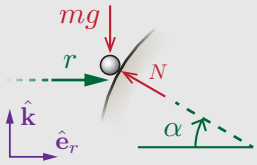
Figura 1: Sección del problema de una bolita en la pared interna de un bowl giratorio sin roce.

Solución

La geometría permite relacionar el radio de la bolita (distancia al eje $\hat{\mathbf{k}}$) con el ángulo α:

$$r(\alpha) = 2B - B\,\cos\alpha = B\,(2 - \cos\alpha)$$

Dibujando un DCL en una vista axisimétrica (ejes $\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\hat{\mathbf{k}}$) se tiene que:



$$\sum_i \mathbf{f}_i = m\,\ddot{\mathbf{u}}$$

$$-mg\,\hat{\mathbf{k}} + N\,\sin\alpha\,\hat{\mathbf{k}} - N\,\cos\alpha\,\hat{\mathbf{e}}_r = m\left(-r\,\omega^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r$$

Notar que no ocurre nada en el eje $\hat{\mathbf{e}}_\theta$: no hay fuerzas en esa dirección, y tampoco hay aceleración en ese eje ya que $\dot{\theta} = \omega = \text{constante}$. Utilizando la ecuación asociada al eje $\hat{\mathbf{k}}$ se tiene que:

$$-mg + N\,\sin\alpha = 0$$

$$N = \frac{mg}{\sin\alpha}$$

Reemplazando N y $r(\alpha)$ en la ecuación asociada a $\hat{\mathbf{e}}_r$ se obtiene:

$$-\left(\frac{mg}{\sin\alpha}\right)(\cos\alpha) = -m\,r\,\omega^2$$

$$\frac{g}{\tan\alpha} = B\,(2 - \cos\alpha)\,\omega^2$$

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{g}{B\,\tan\alpha\,(2-\cos\alpha)}} = \pm\sqrt{\frac{g}{B\,(2\,\tan\alpha - \sin\alpha)}}$$

Notar que el bowl (y la bolita) podría estar girando en el sentido antihorario ($+\omega$), u horario ($-\omega$) si es visto desde arriba (vista en planta).

Problema 2 [3.0 puntos]

Una bolita de masa m gira con velocidad angular ω constante en torno a un poste vertical siguiendo una trayectoria circular. La longitud de cable que la sujeta es L y la tensión en el cable es conocida e igual a T. Se pide determinar:

a) El ángulo α que el cable forma con el poste vertical.

b) La velocidad angular ω de la bolita.

Desprecie el roce con el aire y considere la aceleración de gravedad como una constante igual a g.

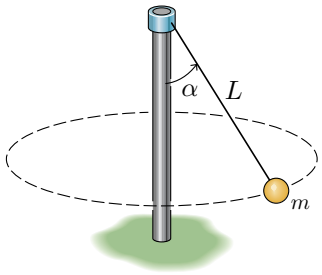


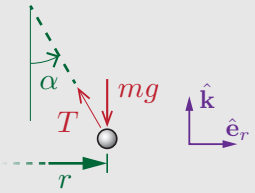
Figura 2: Bolita de masa m que gira en torno a un poste.

Solución

La geometría del problema permite relacionar el radio con que la bolita gira (distancia al eje $\hat{\mathbf{k}}$) con el ángulo que el cable forma con el poste α:

$$r(\alpha) = L \sin\alpha$$

Dibujando un DCL en una vista axisimétrica (ejes $\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\hat{\mathbf{k}}$) se tiene que:



$$\sum_i \mathbf{f}_i = m\,\ddot{\mathbf{u}}$$

$$-mg\,\hat{\mathbf{k}} + T\cos\alpha\,\hat{\mathbf{k}} - T\sin\alpha\,\hat{\mathbf{e}}_r = m\left(-r\,\omega^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r$$

Notar que no ocurre nada en el eje $\hat{\mathbf{e}}_\theta$: no hay fuerzas en esa dirección, y tampoco hay aceleración $\dot{\theta} = \omega = \text{constante}$. Utilizando la ecuación asociada al eje $\hat{\mathbf{k}}$ se tiene que:

$$-mg + T\cos\alpha = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{mg}{T}$$

, donde es posible obtener una expresión para α:

$$\alpha = \operatorname{acos}\left(\frac{mg}{T}\right)$$

Reemplazando $r(\alpha)$ y $\cos\alpha$ en la ecuación asociada a $\hat{\mathbf{e}}_r$ se obtiene:

$$-\left(\frac{mg}{\cos\alpha}\right)(\sin\alpha) = -m\,(L\sin\alpha)\,\omega^2$$

$$\frac{g}{L\cos\alpha} = \omega^2$$

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{g}{L\cos\alpha}} = \pm\sqrt{\frac{T}{m\,L}}$$

Notar que el la bolita podría estar girando en el sentido antihorario ($+\omega$), u horario ($-\omega$).

Problema 3 [2.0 puntos]

Una casa de peso W está suspendida desde una argolla a la que se amarran dos cuerdas adicionales, las cuales se están jalando con fuerza T_a y T_b, respectivamente. La caja está suspendida y no se mueve (tampoco lo hace la argolla). La masa de la argolla es despreciable. Se pide determinar las fuerzas T_a y T_b, en términos de W.

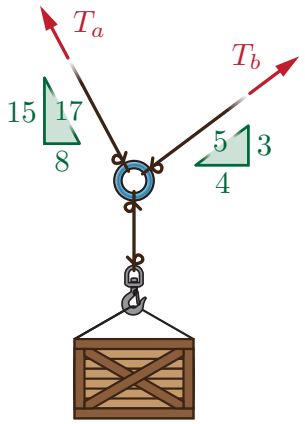


Figura 3: Caja suspendida por dos cuerdas en estado de reposo.

Solución

Con un sencillo DCL sobre la argolla, y sabiendo que $m_{\text{argolla}} \simeq 0$ y que $\ddot{u}_{\text{argolla}} = 0$, se tiene que:

$$T_a \begin{Bmatrix} -8/17 \\ 15/17 \end{Bmatrix} + T_b \begin{Bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{Bmatrix} + W \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = \mathbf{0}$$

La solución del sistema resulta en:

$$T_a = \frac{17}{21} W \qquad\qquad T_b = \frac{10}{21} W$$

Ambas magnitudes son positivas (i.e., producen tracción en las cuerdas) lo que tiene sentido físico en nuestro caso.

Problema 4 [2.0 puntos]

Dos tractores están jalando de un tocón de árbol (raices). Los tractores, pese a jalar, no se mueven y tampoco lo hace el tocón. En dicho instante, un dinamómetro que se encuentra en la cuerda que jala al tocón indica que la tensión en dicha cuerda es igual a T_a. La masa de la argolla es despreciable. Determine las fuerzas P_1 y P_2 que están ejerciendo los tractores en ese instante (en términos de T_a).

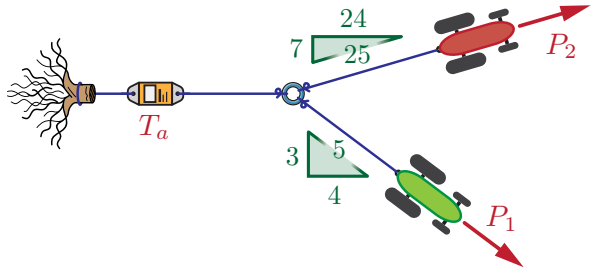


Figura 4: Tocón de árbol jalado por dos tractores.

Solución

Con un sencillo DCL sobre la argolla, y sabiendo que $m_{\text{argolla}} \simeq 0$ y que $\ddot{u}_{\text{argolla}} = 0$, se tiene que:

$$P_1 \begin{Bmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{Bmatrix} + P_2 \begin{Bmatrix} 24/25 \\ 7/25 \end{Bmatrix} + T_a \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathbf{0}$$

La solución del sistema resulta en:

$$P_1 = \frac{7}{20}\, T_a \qquad\qquad P_2 = \frac{3}{4}\, T_a$$

Ambas magnitudes son positivas (i.e., producen tracción en las cuerdas) lo que tiene sentido físico en nuestro caso.

Problema 5 [1.0 puntos]

La aceleración de un punto es $a(t) = 60\,t - 36\,t^2$ [m/s²]. Cuando $t = 0$, se tiene que $u = 0$ y $v = 20$ m/s. Determine la velocidad y la posición de la partícula en función del tiempo.

Solución

Resolviendo la EDO por separación de variables se tiene que:

$$v(t) = 30\,t^2 - 12\,t^3 + C_1$$
$$u(t) = 10\,t^3 - 3\,t^4 + C_1\,t + C_2$$

Luego, utilizando las condiciones de borde (iniciales) se obtiene que:

$$C_1 = 20 \text{ m/s} \qquad\qquad C_2 = 0$$

Finalmente, las expresiones para la velocidad y posición de la partícula son:

$$v(t) = 30\,t^2 - 12\,t^3 + 20 \quad [\text{m/s}]$$
$$u(t) = 10\,t^3 - 3\,t^4 + 20\,t \quad [\text{m}]$$