

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2019

Taller 01

Repaso y Cinemática I

Problema 1. 🌶🌶

Un automóvil tiene una aceleración de la forma $a\,(t) = 6\,t + 2$. Determine las expresiones de $v\,(t)$ y $u\,(t)$ para los siguientes casos:

a) Si el auto comienza en $t = 0$ con una velocidad de 3 m/s y a una distancia de 10 m al origen del sistema de referencia.

b) Si el auto inicialmente está en la posición $u(t = 0) = 4\ m$, y luego en $t = 1\ s$ se encuentra en $u\,(t = 1) = 3\ m$.

c) ¿Es posible obtener $v\,(t)$ y $u\,(t)$ si conoce la velocidad en dos instantes de tiempo distintos?

Problema 2. 🌶

La terraza del edificio de innovación se encuentra a una altura H sobre el nivel del suelo. Un alumno lanza una piedra hacia el cielo desde la terraza con rapidez inicial v_0 $[m/s]$. En el instante en que la piedra cae justo por el costado del alumno, y tomando el eje positivo hacia arriba, se pide calcular:

a) El tiempo t_b que tarda la piedra en alcanzar su altura máxima.

b) La altura máxima (medida desde el suelo).

c) El tiempo t_c que tarda la piedra en pasar por el costado del alumno nuevamente.

d) La velocidad v_c de la piedra cuando pasa por el costado del alumno.

e) El tiempo t_d que tarda la piedra en llegar al suelo.

f) La velocidad v_d con que choca el suelo.

Problema 3. 🌶

Dos automóviles separados a una distancia d viajan en trayectoria de colisión (hacia el otro) como muestra la Figura 1. El auto 1 viaja con aceleración constante e igual a $3a$, mientras que el auto 2 lo hace con aceleración a (en sentido contrario). Inicialmente ($t = 0$), el auto 1 tiene una velocidad $v_0 = \sqrt{ad}$, mientras que el auto 2 comienza desde el reposo (i.e. $v_0 = 0$).

Se pide determinar:

a) Las expresiones de velocidad $v_1\,(t)$ y $v_2\,(t)$, y de posición $u_1\,(t)$ y $u_2\,(t)$ para cada auto respecto a un origen común. Tome el sentido $\rightarrow$ como positivo.

b) Determine el intervalo de tiempo Δt que transcurre entre $t = 0$ y la colisión de los autos.

c) Determine la posición de la colisión.

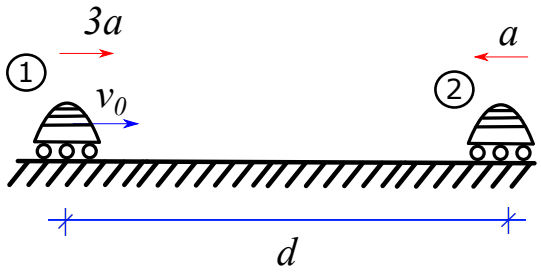


Figura 1: Automóviles en trayectoria de colisión.

d) Determine las velocidades de ambos autos en el instante de la colisión. ¿En qué auto preferiría estar?

Problema 4. 🌶🌶🌶

Un auto *dragster* (video de referencia `https://tinyurl.com/dragsterfrani`) es un auto de *piques de carrera* capaz de acelerar muy rápido. Su aceleración se puede modelar como $a = \frac{k}{v}$. Suponga que inicialmente está en reposo y cuando se le acaba la bencina (deja de acelerar) alcanza una velocidad v_f. Se pide determinar:

a) El intervalo de tiempo Δt en que el dragster aceleró.

b) La distancia recorrida por el dragster cuando deja de acelerar.

c) Si justo después de acelerar se activan los paracaídas del dragster imponiendo una desaceleración de $a = -(1+v)^3$. Determine el tiempo en que se demora en frenar.

Soluciones.

Problema 1.

Solución 1.a
Dada la aceleración $a(t) = 6t+2$, se puede obtener $v(t)$ y $d(t)$ integrando dos veces (usando separación de variables para resolver la EDO):

$$v(t) = 3t^2 + 2t + C_1$$
$$d(t) = t^3 + t^2 + C_1 t + C_2$$

Sabemos que $v_0 = v(0) = 3\ m/s$, y que $d_0 = d(0) = 10\ m$, con lo que podemos determinar las constantes de integración:

$$d(0) = 0^3 + 0^2 + (C_1)(0) + C_2 = 10\ m \quad \rightarrow \quad C_2 = 10\ m$$
$$v(0) = (3)(0^2) + (2)(0^2) + C_1 = 3\ m/s \quad \rightarrow \quad C_1 = 3\ m/s$$

Finalmente, las expresiones de velocidad y posición son:

$$v(t) = 3t^2 + 2t + 3$$
$$d(t) = t^3 + t^2 + 3t + 10$$

Solución 1.b

Sabemos que $d\,(0) = 4\ m$, y que $d\,(1) = 3\ m$, con lo que nuevamente podemos determinar las constantes de integración:

$$d\,(0) = 0^3 + 0^2 + (C_1)\,(0) + C_2 = 4\ m \qquad \rightarrow \qquad C_2 = 4\ m$$
$$d\,(1) = 1^3 + 1^2 + (C_1)\,(1) + C_2 = 3\ m \qquad \rightarrow \qquad C_1 = -3\ m/s$$

Es decir, la velocidad inicial del automóvil era $v_0 = -3\ m/s$. Finalmente, las expresiones de velocidad y posición son:

$$v\,(t) = 3\,t^2 + 2\,t - 3$$
$$d\,(t) = t^3 + t^2 + 3\,t + 4$$

Solución 1.c
El caso en que se conoce la velocidad en 2 instantes es interesante: se puede determinar una expresión para la velocidad, pero no para la posición. Esto ocurre porque no tenemos ningún dato que "amarre" el movimiento a algún lugar. Es decir, el movimiento podría ocurrir en la tierra como en una galaxia lejana. Se podría incluso llegar a una contradicción: la constante de integración obtenida usando la velocidad en ambos instantes podría ser distinta. ¡Imposible!

Problema 2.

Solución 2.a
Dada la aceleración $a\,(t) = -g$, y usando las condiciones iniciales $v\,(0) = v_0$ y $d_0 = H$, se obtiene:

$$v\,(t) = -g\,t + v_0 d\,(t) \qquad\qquad = -\frac{g\,t^2}{2} + v_0\,t + H$$

La piedra llega a su altura máxima en un instante t_b tal que $v\,(t_b) = 0$. Es decir,

$$v\,(t_b) = -g\,t_b + v_0 = 0 \qquad \rightarrow \qquad t_b = \frac{v_0}{g}$$

Solución 2.b
La altura máxima es:

$$d_{\max} = d\,(t_b) = -\frac{g\,t_b^2}{2} + v_0\,t_b + H = -\frac{g\,v_0^2}{2g^2} + v_0\,\frac{v_0}{g} + H$$
$$d_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} + H$$

Solución 2.c
Cuando vuelve a pasar por el costado del alumno se cumple que $d\,(t_c) = H$. Es decir:

$$d\,(t_c) = -\frac{g\,t_c^2}{2} + v_0\,t_c + H = H$$
$$t_c\left(-\frac{g\,t_c}{2} + v_0\right) = 0 \qquad \rightarrow \qquad t_c^I = 0$$
$$t_c^{II} = \frac{2v_0}{g}$$

La solución $t_c^I = 0$ es cierta: la piedra en efecto está en manos del alumno en dicho instante. Pero no es la solución de interés. La piedra pasa por el costado del alumno en $t_c^{II} = \frac{2v_0}{g}$.
Solución 2.d
Cuando la piedra choca el suelo se cumple que $d\,(t_d) = 0$. Es decir:

$$d\,(t_d) = -\frac{g\,t_d^2}{2} + v_0\,t_d + H = 0$$
$$t_d = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gH}}{-g} = \frac{v_0 \mp \sqrt{v_0^2 + 2gH}}{g}$$

Notar que la raíz $\sqrt{v_0^2 + 2gH}$ es siempre mayor que v_0. Es decir, una de las soluciones resulta en un tiempo negativo. Dado el enunciado, esto es imposible ya que el alumno tenía la piedra en sus manos para $t < 0$. Pero no está del todo errado: si el alumno hubiera lanzado la piedra desde el suelo previamente de tal modo que en $t = 0$ estuviera a una altura H con velocidad v_0, el problema continúa con normalidad.
La segunda solución es la buscada:

$$t_d = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gH}}{g}$$

Solución 2.e
La velocidad con que choca el suelo es $v_d = v\left(t_d\right)$:

$$v_d = v\left(t_d\right) = -g\, t_d + v_0 = (-g)\left(\frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gH}}{g}\right) + v_0$$

$$v_d = -\sqrt{v_0^2 + 2gH}$$

Problema 3.

Solución 3.a
Los automóviles aceleran según:

$$a_1\left(t\right) = 3a \qquad \text{y} \qquad a_2\left(t\right) = -a$$

Usando las condiciones iniciales del enunciado; $v_1\left(0\right) = \sqrt{ad}$, $v_2\left(0\right) = 0$, $u_1\left(0\right) = 0$, $u_2\left(0\right) = d$, se obtienen las siguientes ecuaciones de velocidad y posición para ambos automóviles:

$$v_1\left(t\right) = 3at + \sqrt{ad} \qquad \text{y} \qquad v_2\left(t\right) = -at$$

$$u_1\left(t\right) = \frac{3a\, t^2}{2} + \sqrt{ad}\, t \qquad \text{y} \qquad u_2\left(t\right) = -\frac{at^2}{2} + d$$

Solución 3.b
La colisión ocurre en t_c tal que $u_1\left(t_c\right) = u_2\left(t_c\right)$. Es decir:

$$\frac{3a\, t_c^2}{2} + \sqrt{ad}\, t_c = -\frac{at_c^2}{2} + d$$

$$2a\, t_c^2 + \sqrt{ad}\, t_c - d = 0$$

$$t_c = \frac{-\sqrt{ad} \pm \sqrt{ad + 8ad}}{4a} = \frac{-\sqrt{ad} \pm 3\sqrt{ad}}{4a}$$

La solución negativa $t_c^I = -\sqrt{ad}/a$ no tiene sentido en nuestro problema. La solución positiva es efectivamente el instante en que ocurre la colisión:

$$\Delta t = t_c - t_0 = \frac{\sqrt{ad}}{2a} - 0$$

$$\Delta t = \frac{\sqrt{ad}}{2a} = \frac{v_0}{2a}$$

Solución 3.c
Cualquiera de las dos ecuaciones de posición basta para determinar la posición de la colisión. Es decir:

$$u_1\left(t_c\right) = u_2\left(t_c\right) = \left(\frac{3a}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{ad}}{2a}\right)^2 + \sqrt{ad}\left(\frac{\sqrt{ad}}{2a}\right) = \left(\frac{3a}{2}\right)\left(\frac{d}{4a}\right) + \frac{d}{2}$$

$$u_1\left(t_c\right) = \frac{3\, d}{8} + \frac{d}{2} = \frac{7\, d}{8}$$

Solución 3.d
Las velocidades de los automóviles al momento de colisionar son:

$$v_1(t_c) = (3a)\left(\frac{\sqrt{ad}}{2a}\right) + \sqrt{ad} = \frac{5}{2}\sqrt{ad} = \frac{5}{2}v_0$$
$$v_2(t_c) = (-a)\left(\frac{\sqrt{ad}}{2a}\right) = -\frac{\sqrt{ad}}{2} = \frac{-v_0}{2}$$

La 3$^{\text{ra}}$ Ley de Newton indica que las fuerzas de acción y reacción entre cuerpos que interactúan son iguales en magnitud y dirección, pero sentido opuesto. Es decir, desde el punto de vista de la fuerza del impacto: el impacto será el mismo desde cualquier automóvil[1].

Problema 4.

Solución 4.a
El dragster acelera según $a(t) = k/v$. En este caso la solución de la EDO (por separación de variables) debe ser hecha con cuidado:

$$\begin{aligned} a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= \frac{k}{v} \\ (v)(\mathrm{d}v) &= (k)(\mathrm{d}t) \\ \frac{v^2}{2} &= k\,t + C_1 \\ v^2 &= 2k\,t + C_1 \\ v(t) &= \sqrt{2k\,t + C_1} \end{aligned}$$

Como sabemos que inicialmente está en reposo, entonces $v(0) = 0$, y con ello:

$$v(0) = \sqrt{(2k)(0) + C_1} = \sqrt{C_1} = 0 \qquad \rightarrow \qquad C_1 = 0$$

Es decir, la ecuación de velocidad es:

$$v(t) = \sqrt{2k\,t}$$

El dragster alcanza la velocidad v_f en un tiempo t_f:

$$v(t_f) = v_f = \sqrt{2k\,t_f} \qquad \rightarrow \qquad t_f = \frac{v_f^2}{2k}$$

El intervalo de tiempo en que el dragster aceleró es:

$$\Delta t = t_f - t_0 = \frac{v_f^2}{2k} - 0 = \frac{v_f^2}{2k}$$

Solución 4.b
La ecuación de la posición del dragster se obtiene a partir de la velocidad:

$$\begin{aligned} v(t) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \sqrt{2k\,t} = \sqrt{2k}\,\sqrt{t} \\ u(t) &= \sqrt{2k}\,\frac{t^{3/2}}{3/2} + C_2 = \frac{2\sqrt{2k}}{3}t^{3/2} + C_2 \end{aligned}$$

Necesitamos conocer la posición del dragster en algún instante cualquiera para poder determinar la constante de integración C_2. Si bien no sabemos dónde el dragster efectúa su carrera (en la tierra o en

[1] Los automóviles modernos tienen mayor seguridad y protegen al pasajero de mejor manera. El impacto es el mismo, pero el automóvil está diseñado para proteger al ocupante de mejor manera.

otra galaxia); sí podemos determinar su desplazamiento (notar que C_2 desaparece):

$$\Delta u = u_f - u_0 = u\left(t_f\right) - u\left(0\right) - \left[\left(\frac{2\sqrt{2k}}{3}\right)\left(\frac{v_f^2}{2k}\right)^{3/2} + C_2\right] - \left[\left(\frac{2\sqrt{2k}}{3}\right)\left(0\right)^{3/2} + C_2\right]$$

$$\Delta u = \left[\left(\frac{2\sqrt{2k}}{3}\right)\left(\frac{v_f^3}{2k\sqrt{2k}}\right) + C_2\right] - C_2$$

$$\Delta u = \frac{v_f^3}{3k}$$

Solución 4.c
El dragster desacelera según $a\left(t\right) = -\left(1+v\right)^3$. Al igual que en el caso anterior, la solución de la EDO (por separación de variables) debe ser hecha con cuidado:

$$a\left(t\right) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\left(1+v\right)^3$$

$$\frac{1}{\left(1+v\right)^3}\left(\mathrm{d}v\right) = \left(-1\right)\left(\mathrm{d}t\right)$$

$$\frac{-1}{2\left(1+v\right)^2} = -t + C_1$$

Usando la condición inicial $v\left(t_f\right) = v_f$ que viene de compatibilidad con la fase de aceleración, entonces:

$$\frac{-1}{2\left(1+v_f\right)^2} = -t_f + C_1 \qquad \rightarrow \qquad C_1 = t_f - \frac{1}{2\left(1+v_f\right)^2}$$

Es decir, la ecuación de velocidad es:

$$\frac{1}{2\left(1+v\right)^2} = t - t_f + \frac{1}{2\left(1+v_f\right)^2}$$

$$\frac{1}{2\left(1+v\right)^2} = t - \frac{v_f^2}{2k} + \frac{1}{2\left(1+v_f\right)^2}$$

El dragster se detiene cuando $v\left(t_s\right) = 0$. Es decir:

$$\frac{1}{2\left(1+0\right)^2} = t_s - \frac{v_f^2}{2k} + \frac{1}{2\left(1+v_f\right)^2}$$

Despejando para t_s se obtiene:

$$t_s = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{v_f^2}{k} - \frac{1}{\left(1+v_f\right)^2}\right]$$

Notar que t_s está en tiempo absoluto. Es decir, el tiempo en que el dragster estuvo frenando es:

$$\Delta t_{(\text{frenado})} = t_s - t_f = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{\left(1+v_f\right)^2}\right]$$

¡El dragster frena en poco más de medio segundo!