PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Física & Escuela de Ingeniería
FIS1514 / ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2019

Interrogación 02

Duración total: 135 minutos

Reglas generales:

1. Escriba su nombre, RUT, y sección, de manera clara y legible.
2. Las mochilas se deben dejar en el área designada para ello.
3. Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
4. No se podrá abandonar la sala hasta el término de la evaluación. Si necesita ir al baño se registrará su salida/entrada.
5. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
6. **No se aceptan preguntas de ningún tipo**. Si cree que hay algún error, déjelo claramente explicado al final de la prueba.
7. Todo acto contrario a la honestidad académica realizado durante el desarrollo de esta evaluación, será sancionado con la suspensión inmediata de la actividad y con la reprobación de éste. Se considerarán infracciones a la honestidad académica las siguientes:

   Cometer fraude en la evaluación

   Adulterar el acta de asistencia

   Adulterar en forma posterior al término de la evaluación la hoja de respuestas

   Cualquier acto u omisión que sea calificado como infracción académica

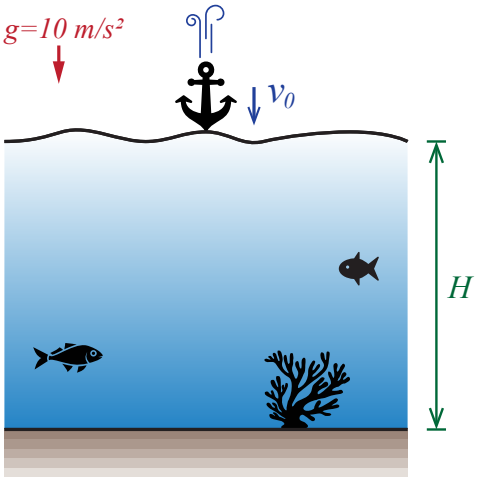
   Cualquier acto u omisión que vaya en contra del *código de honor* `http://www.uc.cl/codigodehonor`

Reglas preguntas de selección múltiple:

1. Debe **seleccionar una sola respuesta** en las preguntas de selección múltiple. Para ello debe rellenar completamente el círculo de la respuesta seleccionada (de lo contrario su respuesta se considerará inválida). Los cálculos y desarrollo de las preguntas de selección múltiple no se consideran.
2. En las preguntas de selección múltiple: **las respuestas incorrectas descuentan** 1/4 **de punto**.
3. Al finalizar la interrogación, entregue únicamente la hoja de respuestas (no entregue este cuadernillo).

Problema 1 [1 punto]

Se desea que el ancla de un barco caiga desde la superficie del agua hasta el fondo marino a velocidad constante (sin acelerar). Se sabe que el agua ejerce un roce viscoso $f_r = 20\,v^{3/2}$ sobre el ancla. El ancla tiene una masa $m = 54\,kg$, y la aceleración de gravedad es $g = 10\,m/s^2$. Suponga que la tensión superficial del agua y su empuje son despreciables.
¿Con qué rapidez v_0 debe tocar el agua el ancla?



a) $v_0 = 9\,m/s$

b) $v_0 = \frac{1}{2}2^{3/2}\,m/s$

c) $v_0 = 3\,m/s$

d) $v_0 = 6\sqrt{15}\,m/s$

e) $v_0 = 2\sqrt{5}\,m/s$

Solución
Si el cuerpo no acelera, entonces la sumatoria de fuerzas es cero. Eso implica que viaja a su velocidad límite:

$$\begin{aligned} \sum f = -mg + cv^{3/2} &= m\ddot{u} = 0 \\ -mg + cv^{3/2} &= 0 \\ v^{3/2} &= \frac{mg}{c} = \frac{540}{20} = 27 \\ v_{\text{lim}} &= 27^{2/3} = 9\,m/s \\ \rightarrow \quad v_0 &= v_{\text{lim}} = 9\,m/s \end{aligned}$$

Problema 2 [1 punto]

En el sistema de cuerdas y poleas de la figura, se sabe que la masa m_1 desciende con aceleración $\ddot{z}_1 = \frac{5}{6}\, g$ (notar que el eje z_1 positivo apunta hacia abajo).
¿Con qué aceleración se mueve la caja de madera m_2?

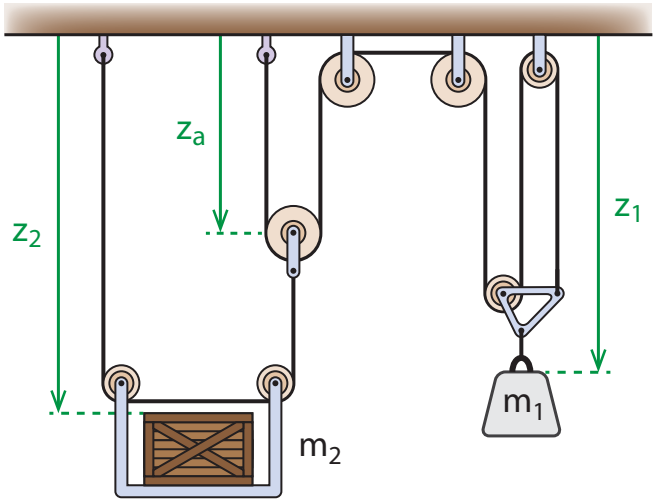
a) $\ddot{z}_2 = \dfrac{-5}{8} g$

b) $\ddot{z}_2 = \dfrac{-10}{9} g$

c) $\ddot{z}_2 = \dfrac{-5}{4} g$

d) $\ddot{z}_2 = \dfrac{-5}{6} g$

e) $\ddot{z}_2 = \dfrac{-5}{3} g$



Solución
Las longitudes de las cuerdas izquierda y derecha en términos de las variables son:

$$L_{\text{izq}} = z_2 + (z_2 - z_a) + \text{cte}$$
$$L_{\text{der}} = 2\, z_a + 3\, z_1 + \text{cte}$$

Derivando dos veces y despejando $\ddot{z}_a$ en ambas se obtiene:

$$\ddot{z}_a = 2\, \ddot{z}_2 \qquad \text{y} \qquad \ddot{z}_a = -\frac{3}{2} \ddot{z}_1$$

Igualando y despejando $\ddot{z}_2$:

$$\ddot{z}_2 = -\frac{3}{4} \ddot{z}_1 \qquad \rightarrow \qquad \ddot{z}_2 = -\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{6} g\right) = \frac{-5}{8} g$$

Problema 3 [1 punto]

Un bloque de masa m viaja con rapidez constante v_0 hacia una zona con pasto de longitud d. El coeficiente de roce dinámico con el pasto varía según la posición en la forma $\mu(x) = k\,x$, donde $x = 0$ indica el inicio del pasto. Determine la longitud que debe tener el jardín d para que el bloque salga de él con rapidez $v_0/2$.

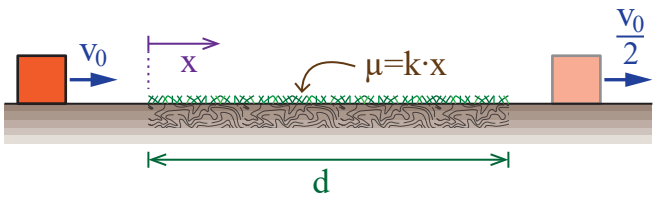
a) $d = \sqrt{\dfrac{3}{4gk}}\,v_0$

b) $d = \sqrt{\dfrac{6}{4gk}}\,v_0$

c) $d = \dfrac{3m}{8k}v_0^2$

d) $d = \sqrt[3]{\dfrac{9\,v_0^2}{8gk}}$

e) $d = \sqrt[3]{\dfrac{3\,v_0^2}{8gk}}$



Solución

La fuerza de roce es:

$$f_r(x) = \mu \cdot N = (kx)(mg) = kmgx$$

El trabajo hecho por la fuerza de roce (notar que no es una fuerza constante) es:

$$U_{12}^{\star} = \int_{t_1}^{t_2} (-f_r \cdot \dot{u})\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \left(-f_r \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t = \int_{u_1}^{u_2} (-f_r)\,\mathrm{d}u$$

$$U_{12}^{\star} = \int_0^d (-kmgx)\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{2}kmgd^2$$

Usando el principio de conservación de energía:

$$T_1 + U_{12}^{\star} = T_2$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}kmgd^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2$$

$$\rightarrow \qquad d^2 = \frac{3v_0^2}{4gk}$$

Finalmente, el jardín debe tener una longitud: $d = \sqrt{\dfrac{3}{4gk}}\,v_0$.

Problema 4 [1 punto]

Un nuevo juego de un parque de diversiones, consiste en una cabina de masa m que se eleva a una altura h por sobre el nivel indicado en la figura, y cae libremente desde el reposo hasta que se topa con un resorte de largo natural l_0 y constante elástica k, el cual debe amortiguar la caída. Determine la máxima compresión del resorte.

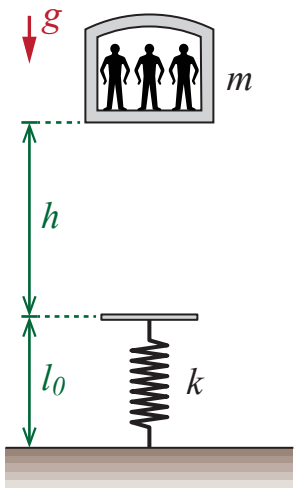
a) $\delta_{\max} = \left(\frac{mg}{k}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{2kh}{mg}}\right)$

b) $\delta_{\max} = \left(\frac{mg}{k}\right)\left(1-\sqrt{1+\frac{2kh}{mg}}\right)$

c) $\delta_{\max} = \left(\frac{mg}{k}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{2k\,(h-l_0)}{mg}}\right)$

d) $\delta_{\max} = \left(\frac{mg}{k}\right)\left(1-\sqrt{1+\frac{2k\,(h-l_0)}{mg}}\right)$

e) $\delta_{\max} = \sqrt{\frac{2mgh}{k}}$



Solución

Utilizando el principio de conservación de energía:

$$E_i = E_f$$
$$V_g^{(i)} + V_e^{(i)} + T^{(i)} = V_g^{(f)} + V_e^{(f)} + T^{(f)}$$

Reemplazando los valores de energía potencial gravitatoria V_g, energía potencial elástica V_e, y energía cinética T:

$$mg\,(h+l_0) + \frac{1}{2}k\,(0^2) + \frac{1}{2}m\,(0^2) = mg\,(l_0-\delta_{\max}) + \frac{1}{2}k\,(\delta_{\max})^2 + \frac{1}{2}m\,(0^2)$$
$$mgh = -mg\delta_{\max} + \frac{1}{2}k\,(\delta_{\max})^2$$

Lo que entrega dos soluciones para $\delta_{\max}$:

$$0 = \frac{1}{2}k\,(\delta_{\max})^2 - mg\delta_{\max} - mgh$$
$$\rightarrow \qquad \delta_{\max} = \frac{mg \pm \sqrt{(mg)^2 + (2k)\,(mgh)}}{k} = \left(\frac{mg}{k}\right)\left(1 \pm \sqrt{1+\frac{2kh}{mg}}\right)$$

Como nos interesa la *compresión máxima*; entonces la raíz positiva es la solución pedida:

$$\delta_{\max} = \left(\frac{mg}{k}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{2kh}{mg}}\right)$$

Nota: La raíz negativa es la posición de máximo estiramiento del resorte si la cabina permanece adherida al resorte y éste empuja la cabina nuevamente hacia arriba.

Problema 5 [1 punto]

Un objeto en caída libre se dice que ha alcanzado la *velocidad terminal* si la resistencia del aire es lo suficientemente fuerte como para contrarrestar toda la aceleración debida a la gravedad, causando que el objeto caiga a una velocidad constante. El valor exacto de la velocidad terminal varía de acuerdo a la forma del objeto, pero se estima que es $v_{term} = 100$ m/s. Cuando un objeto de 10 kg ha alcanzado su velocidad terminal, ¿cuánta potencia ejerce la resistencia del aire sobre el objeto?

a) $P = -9800\,W$

b) $P = 9800\,W$

c) $P = 0\,W$

d) $P = 98000\,W$

e) $P = -98000\,W$

Solución

La velocidad del objeto es:

$$\mathbf{v}_{\text{term}} = (-100\,m/s)\,\hat{k}$$

Como la velocidad es constante, la aceleración es cero. Es decir, hay equilibrio de fuerzas:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_a + \mathbf{f}_g &= \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_a + (-mg)\,\hat{k} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_a = -\mathbf{f}_g &= (mg)\,\hat{k} = 98\hat{k}\,[N] \end{aligned}$$

La potencia es igual a:

$$\begin{aligned} P &= \mathbf{f}_a \cdot \mathbf{v}_{\text{term}} \\ P &= \left(98\hat{k}\right) \cdot \left(-100\hat{k}\right) = -9800\left(\hat{k} \cdot \hat{k}\right) = -9800\,[W] \end{aligned}$$

Problema 6 [1 punto]

Considere una rampa con roce dinámico constante μ_0, unida a un riel sin roce que describe un *loop* (círculo) de radio R, como muestra la figura. Si la rampa con roce comienza a una altura R, determine la altura h mínima para que una caja de masa m logre dar la vuelta por el loop sin despegarse. Suponga que la masa inicialmente está en reposo.

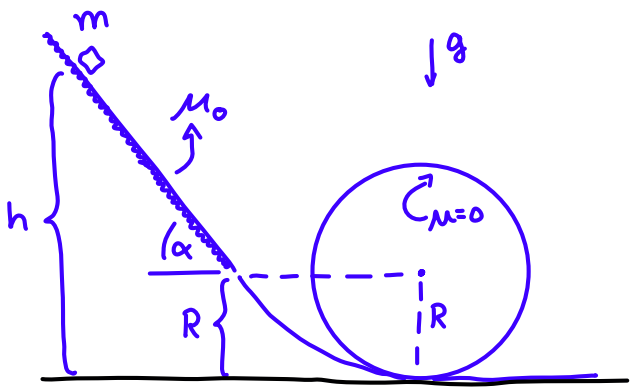
a) $h = \dfrac{R(5\sin\alpha - 2\mu_0\cos\alpha)}{2(\sin\alpha - \mu_0\cos\alpha)}$

b) $h = \dfrac{R(5\sin\alpha - 2\mu_0\cos\alpha)}{2(\sin\alpha - 3\mu_0\cos\alpha)}$

c) $h = \dfrac{R(\sin\alpha - 2\mu_0\cos\alpha)}{2(\sin\alpha - \mu_0\cos\alpha)}$

d) $h = \dfrac{R(5\sin\alpha - 2\mu_0\cos\alpha)}{(\sin\alpha - \mu_0\cos\alpha)}$

e) $h = \dfrac{(5\sin\alpha - 2\mu_0\cos\alpha)}{2R(\sin\alpha - \mu_0\cos\alpha)}$



Solución

Ocupando la ecuación de energía y trabajo no conservativo:

$$\text{Al comienzo de la rampa : } E_i = mgh$$

$$\text{En la cúspide del aro : } E_c = mg(2R) + \frac{mv_T^2}{2}$$

$$\text{Trabajo fuerza de roce : } W_{FR} = E_c - E_i = mg(2R - h) + m\frac{v_T^2}{2}$$

, pero haciendo un DCL, el en caso límite la velocidad en la cúspide el aro debe ser:

$$v_T^2 = gR$$

Mientras que por geometría, si el largo de la rampa con roce es L, entonces:

$$h = L\sin\alpha + R \Rightarrow L = \frac{h - R}{\sin\alpha}$$

, y con ello el trabajo de la fuerza de roce es:

$$W_{FR} = -\mu_0 NL = -\mu_0(mg\cos\alpha)L = -\mu_0(mg\cos\alpha)\frac{h - R}{\sin\alpha}$$

Despejando para h:

$$\Rightarrow h = \frac{R(5\sin\alpha - 2\mu_0\cos\alpha)}{2(\sin\alpha - \mu_0\cos\alpha)}$$

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Física & Escuela de Ingeniería
FIS1514 / ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2019

Nombre: _____

RUT: _____ N lista: _____

Interrogación 02

Duración total: 135 minutos

Reglas generales:

1. Escriba su nombre, RUT, y sección, de manera clara y legible.
2. Las mochilas se deben dejar en el área designada para ello.
3. Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
4. No se podrá abandonar la sala hasta el término de la evaluación. Si necesita ir al baño se registrará su salida/entrada.
5. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
6. **No se aceptan preguntas de ningún tipo**. Si cree que hay algún error, déjelo claramente explicado al final de la prueba.
7. Todo acto contrario a la honestidad académica realizado durante el desarrollo de esta evaluación, será sancionado con la suspensión inmediata de la actividad y con la reprobación de ésta. Se considerarán infracciones a la honestidad académica las siguientes:

   Cometer fraude en la evaluación

   Adulterar el acta de asistencia

   Adulterar en forma posterior al término de la evaluación la hoja de respuestas

   Cualquier acto u omisión que sea calificado como infracción académica

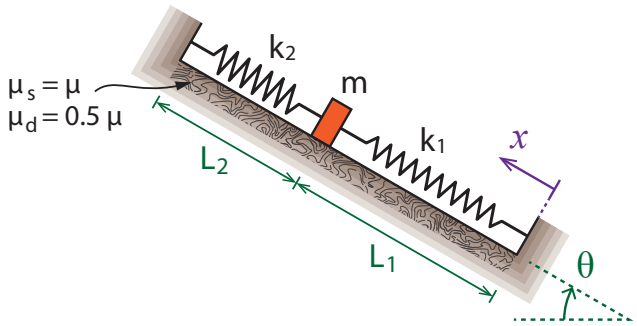
   Cualquier acto u omisión que vaya en contra del *código de honor* `http://www.uc.cl/codigodehonor`

Reglas específicas a las preguntas de desarrollo:

1. Está permitido el uso de lápiz mina en las preguntas de desarrollo, pero pierde el derecho a recorrección.
2. Al finaizar la prueba no es necesario entregar las hojas con los enunciados, a menos que haya escrito parte de la solución ahí

Problema 1 [6 puntos]

Sobre un plano inclinado en un ángulo θ hay un bloque de masa m unido a dos resortes, de constantes de rigidez k_1 y k_2 y largos naturales L_1 y L_2, respectivamente, tal como se muestra en la figura. El largo del plano es justamente $L_1 + L_2$. El plano tiene un coeficiente de roce estático igual a μ y su coeficiente de roce dinámico es $0{,}5\,\mu$.



Se suponen conocidos θ, m, k_1, L_1, k_2, L_2 y μ. Se desprecia el tamaño del bloque. Llamando x a la coordenada que parte desde el vértice inferior del plano y crece en la dirección del plano inclinado, se pide:

I. (2 puntos) Determine el rango de valores de x para que el bloque esté en equilibrio estático.

II. (3 puntos) Si inicialmente el bloque está en la posición con $x = L_1$ y con velocidad inicial $V_o > 0$, también conocida, y denotamos por d al desplazamiento del bloque cuando se detiene por primera vez, calcule el trabajo hecho por la fuerza de cada resorte, por la gravedad y por la fuerza de roce.

III. (1 punto) Use el principio de trabajo y energía para escribir una ecuación para determinar d.

Solución

Parte I

Sea $y = L_1 + L_2 - x$. Para determinar el extremo inferior del intervalo de posiciones de equilibrio se tiene que x es solución de

$$k_1 (x - L_1) + mg \sin\theta + \mu mg \cos\theta = k_2 (y - L_2) = k_2 (L_1 - x) \ ,$$

por tanto

$$x_{\min} = L_1 - \frac{mg}{k_1 + k_2} (\sin\theta + \mu \cos\theta) \ . \qquad (1 \ pto.)$$

Para determinar el extremo superior del intervalo de posiciones de equilibrio se tiene que x es solución de

$$k_1 (x - L_1) + mg \sin\theta = \mu mg \cos\theta + k_2 (y - L_2) = \mu mg \cos\theta + k_2 (L_1 - x) \ ,$$

por tanto

$$x_{\max} = L_1 + \frac{mg}{k_1 + k_2} (-\sin\theta + \mu \cos\theta) \ . \qquad (1 \ pto.)$$

Parte II

Sea d la distancia recorrida, luego el trabajo del peso y la fuerza de roce son

$$T_{\text{peso}} = -mgd \sin\theta \ , \qquad (0{,}75 \ pts.)$$

$$T_{\text{roce}} = -\frac{1}{2} \mu mgd \cos\theta \ , \qquad (0{,}75 \ pts.)$$

, y para los resortes se obtiene

$$T_{\text{res1}} = \int_{L_1}^{L_1+d} -k_1 (x - L_1) \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} k_1 d^2 \qquad (0{,}75 \ pts.)$$

$$T_{\text{res2}} = \int_{L_1}^{L_1+d} -k_2 (x - L_1) \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} k_2 d^2 \ . \qquad (0{,}75 \ pts.)$$

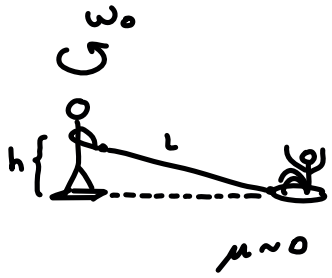
Parte III

Usando el principio de trabajo y energía, se tiene que d es solución de

$$\frac{1}{2} (k_1 + k_2) d^2 + mgd \left(\sin\theta + \frac{1}{2} \mu \cos\theta \right) = \frac{1}{2} m V_o^2 \ . \qquad (1 \ pto.)$$

Problema 2 [6 puntos]

Dos hermanos (de igual masa m) juegan en una superficie con hielo. Uno de ellos se encuentra fijo en un punto por medio de zapatos con clavos, mientras que el segundo se sienta sobre una plataforma de masa despreciable, que puede deslizar sobre el hielo sin roce. El hermano fijo tira del hermano deslizante, mediante una cuerda ideal de largo L desde una altura h, de tal forma que el hermano en la plataforma, describe una circunferencia girando con velocidad angular ω_0 constante.



a) (2 puntos) Calcule la tensión que mantiene la cuerda.

b) (2 puntos) Determine cada normal con que el hielo sostiene a cada hermano.

c) (2 puntos) ¿Qué valor debe alcanzar ω_0 para que el hermano "giratorio" pueda despegar del hielo?

Solución

Parte A

Del DCL del hermano deslizante y considerando un sistema de coordenadas cilíndrico centrado en el hermano fijo (1 *pto.*):

$$\sin\alpha = \frac{h}{L}$$
$$\hat{\rho} : -T\cos\alpha = m(-\rho\,\omega_0^2) = -mL\cos(\alpha)\,\omega_0^2$$
$$\hat{\theta} : 0 = m(0)$$
$$\hat{k} : T\sin\alpha + N - mg = 0$$

Usando la ecuación de $\hat{\rho}$:

$$T = mL\omega_0^2 \qquad (1\ pto.)$$

Parte B

Usando la ecuación asociada a $\hat{k}$:

$$N = mg - T\sin\alpha = m(g - L\omega_0^2\frac{h}{L}) = m(g - h\,\omega_0^2) \qquad (1\ pto.)$$

, mientras que para el hermano fijo; la tensión apunta en sentido opuesto por lo que:

$$N = m(g + h\,\omega_0^2) \qquad (1\ pto.)$$

Parte C

Para poder despegar del piso, la condición límite corresponde a anular la fuerza normal del segundo hermano. Es decir, $N = 0$ (1 *pto.*), con esto:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{h}} \qquad (1\ pto.)$$