PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2025

Examen Final

Duración total: 120 minutos

Reglas generales:

1. Escriba su nombre, RUT, y sección, de manera clara y legible.
2. Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
3. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
4. **Sólo se aceptarán preguntas de enunciado**. Si la pregunta no es de enunciado o una aclaración de este, no se le dará respuesta alguna.
5. Debe **seleccionar una sola respuesta** en las preguntas de selección múltiple. Para ello debe rellenar completamente el círculo de la respuesta seleccionada (de lo contrario su respuesta se considerará inválida). Los cálculos y desarrollo de las preguntas de selección múltiple no se consideran.
6. En las preguntas de selección múltiple: **las respuestas incorrectas descuentan** 1/5 **de una respuesta correcta**.
7. Al finalizar la interrogación, entregue únicamente la hoja de respuestas (no entregue este cuadernillo).
8. Todo acto contrario a la honestidad académica realizado durante el desarrollo de esta evaluación, será sancionado con la suspensión inmediata de la actividad y será calificado con la nota mínima. Se considerarán infracciones a la honestidad académica las siguientes:

   Cometer fraude en la evaluación

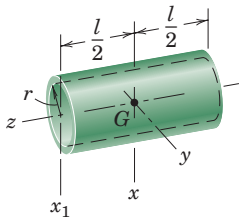
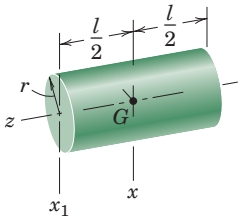
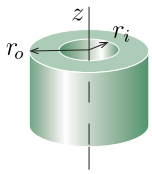
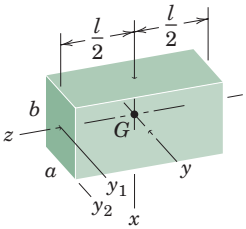
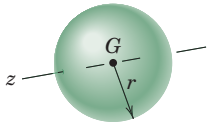
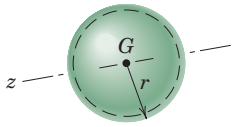
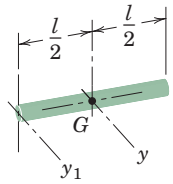
   Adulterar el acta de asistencia

   Adulterar en forma posterior al término de la evaluación la hoja de respuestas

   Cualquier acto u omisión que sea calificado como infracción académica

   Cualquier acto u omisión que vaya en contra del *código de honor* `http://www.uc.cl/codigodehonor`

(m = mass of body shown)

BODY	MASS CENTER	MASS MOMENTS OF INERTIA
 Circular Cylindrical Shell	—	$I_{xx} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = mr^2$
 Circular Cylinder	—	$I_{xx} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$
 Circular Hollow Cylinder	—	$I_{zz} = \frac{1}{2}m\left(r_o^2 + r_i^2\right)$
 Rectangular Parallelepiped	—	$I_{xx} = \frac{1}{12}m(a^2 + l^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{12}m(b^2 + l^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{12}mb^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{y_2y_2} = \frac{1}{3}m(b^2 + l^2)$
 Sphere	—	$I_{zz} = \frac{2}{5}mr^2$
 Spherical Shell	—	$I_{zz} = \frac{2}{3}mr^2$
 Uniform Slender Rod	—	$I_{yy} = \frac{1}{12}ml^2$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{3}ml^2$

Cinemática en coordenadas esféricas

Las ecuaciones de cinemática en coordenadas esféricas utilizando el ángulo de elevación φ_{ele} son:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= r\,\hat{\mathbf{e}}_r \\
\dot{\mathbf{u}} &= \dot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\,\dot{\theta}\,\cos\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + r\,\dot{\varphi}\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi \\
\ddot{\mathbf{u}} &= \left(\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2 - r\,\dot{\theta}^2\,\cos^2\varphi\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \\
&\quad + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\,\cos\varphi + r\,\ddot{\theta}\,\cos\varphi - 2\,r\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}\,\sin\varphi\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta + \\
&\quad + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\varphi} + r\,\ddot{\varphi} + r\,\dot{\theta}^2\,\sin\varphi\,\cos\varphi\right)\hat{\mathbf{e}}_\varphi
\end{aligned}$$

Las ecuaciones de cinemática en coordenadas esféricas utilizando el ángulo polar φ_{pol} son:

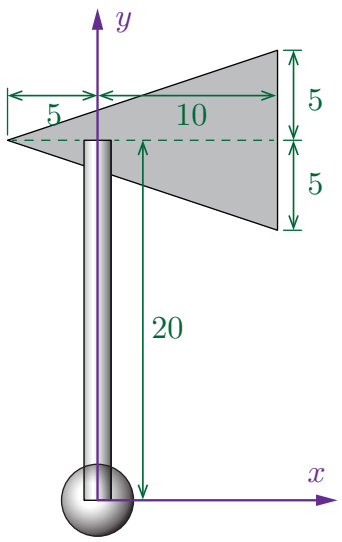
$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= r\,\hat{\mathbf{e}}_r \\
\dot{\mathbf{u}} &= \dot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\,\dot{\theta}\,\sin\varphi\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + r\,\dot{\varphi}\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi \\
\ddot{\mathbf{u}} &= \left(\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2 - r\,\dot{\theta}^2\,\sin^2\varphi\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \\
&\quad + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\,\sin\varphi + r\,\ddot{\theta}\,\sin\varphi + 2\,r\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}\,\cos\varphi\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta + \\
&\quad + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\varphi} + r\,\ddot{\varphi} - r\,\dot{\theta}^2\,\sin\varphi\,\cos\varphi\right)\hat{\mathbf{e}}_\varphi
\end{aligned}$$

Oscilador Amortiguado

La ecuación del movimiento de un oscilador amortiguado tiene tres posibles soluciones:

- **Caso con** $\zeta > 1$:
$$x(t) = A_1\,e^{\lambda_1\,t} + A_2\,e^{\lambda_2\,t}$$
, donde $\lambda_1 = \omega_n\left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$ y $\lambda_2 = \omega_n\left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$.
- **Caso con** $\zeta = 1$:
$$x(t) = (A_1 + A_2\,t)\;e^{-\omega_n t}$$
- **Caso con** $\zeta < 1$:
$$x(t) = e^{-\zeta\,\omega_n\,t}\,[\,A_1\,\cos(\omega_d\,t) + A_2\,\sin(\omega_d\,t)\,]$$
, donde $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$.

Problema 1 [0.5 puntos]



Un hacha *tomahawk* se puede idealizar como 3 piezas de acero:

1. Un mango de longitud 20 cm y masa $m_m = 1\,\text{kg}$.
2. Una esfera de tope en el mango de masa $m_s = {}^1/_3\,\text{kg}$.
3. El filo triangular: placa de espesor uniforme e isósceles con base 10 cm, altura 15 cm, y masa $m_t = 2\,\text{kg}$.

Todas las piezas son de acero de densidad uniforme. El origen del sistema coordenado se ubica en la esfera de tope. Determine la ubicación $\overline{\mathbf{x}}$ del centro de masa del hacha en unidades de centímetros.

a) $\overline{\mathbf{x}} = \{3\,,\,15\}$

b) $\overline{\mathbf{x}} = \{\frac{10}{3}\,,\,\frac{50}{3}\}$

c) $\overline{\mathbf{x}} = \{\frac{3}{2}\,,\,15\}$

d) $\overline{\mathbf{x}} = \{\frac{5}{3}\,,\,\frac{50}{3}\}$

e) $\overline{\mathbf{x}} = \{\frac{5}{2}\,,\,12\}$

Las masas de cada componente se entregan en el enunciado y son:

$$m_m = 1\,\text{kg} \qquad m_s = \frac{1}{3}\,\text{kg} \qquad m_t = 2\,\text{kg}$$

La placa que constituye el filo del hacha es un triángulo de espesor uniforme. Gracias a ello, su centro de masa se encuentra en el promedio de coordenadas de sus vértices. Es decir:

$$\overline{\mathbf{x}}_t = \frac{1}{3}\left[\{-5\,,\,20\} + \{10\,,\,15\} + \{10\,,\,25\}\right] = \{5\,,\,20\}$$

Los centros de masa del mango y esfera se encuentran en sus respectivas mitades o centros. Finalmente, el centro de masa del hacha completa se encuentra en:

$$\overline{\mathbf{x}} = \frac{m_m\,\overline{\mathbf{x}}_m + m_s\,\overline{\mathbf{x}}_s + m_t\,\overline{\mathbf{x}}_t}{m_m + m_s + m_t} = \frac{1\,\{0\,,\,10\} + \frac{1}{3}\,\{0\,,\,0\} + 2\,\{5\,,\,20\}}{\frac{1}{3} + 1 + 2} = \frac{\{10\,,\,50\}}{\frac{1+3+6}{3}} = \{3\,,\,15\}$$

Problema 2 [0.5 puntos]

Una esfera sólida de masa M y radio R rueda sin deslizar por un plano horizontal con rapidez inicial v_1 y se aproxima a una pendiente de 30°. La esfera es capaz de subir por la pendiente (sin deslizar) una altura total h antes de detenerse (para luego comenzar a rodar hacia abajo). Desprecie los efectos de roce (seco y viscoso). Determine la rapidez v_m que tendrá la esfera cuando haya subido la mitad de la altura final, i.e., cuando haya subido $h/2$.

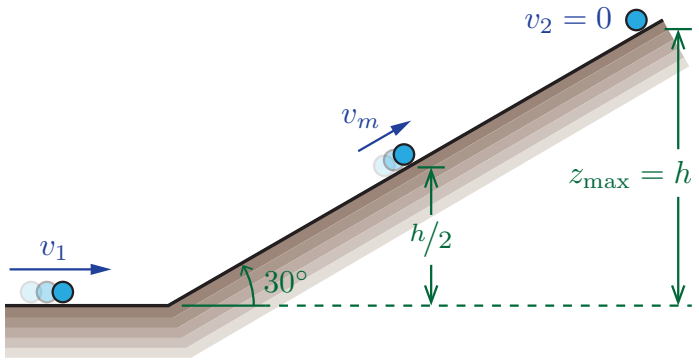
a) $v_m = \sqrt{\dfrac{5\,g\,h}{7}}$

b) $v_m = \sqrt{\dfrac{10\,g\,h}{7}}$

c) $v_m = \sqrt{\dfrac{2\,g\,h}{5}}$

d) $v_m = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{10\,g\,h}{7}}$

e) $v_m = \sqrt{\dfrac{5\,g\,h}{2}}$



La inercia de la esfera es:

$$I = \frac{2}{5}\,M R^2$$

La energía total que tiene la esfera al inicio de su carrera le permite alcanzar una altura h al término de experimento (instante 2). Es decir:

$$T_2 = 0 \qquad V_{g2} = M\,g\,h$$
$$T_f = \frac{1}{2}\,M\,v^2 + \frac{1}{2}\,I\,\omega^2 \qquad V_{gf} = \frac{M\,g\,h}{2}$$

La condición de rodadura establece que $\omega\,R = -v$, y con ello:

$$\begin{aligned} T_2 + V_{g2} &= T_f + V_{gf} \\ 0 + M\,g\,h &= \frac{1}{2}\,M\,v_m^2 + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{5}\,M R^2\right)\left(-\frac{v_m}{R}\right)^2 + \frac{M\,g\,h}{2} \\ \frac{M\,g\,h}{2} &= \frac{7}{10}\,M\,v_m^2 \\ v_m &= \pm\sqrt{\frac{5\,g\,h}{7}} \end{aligned}$$

, donde sólo el valor positivo tiene sentido físico en nuestro caso (cuando la esfera va subiendo).

Nota: Se podría haber calculado v_1 primero, obtiendose así:

$$v_1 = \pm\sqrt{\frac{10\,g\,h}{7}}$$

Luego, utilizando trabajo y energía una segunda vez se podría determinar v_m. Esto no es realmente necesario, ya que como muestra la solución, se puede formular trabajo y energía entre las posiciones finales e intermedia de forma directa.

Problema 3 [0.5 puntos]

Un carrete está compuesto por dos cilindros sólidos de radio R y $R/2$, respectivamente. Sobre los mantos del carrete se han enrollado dos cuerdas en direcciones opuestas, como muestra la figura. El carrete puede rotar sobre su eje y comienza desde el reposo $\omega(t=0)=0$. En $t=0$ se aplican fuerzas sobre las cuerdas según:

$$f_{\mathrm{L}}(t) = 10 \ \text{[N]} \qquad\qquad f_{\mathrm{R}}(t) = 2\,t \ \text{[N]}$$

El carrete tiene masa M e inercia I_O sobre su eje de rotación. Determine la velocidad angular del carrete en $t = 7\,\mathrm{s}$.

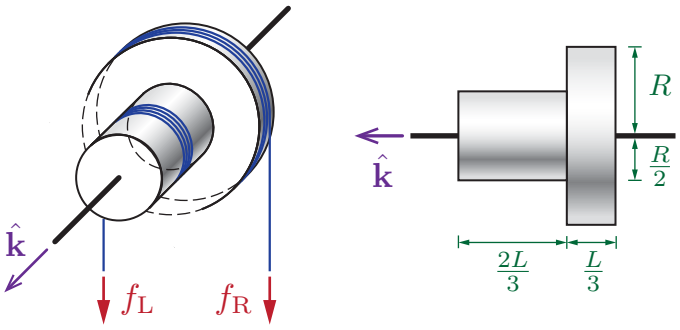
a) $\boldsymbol{\omega}(7) = -\dfrac{14\,R}{I_O}\,\hat{\mathbf{k}}$

b) $\boldsymbol{\omega}(7) = \dfrac{21\,R}{I_O}\,\hat{\mathbf{k}}$

c) $\boldsymbol{\omega}(7) = \dfrac{84\,R}{I_O}\,\hat{\mathbf{k}}$

d) $\boldsymbol{\omega}(7) = -\dfrac{21\,R}{I_O}\,\hat{\mathbf{k}}$

e) El carrete no se mueve.



Las dos fuerzas aplican momentos en direcciones opuestas sobre el carrete. Considerando los signos según el eje $\hat{\mathbf{k}}$ positivo, y los respectivos brazos de momento, se tiene que:

$$\mathbf{m}_{\mathrm{L}} = +f_{\mathrm{L}}\,\frac{R}{2}\,\hat{\mathbf{k}} \qquad\qquad \mathbf{m}_{\mathrm{R}} = -f_{\mathrm{R}}\,R\,\hat{\mathbf{k}}$$

El carrete está inicialmente en reposo; i.e., $\omega_1 = 0$. Utilizando el principio de impulso y momentum angular sobre giros en el eje $\hat{\mathbf{k}}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} I_O\,\omega_1 + \int_{t=0}^{t=7\,\mathrm{s}} \sum m_z \,\mathrm{d}t &= I_O\,\omega_2 \\ 0 + \int_{t=0}^{t=7\,\mathrm{s}} (5\,R - 2\,R\,t)\,\mathrm{d}t &= I_O\,\omega_2 \\ 35\,R - 49\,R &= I_O\,\omega_2 \\ \omega_2 &= -\frac{14\,R}{I_O} \end{aligned}$$

Es decir, en $t = 7\,\mathrm{s}$, el carrete tiene velocidad angular:

$$\boldsymbol{\omega}_2 = -\frac{14\,R}{I_O}\,\hat{\mathbf{k}}$$

Problema 4 [0.5 puntos]

Un carrete está compuesto por dos cilindros sólidos de radio R y $R/2$, como muestra la figura. El carrete puede rotar sobre el eje O–O. El carrete tiene una densidad uniforme y una masa total M. Determine la inercia del carrete I_{OO}.

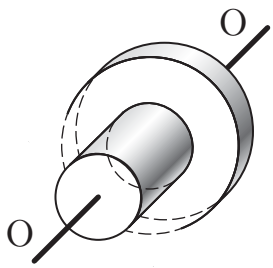
a) $I_{OO} = \dfrac{3}{8} MR^2$

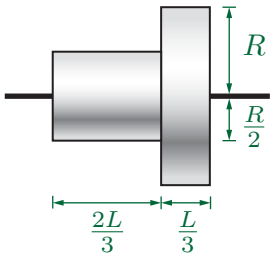
b) $I_{OO} = \dfrac{4}{7} MR^2$

c) $I_{OO} = \dfrac{5}{9} MR^2$

d) $I_{OO} = \dfrac{2}{3} MR^2$

e) $I_{OO} = \dfrac{3}{5} MR^2$





Llamando cilindro **(1)** al cilindro menor de longitud $2L/3$, y cilindro **(2)** al cilindro mayor de longitud $L/3$, se tienen los siguientes volúmenes asociados:

$$V_1 = \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 \left(\frac{2L}{3}\right) = \frac{1}{6}\pi R^2 L \qquad V_2 = \pi R^2 \left(\frac{L}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi R^2 L$$

Luego, las masas de cada uno de los cilindros son:

$$M_1 = \rho V_1 = \frac{1}{6}\pi R^2 L \rho \qquad M_1 = \rho V_2 = \frac{1}{3}\pi R^2 L \rho$$

Las inercias de cada cilindro son, respectivamente:

$$I_1 = \frac{1}{2} M_1 \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{48}\pi R^4 L \rho \qquad I_2 = \frac{1}{2} M_2 R^2 = \frac{1}{6}\pi R^4 L \rho$$

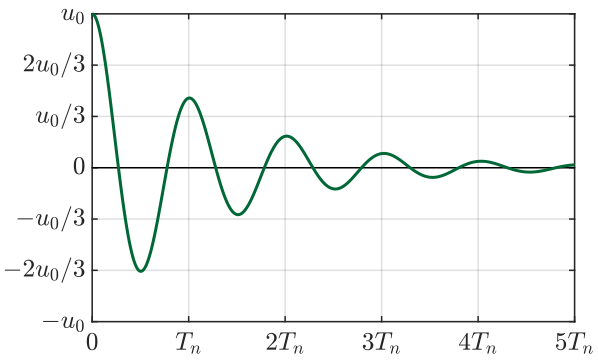
La masa e inercia del carrete completo son:

$$M_T = M_1 + M_2 = \frac{1}{2}\pi R^2 L \rho \qquad I_T = I_1 + I_2 = \frac{3}{16}\pi R^4 L \rho$$

Luego, factorizando el término de la masa total de la inercia, se obtiene:

$$I_T = \left(\frac{1}{2}\pi R^2 L \rho\right)\left(\frac{3}{8} R^2\right) = \frac{3}{8} M_T R^2$$

Problema 5 [0.5 puntos]



La gráfica muestra la posición de un oscilador en el tiempo. Determine cuál (o cuáles) de las siguientes aseveraciones es (o son) correcta(s).

1. El oscilador tiene una razón de amortiguamiento $\zeta > 1$.
2. El periodo de la oscilación (distancia entre dos picos o entre dos valles) es T_n.
3. El oscilador tiene posición inicial u_0 nula.

Son correctas...

a) Ninguna es correcta.

b) Todas son correctas.

c) Sólo 2

d) Sólo 1

e) Sólo 1 y 2

Esta gráfica corresponde a un oscilador sub-amortiguado; i.e., tiene $\zeta < 1$. El oscilador sub-amortiguado oscila con frecuencia circular amortiguada $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$. Es decir, el periodo de las oscilaciones es T_d, donde

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) T_n$$

, que corresponde al periodo amortiguado, y donde resulta evidente que $T_d > T_n$. La gráfica muestra que el oscilador tiene posición inicial distinta a cero. La velocidad inicial v_0 (o bien $\dot{u}_0$) es la condición inicial nula.

Finalmente, se puede concluir que **ninguna de las aseveraciones es correcta**.

Curiosidad: En el caso de esta gráfica específica, el factor de amortiguamiento es $\zeta = 1/8 = 0{,}125$. Esto constituye un amortiguamiento considerable, lo que es evidente al mirar la tasa con que decrece la amplitud de la oscilación. El periodo de oscilación en cambio, es $T_d = (8/\sqrt{63})\, T_n = 1{,}008\, T_n$; diferencia que gráficamente es muy sutil, pero importante. Para comprender la importancia de la diferencia, basta con recordar que a medida que $\zeta \to 1$, el periodo con que realmente ocurre la oscilación T_d tiende a infinito. Es decir, a medida que el amortiguamiento aproxima el crítico, el oscilador cada vez oscila más lento hasta que eventualmente deja de oscilar (caso en que $\zeta = 1$).

Problema 6 [0.5 puntos]

Un cilindro **no homogéneo** de masa m y radio R tiene el centro de masa en su centro geométrico C, y rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal producto de una fuerza horizontal constante F aplicada en el extremo de una cuerda ideal que está enrollada en su perímetro. La aceleración de su centro de masa es $a = {}^{5F}/_{4m}$. Determine su momento de inercia I_C en torno a un eje perpendicular al plano de la figura que pasa por C.

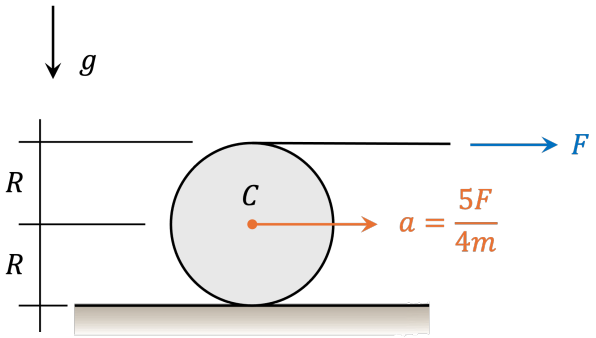
a) $I_C = \dfrac{3}{5}\, m\, R^2$

b) $I_C = \dfrac{8}{5}\, m\, R^2$

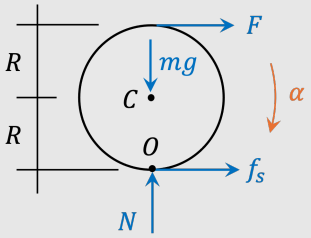
c) $I_C = \dfrac{1}{5}\, m\, R^2$

d) $I_C = \dfrac{4}{5}\, m\, R^2$

e) $I_C = \dfrac{13}{5}\, m\, R^2$



La figura muestra el DCL del cilindro, donde N y f_s son la fuerza normal y de roce estático, y α es la aceleración angular que define el signo positivo de los momentos (en este caso, entrando al plano). La ecuación de movimiento rotacional respecto al punto de contacto O es la siguiente:



$$\sum M_O = I_O\, \alpha$$
$$F\,(2R) = \left(I_C + mR^2\right) \alpha$$

En la ecuación anterior se usó el teorema de Steiner para expresar el momento de inercia I_O en función del momento de inercia respecto al centro de masa I_C. La condición de rodadura permite establecer lo siguiente:

$$\alpha = \frac{a}{R}$$
$$\alpha = \frac{5F}{4mR}$$

Reemplazando en la ecuación de movimiento rotacional:

$$F\,(2R) = \left(I_C + mR^2\right) \frac{5F}{4mR}$$

Simplificando y despejando se obtiene:

$$I_C = \frac{3}{5}\, mR^2$$

Problema 7 [0.5 puntos]

La barra rígida y homogénea de masa m y largo $4L$ que muestra la figura está articulada en el soporte O, y se suelta desde el reposo en su posición horizontal cuando $\theta = 0°$. Despreciando la fricción en la articulación, determine la aceleración angular α de la barra cuando $\theta = 60°$.

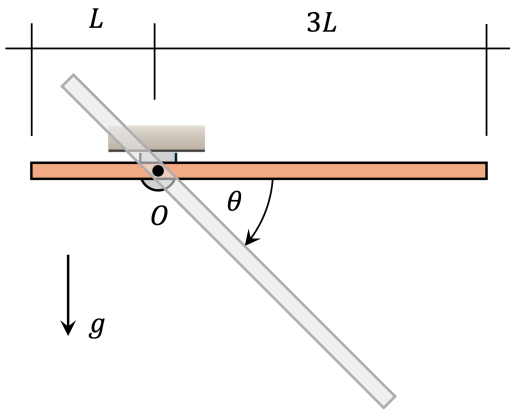
a) $\alpha = \dfrac{3}{14}\dfrac{g}{L}$

b) $\alpha = \dfrac{6}{13}\dfrac{g}{L}$

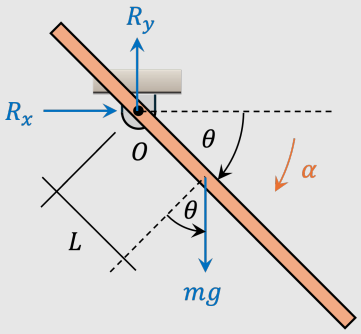
c) $\alpha = 6\dfrac{g}{L}$

d) $\alpha = \dfrac{3\sqrt{3}}{14}\dfrac{g}{L}$

e) $\alpha = \dfrac{6\sqrt{3}}{13}\dfrac{g}{L}$



La figura muestra el DCL de la barra para una posición θ, donde R_x y R_y son las componentes horizontal y vertical de la reacción en la articulación, y α es la aceleración angular que define el signo positivo de los momentos (en este caso, entrando al plano). La ecuación de movimiento rotacional respecto a O es la siguiente:



$$\sum M_O = I_O\,\alpha$$

$$mg\cos\theta\, L = \left[\frac{1}{12}m(4L)^2 + mL^2\right]\alpha$$

En la ecuación anterior se usó el teorema de Steiner para calcular el momento de inercia I_O. Reemplazando $\theta = 60°$ y despejando resulta:

$$\alpha = \frac{3}{14}\frac{g}{L}$$

Problema 8 [0.5 puntos]

La figura muestra un sistema de dos discos homogéneos y concéntricos de radios R y r firmemente pegados entre ellos, que puede rotar en torno a su centro de masa O. El momento de inercia del sistema respecto a un eje perpendicular al plano de la figura que pasa por su centro de masa es $I_O = 4\,mR^2$. Una cuerda ideal está enrollada en el perímetro del disco de radio r, en cuyo extremo cuelga un bloque de masa m. Si la aceleración del bloque es $a = g/10$, determine la razón $s = R/r$ entre los radios de los discos.

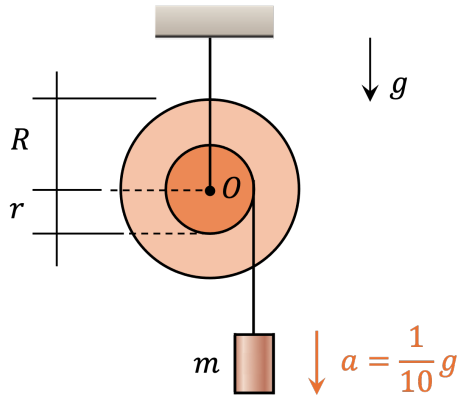
a) $s = \dfrac{3}{2}$

b) $s = \dfrac{9}{4}$

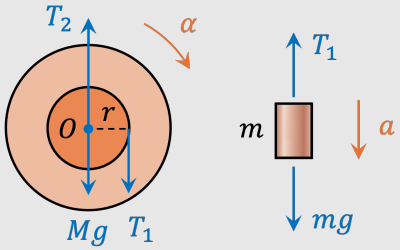
c) $s = \dfrac{9}{2}$

d) $s = \dfrac{4}{3}$

e) $s = \dfrac{4}{9}$



La figura muestra los DCL del sistema de discos y del bloque, donde T_1 y T_2 son las tensiones en las cuerdas, Mg es el peso del sistema de discos, y α es la aceleración angular del sistema de discos que define el signo positivo de los momentos (en este caso, entrando al plano). La ecuación de movimiento rotacional para el sistema de discos en torno a su centro de masa O, y la ecuación de movimiento para el bloque son las siguientes:



$$\sum M_O = I_O\,\alpha \qquad \sum F = m\,a$$

$$T_1\,r = 4mR^2\,\alpha \qquad mg - T_1 = m\,\frac{1}{10}\,g$$

$$T_1 = 4mR^2\,\frac{\alpha}{r} \qquad T_1 = \frac{9}{10}\,mg$$

Como las cuerdas son inextensibles y de masa despreciable (cuerda ideal), la aceleración a del bloque es igual a la componente tangencial de la aceleración de un punto en el perímetro del disco pequeño:

$$a = r\,\alpha$$

$$\frac{1}{10}\,\frac{g}{r} = \alpha$$

Reemplazando el valor de T_1 y la expresión para α en la ecuación de movimiento rotacional del sistema de discos, se obtiene:

$$\frac{9}{10}\,mg = 4mR^2\,\frac{1}{10}\,\frac{g}{r^2}$$

$$\frac{R}{r} = \frac{3}{2}$$

Problema 9 [0.5 puntos]

Un cilindro **no homogéneo** de masa m y radio R tiene el centro de masa en su centro geométrico C. Una cuerda ideal está enrollada en su perímetro, y su extremo está fijo en el punto A. El cilindro desciende **deslizando** sobre el plano inclinado que muestra la figura con una aceleración angular constante $\alpha = g/8R$. La inclinación del plano se indica mediante el triángulo de la figura, y el coeficiente de roce cinético en el contacto es $\mu_k = 1/4$. Determine la tensión T en la cuerda.

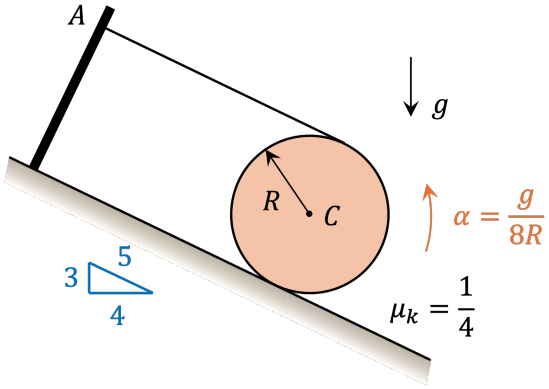
a) $T = \dfrac{11}{40}\, mg$

b) $T = \dfrac{21}{40}\, mg$

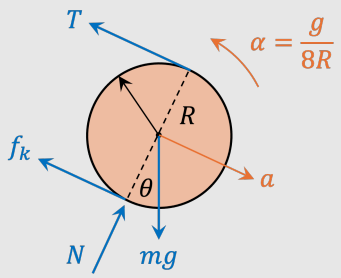
c) $T = \dfrac{19}{40}\, mg$

d) $T = \dfrac{2}{5}\, mg$

e) $T = \dfrac{3}{5}\, mg$



La figura muestra el DCL del cilindro, donde T es la tensión en la cuerda, f_k es la fuerza de roce cinético, N es la fuerza normal, a es la aceleración de su centro de masa, α es su aceleración angular, y θ es el ángulo de inclinación del plano. Se plantea la ecuación de movimiento del centro de masa en la dirección del plano:



$$\sum F = m\,a$$
$$mg\,\sin\theta - T - f_k = m\,a$$
$$mg\,\sin\theta - T - \mu_k\,N = m\,a$$

En la dirección normal al plano la aceleración del centro de masa es nula, lo que permite calcular N. Por otra parte, la aceleración a del centro de masa está relacionada con la aceleración angular α debido a la restricción cinemática que impone la cuerda en reposo. Estas dos condiciones resultan:

$$N = mg\,\cos\theta \qquad\qquad a = R\,\alpha$$
$$a = \frac{1}{8}\,g$$

Reemplazando N, a y $\mu_k = 1/4$ en la ecuación de movimiento del centro de masa, y sabiendo que $\sin\theta = 3/5$ y $\cos\theta = 4/5$ se obtiene:

$$mg\,\frac{3}{5} - T - \frac{1}{4}\,mg\,\frac{4}{5} = m\,\frac{1}{8}g$$
$$T = \frac{11}{40}\,mg$$

Problema 10 [0.5 puntos]

Dos pequeñas esferas idénticas de masa m se sueltan desde el reposo en la posición que muestra la figura superior sobre una superficie circular de radio R con roce despreciable. Luego de chocar en el punto A, ambas alcanzan la misma altura máxima $R/4$, como muestra la figura inferior. Determine el coeficiente de restitución e asociado al choque inelástico. Recuerde que el coeficiente de restitución se define como la razón entre el módulo de la velocidad relativa de alejamiento justo después del choque, y el módulo de la velocidad relativa de acercamiento justo antes del choque.

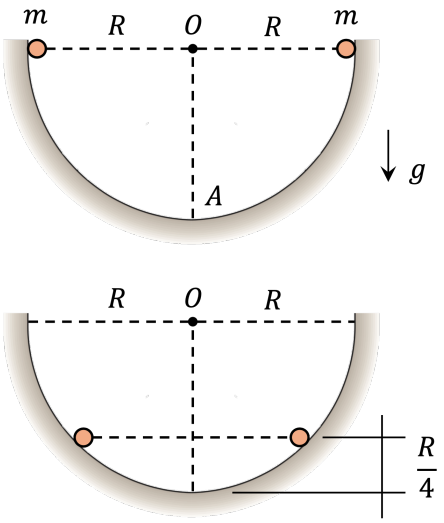
a) $e = \dfrac{1}{2}$

b) $e = \dfrac{1}{4}$

c) $e = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}$

d) $e = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

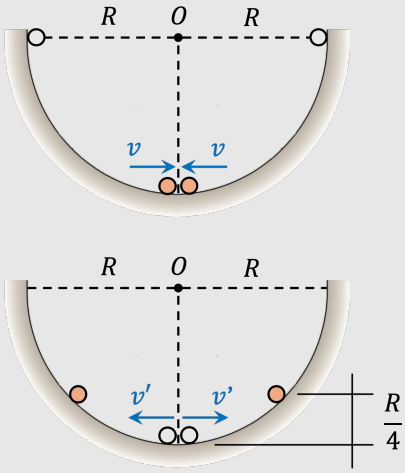
e) $e = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$



El movimiento de ambas partículas es exactamente el mismo debido a la simetría del problema. Luego, se puede asegurar que la rapidez v de ambas partículas justo antes de chocar en A será la misma, así como la rapidez v' justo después de chocar. Tomando el nivel de energía potencial cero en el punto más bajo de la superficie, se establecen las ecuaciones de conservación de energía desde el inicio hasta justo antes de chocar (figura superior), y desde justo después de chocar hasta que ambas partículas alcanzan su altura máxima:

$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \frac{1}{2}m\left(v'\right)^2 = mg\frac{R}{4}$$

$$v = \sqrt{2gR} \qquad v' = \sqrt{\frac{gR}{2}}$$



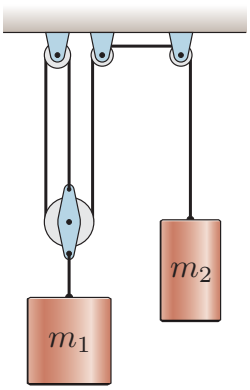
Se plantea la expresión para el coeficiente de restitución:

$$e = \frac{2\,v'}{2\,v}$$

$$e = \frac{\sqrt{gR/2}}{\sqrt{2gR}}$$

$$e = \frac{1}{2}$$

Problema 11 [0.5 puntos]



En el sistema de poleas de la figura, la masa m_1 se mueve solidariamente con la polea triple. Las cuerdas del sistema son inextensibles y de masa despreciable. Considere que todas las poleas tienen masa despreciable y no generan roce.

La tensión en la cuerda que conecta la masa m_2 es:

a) $T = \dfrac{4\,m_1\,m_2\,g}{m_1 + 9\,m_2}$

b) $T = \dfrac{4\,m_1\,m_2\,g}{3\,(m_1 + m_2)}$

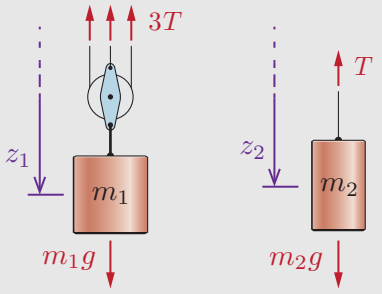
c) $T = \dfrac{4\,m_1\,m_2\,g}{m_1 + 6\,m_2}$

d) $T = \dfrac{m_1\,m_2\,g}{m_1 + m_2}$

e) $T = \dfrac{3\,m_1\,m_2\,g}{m_1 + 6\,m_2}$

Solución

Con los DCL de cada una de las masas, y formulando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton, es posible obtener las siguientes dos ecuaciones:



$$-3\,T + m_1\,g = m_1\,\ddot{z}_1$$
$$-T + m_2\,g = m_2\,\ddot{z}_2$$

La longitud de la cuerda principal se puede escribir según:

$$\ell = 3\,z_1 + z_2 + \text{ctes}$$

Derivando el largo de cuerda dos veces se obtiene la ecuación de ligadura respecto a las aceleraciones de las masas:

$$\ddot{z}_2 = -3\,\ddot{z}_1$$

Reemplazando la ecuación de ligadura en la primera ecuación de cinética, y multiplicando la segunda por 3, se tiene:

$$-T + m_2\,g = -3\,m_2\,\ddot{z}_1$$
$$-9\,T + 3\,m_1\,g = 3\,m_1\,\ddot{z}_1$$

Multiplicando la primera por m_1 y la segunda por m_2:

$$-m_1\,T + m_1\,m_2\,g = -3\,m_1\,m_2\,\ddot{z}_1$$
$$-9\,m_2\,T + 3\,m_1\,m_2\,g = 3\,m_1\,m_2\,\ddot{z}_1$$

Sumando ambas y despejando la tensión T, se obtiene:

$$-m_1\,T - 9\,m_2\,T + 4\,m_1\,m_2\,g = 0$$
$$T = \frac{4\,m_1\,m_2\,g}{m_1 + 9\,m_2}$$

Nota: La tensión T es positiva, lo que es un buen indicador de que no se ha cometido un error.

Problema 12 [0.5 puntos]

La velocidad en el tiempo de una partícula que se mueve sobre el eje x está dada por el gráfico de dos rectas que se muestra en la figura. Si en $t = 0$ la posición de la partícula es $x(0) = -2\,\text{m}$, ¿en qué instante $t = T > 3\,\text{s}$ la partícula se encuentra en el origen?

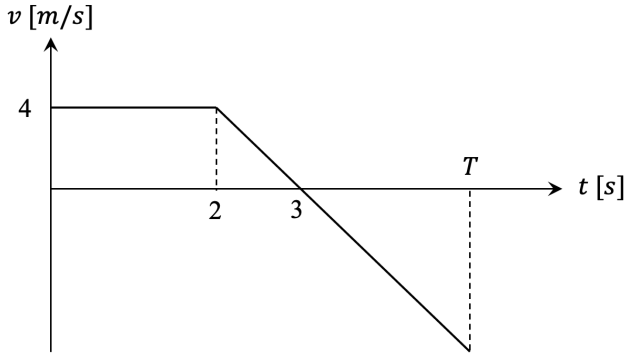
a) $T = 5\,\text{s}$

b) $T = 6\,\text{s}$

c) $T = \left(3 + 1,5\sqrt{2}\right)\,\text{s}$

d) $T = \left(6 + 3\sqrt{2}\right)\,\text{s}$

e) $T = 8\,\text{s}$



Solución

Se tiene la siguiente relación para la velocidad de una partícula en movimiento rectilíneo:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v \tag{1}$$

Integrando la expresión (1) entre $t = 0$ y $t = T$ se obtiene:

$$x(T) - x(0) = \int_0^T v\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

Se sabe que $x(0) = -2\,\text{m}$ y se requiere que $x(T) = 0$. Además, la integral al lado derecho de la ecuación (2) corresponde al área bajo la curva de velocidad en el tiempo de la figura, que puede calcularse fácilmente a partir de áreas de rectángulos y triángulos. Así, la expresión (2) resulta:

$$2 = 8 + 2 - \frac{1}{2}(T-3)\cdot 4(T-3) \tag{3}$$

De la expresión (3) finalmente se obtiene:

$$T = 5\,\text{s}$$