PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2020

Control 01

Cinemática

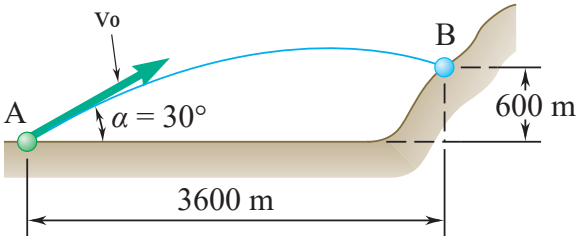
Reglas generales:

1. La prueba consta del desarrollo de los 2 problemas propuestos.
2. Cada alumno debe entregar su pauta de desarollo de los problema subiendo un archivo PDF a Canvas (se recomienda usar CamScanner).
3. La prueba dura un módulo (80 min), incluyendo en este plazo el tiempo necesario para preparar el PDF y y subir el archivo a Canvas.
4. No se hará extension de tiempo.
5. El estudiante puede utilizar apuntes de clase, textos bibliográficos y softwares matemáticos.
6. El trabajo es individual y está absolutamente prohibida la colaboración o la copia.
7. Los cuidadores del control no están autorizados a proporcionar sugerencias o ayuda.

Nota Este semestre se aplicaron 3 controles de desarrollo a cambio de que sólo habrían 2 interrogaciones. Los controles se imparten en horario de clase, imposibilitando la coordinación entre todas las secciones. Se generaron 3 controles de dificultad similar para los 3 horarios posibles: grupos A, B, y C. El equipo docente de ICE1514 ha creado esta pauta que incluye los 3 controles para ayudarle en su estudio.

Grupo A — Problema 1 [3 puntos]

Un cañón para controlar avalanchas dispara su proyectil con ángulo $\alpha = 30°$ sobre la horizontal. El punto deseado de impacto se encuentra a una distancia de 3600 m medidos horizontalmente, y a una altura de 600 m, como muestra la Figura. Determine la rapidez inicial v_0 con que se debe disparar el proyectil.



Posicionando el origen en el punto A (cañón), la ecuación de posición es:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \frac{t^2}{2} + v_0 \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En el instante $t^\star$ el proyectil hará impacto con el punto B:

$$\mathbf{u}(t^\star) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \frac{t^2}{2} + v_0 \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix} t = \begin{Bmatrix} 3600 \\ 600 \end{Bmatrix}$$

Con la primera ecuación (componente $\hat{\mathbf{i}}$) se despeja $t^\star$:

$$v_0 (\cos\alpha)\, t^\star = 3600$$
$$t^\star = \frac{2400\sqrt{3}}{v_0}$$

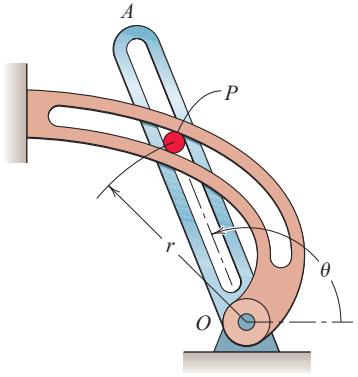
Reemplazando en la segunda ecuación (componente $\hat{\mathbf{j}}$) se puede resolver para v_0:

$$\frac{-g}{2}\left(\frac{2400\sqrt{3}}{v_0}\right)^2 + v_0\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2400\sqrt{3}}{v_0}\right) = 600$$
$$-g\left(\frac{6\cdot 2400}{v_0^2}\right) + \left(2\sqrt{3}\right) = 1$$
$$v_0 = 120\sqrt{\frac{g}{2\sqrt{3}-1}} = 239{,}4\ \mathrm{m/s}$$

Es decir, el proyectil se debe disparar con rapidez inicial de 239,4 m/s.

Grupo A — Problema 2 [3 puntos]

El brazo ranurado OA fuerza a la clavija P a moverse en una guía espiral fija tal que $r = K\theta$. El brazo OA comienza desde el reposo en $\theta = \pi/4$ y tiene una aceleración angular constante $\ddot{\theta} = \alpha$ en sentido contrario al reloj. Determine la magnitud de la aceleración de la clavija P cuando $\theta = 3\pi/4$.



Método 1: La aceleración angular es constante y se tiene que $\dot{\theta}_0 = 0$ y $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$. Con ello se obtiene:

$$\ddot{\theta} = \alpha \qquad \dot{\theta} = \alpha\, t \qquad \theta = \frac{1}{2}\,\alpha\, t^2 + \frac{\pi}{4}$$

Sabemos además que $r = K\,\theta = K\left(\frac{1}{2}\alpha\, t^2 + \frac{\pi}{4}\right)$, y con ello:

$$\ddot{r} = K\,\alpha \qquad \dot{r} = K\,\alpha\, t \qquad r = \frac{K}{2}\,\alpha\, t^2 + K\,\frac{\pi}{4}$$

La clavija se encontrará en la posición pedida $\theta\,(t^\star) = \frac{3\pi}{4}$ cuando $t^\star = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$. Evaluando las expresiones anteriores y reemplazando en la expresión de aceleración, y calculando su magnitud:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \left(K\,\alpha - \frac{3}{4}\pi^2\, K\,\alpha\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(\frac{3}{4}\pi\, K\,\alpha + 2\pi\, K\,\alpha\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta = \left(K\,\alpha - \frac{3}{4}\pi^2\, K\,\alpha\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(\frac{11}{4}\pi\, K\, a\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

$$|\ddot{\mathbf{u}}| = \frac{K\,\alpha}{4}\,\sqrt{9\pi^4 + 97\pi^2 + 16} = 10{,}753\, K\,\alpha$$

Método 2:  Se tiene que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\theta}^2\right) = 2\,\dot{\theta}\,\ddot{\theta} \qquad \longrightarrow \qquad \mathrm{d}\left(\dot{\theta}^2\right) = 2\,\alpha\,\dot{\theta}\,\mathrm{d}t = 2\,\alpha\,\mathrm{d}\theta$$

Integrando definidamente a ambos lados:

$$\dot{\theta}^2 = 2\,\alpha \int_{pi/4}^{3\pi/4} \mathrm{d}\theta = \alpha\,\pi$$

Entonces para $\theta = \frac{3\pi}{4}$, las componentes de la aceleración son:

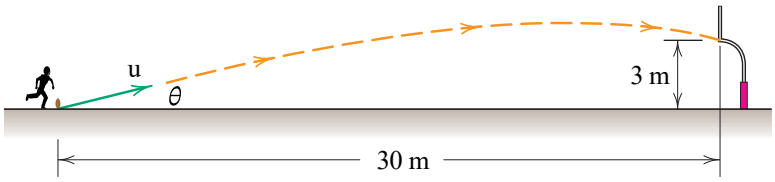
$$a_r = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 = K\,\alpha\left(1 - \frac{3}{4}\,\pi^2\right) \qquad a_\theta = r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta} = \frac{11}{4} K\,\alpha\,\pi$$

Finalmente, la magnitud es:

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \frac{K\,\alpha}{4}\,\sqrt{9\pi^4 + 97\pi^2 + 16} = 10{,}753\, K\,\alpha$$

Grupo B — Problema 1 [3 puntos]

Un futbolista americano intenta marcar un gol a 30 m de la potería. Él es capaz de imprimir una rapidez inicial $v_0 = 30\,\mathrm{m/s}$. Calcular el ángulo mínimo θ para el cual la pelota pasa rozando el travesaño que se encuentra a una altura de 3 m. Considere que $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ en sus cálculos.



Si el origen del sistema se ubica en el pie de pateador, entonces la ecuación de la posición es:

$$\mathbf{u}\,(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \frac{t^2}{2} + 30 \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix} t$$

Queremos que el travesaño ubicado en $u_P = 30\,\hat{\mathbf{i}} + 3\,\hat{\mathbf{j}}$ sea parte de la trayectoria, con lo que:

$$\mathbf{u}\,(t^\star) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -10 \end{Bmatrix} \frac{(t^\star)^2}{2} + 30 \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix} t^\star = \begin{Bmatrix} 30 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

Con la primera ecuación (ecuación en $\hat{\mathbf{i}}$), obtiene el tiempo en que la pelota alcanza la portería:

$$30\,(\cos\theta)\,t^\star = 30 \qquad \longrightarrow \qquad t^\star = \frac{1}{\cos\theta}$$

Reemplazando en la segunda ecuación (ecuación en $\hat{\mathbf{j}}$) se tiene una condición para el ángulo θ:

$$\begin{aligned} \frac{-g}{2}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2 + 30\,\sin\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}\right) &= 3 \\ \frac{-10}{2}\left(1+\tan^2\theta\right) + 30\,\tan\theta &= 3 \\ 5\,\tan^2\theta - 30\,\tan\theta + 8 &= 0 \end{aligned}$$

Lo que es una ecuación cuadrática para $\tan\theta$, y cuyas soluciones son:

$$\tan\theta = \frac{30 \pm \sqrt{900-160}}{10} \qquad \longrightarrow \qquad \tan\theta = \begin{cases} 5{,}7203 \\ 0{,}2797 \end{cases}$$

Es decir, hay dos ángulos que cumplen lo pedido. El menor de ellos es:

$$\theta = \mathrm{atan}\,(0{,}2797) = 15{,}6266\,\mathrm{deg} \quad [0{,}2727\,\mathrm{rad}]$$

Grupo B — Problema 2 [3 puntos]

Una rueda gira en torno a su eje a razón de $100\,\pi$ $^{\text{rad}}/_{\text{s}}$. Un freno lo frena con desaceleración constante en 20 s. Se pide determinar:

a) La aceleración angular $\ddot{\theta} = \alpha$.

b) Determine el instante $t^\star$ tal que la rueda ha girado $\theta\,(t^\star) = 800\,\pi$ desde que se aplica el freno.

c) Si la rueda tiene 0,1 m de radio; determine el vector de aceleración en el instante $t^\star$.

a) La (des) aceleración es:

$$\omega_f = \omega_0 + \alpha\,t \qquad \longrightarrow \qquad \alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{t} = \frac{0 - 100\pi}{20} = -5\pi\ {}^{\text{rad}}/_{\text{s}^2}$$

b) El tiempo necesario para que $\theta\,(t^\star) = 800\,\pi$ es:

$$\theta\,(t^\star) = \theta_0 + \omega_0\,t + \frac{1}{2}\alpha\,(t^\star)^2 = (100\pi)\,(t^\star) + \frac{1}{2}\,(-5\pi)\,(t^\star)^2 = 800\pi$$

$$2{,}5\,(t^\star)^2 - 100\,t^\star + 800 = 0$$

Cuyas soluciones son:

$$t_1^\star = 20 + 4\,\sqrt{5} = 28{,}94\,\text{s} \qquad\qquad t_2^\star = 20 - 4\,\sqrt{5} = 11{,}06\,\text{s}$$

Dadas las condiciones del problema $t_2^\star = 11{,}06\,\text{s}$ es el tiempo correcto.
Nota: El tiempo $t_1^\star$ es aquel que luego de detenerse la rueda, comienza a girar en sentido contrario y vuelve cruzar $\theta\,(t^\star) = 800\,\pi$. No es una solución de interés.

c) La velocidad angular en dicho instante será:

$$\omega\,(t^\star) = \omega_0 + \alpha\,t^\star = 20\,\sqrt{5}\,\pi = 140{,}5\ {}^{\text{rad}}/_{\text{s}}$$

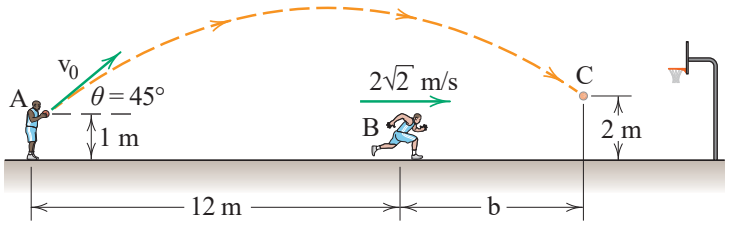
La aceleración en el borde de la rueda es:

$$\mathbf{a} = \left(\underbrace{\ddot{r}}_{0} - r\,\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(r\,\ddot{\theta} + \underbrace{2\,\dot{r}\,\dot{\theta}}_{0}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta = -\,(0{,}1)\left(20\,\sqrt{5}\,\pi\right)^2\hat{\mathbf{e}}_r + (0{,}1)\,(-5\pi)\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

$$\mathbf{a} = -200\,\pi^2\,\hat{\mathbf{e}}_r - 0{,}5\pi\,\hat{\mathbf{e}}_\theta = -1973{,}9\,\hat{\mathbf{e}}_r - 1{,}5708\,\hat{\mathbf{e}}_\theta\ {}^{\text{rad}}/_{\text{s}^2}$$

Grupo C — Problema 1 [3 puntos]

Un jugador de baloncesto se encuentra en la posición A. Él hace un pase con ángulo $\theta = 45°$ sobre la horizontal desde el punto A a 1 m del suelo. Su compañero comienza su carrera a una distancia de 12 m. Éste corre a $2\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$, con la idea de interceptar el balón. Determine la rapidez inicial v_0 con el jugador A debe hacer el lanzamiento para que el compañero B reciba el pase en el punto C a 2 m del suelo.



El origen del sistema coordenado se ubica en A. La ecuación de la posición de la pelota es:

$$\mathbf{u}_A(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \frac{t^2}{2} + v_0 \begin{Bmatrix} \cos 45° \\ \sin 45° \end{Bmatrix} t$$

La ecuación de la posición del receptor es:

$$\mathbf{u}_B(t) = \begin{Bmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

La pelota será interceptada cuando $\mathbf{u}_A(t^\star) = \mathbf{u}_B(t^\star)$:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \frac{(t^\star)^2}{2} + v_0 \begin{Bmatrix} \cos 45° \\ \sin 45° \end{Bmatrix} t^\star = \begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \end{Bmatrix} t^\star + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Con la primera ecuación (ecuación en $\hat{\mathbf{i}}$) se puede despejar el tiempo para la interceptación en función de la velocidad inicial:

$$v_0 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) t^\star = 2\sqrt{2}\, t^\star + 12$$

$$t^\star = \frac{12\sqrt{2}}{v_0 - 4}$$

Reemplazando ese valor en la ecuación en $\hat{\mathbf{j}}$, se obtiene una ecuación cuadrática para v_0:

$$\frac{-g}{2}\left(\frac{12\sqrt{2}}{v_0-4}\right)^2 + v_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{12\sqrt{2}}{v_0-4}\right) + 1 = 2$$

$$-144\,g + 12\,v_0\,(v_0-4) - (v_0-4)^2 = 0$$

$$11\,v_0^2 - 40\,v_0 - 144\,g - 16 = 0$$

Las soluciones de la ecuación son:

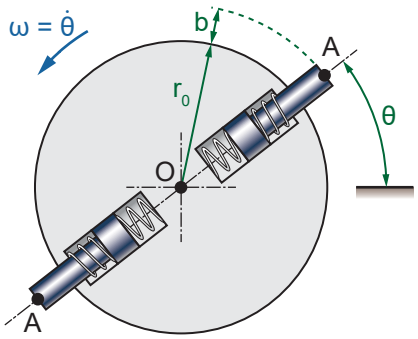
$$(v_0)_1 = \frac{40 + \sqrt{1600 + (44)\,(144\,g + 16)}}{22} = \frac{20 + 12\sqrt{11\,g+4}}{11} = 13{,}3586\,\mathrm{m/s}$$

$$(v_0)_2 = \frac{20 - 12\sqrt{11\,g+4}}{11} = -9{,}7222\,\mathrm{m/s}$$

La única solución con sentido físico en el problema es $v_0 = 13{,}36\,\mathrm{m/s}$.

Grupo C — Problema 2 [3 puntos]

Un disco circular gira alrededor de su centro O con una velocidad angular constante $\omega = \dot{\theta}$. Éste lleva dos pistones cargados con resortes tal como se muestra en la figura. Cada pistón sobresale del borde del disco una distacia b que varía como $b(t) = b_0 \sin(2\pi nt)$, donde b_0 es la máxima longitud que puede sobresalir el pistón, n es la frecuencia de oscilación constante de los pistones y t es el tiempo. Hallar las componentes de la aceleración de los pistones (puntos A) en coordenadas polares en función del tiempo t.



Teniendo en cuenta que $r(t) = r_0 + b(t)$ y derivando la expresión respecto al tiempo se obtienen $\dot{r}(t)$ y $\ddot{r}(t)$:

$$\dot{r}(t) = 2\pi\, n\, b_0 \cos(2\pi nt)$$
$$\ddot{r}(t) = -4\pi^2\, n^2\, b_0 \sin(2\pi nt)$$

Debido a que la velocidad angular es constante, se tiene que $\ddot{\theta} = 0$. La aceleración en el extremo de los pistones (punto A) es $\ddot{\mathbf{u}} = a_r\, \hat{\mathbf{e}}_e + a_\theta\, \hat{\mathbf{e}}_\theta$, cuyas componentes son:

$$a_r(t) = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 = -4\pi^2\, n^2\, b_0 \sin(2\pi nt) - [r_0 + b_0 \sin(2\pi nt)]\,\omega^2$$
$$a_\theta(t) = r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta} = 0 + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta} = 4\pi\, n\, b_0\, \omega \cos(2\pi nt)$$