PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2025

Nombre: _____

RUT: _____ N lista: _____

Control 01

Duración total: 70 minutos

Reglas generales:

1. Escriba su nombre, RUT, y sección, de manera clara y legible.
2. Las mochilas se deben dejar en el área designada para ello.
3. Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
4. No se podrá abandonar la sala hasta el término de la evaluación. Si necesita ir al baño se registrará su salida/entrada.
5. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
6. **No se aceptan preguntas de ningún tipo**. Si cree que hay algún error, déjelo claramente explicado al final de la prueba.
7. Todo acto contrario a la honestidad académica realizado durante el desarrollo de esta evaluación, será sancionado con la suspensión inmediata de la actividad y con la reprobación de ésta. Se considerarán infracciones a la honestidad académica las siguientes:
   - Cometer fraude en la evaluación.
   - Adulterar el acta de asistencia.
   - Adulterar en forma posterior al término de la evaluación la hoja de respuestas.
   - Cualquier acto u omisión que sea calificado como infracción académica.
   - Cualquier acto u omisión que vaya en contra del *código de honor* `http://www.uc.cl/codigodehonor`

Nota El control 01 consideraba 2 formas diferentes. La presente pauta de solución contiene la solución de todos los problemas utilizados.

Problema 1 [3.0 puntos]

El automóvil A se encuentra adelantando un par de camiones en la carretera a velocidad constante $\mathbf{v}_{A0}$. El automóvil B se encontraba entre los camiones y se cambia al carril izquierdo a una distancia D del automóvil A, y ambos viajan a velocidades iniciales $\mathbf{v}_{A0}$ y $\mathbf{v}_{B0}$ tal que $\mathbf{v}_{B0} < \mathbf{v}_{A0}$. El automóvil A, que va distraído, no altera su velocidad; mientras que el automóvil B comienza a acelerar de forma constante $\overline{a}_B$. Se pide determinar:

a) La mínima aceleración constante $\overline{a}_B$ para evitar una colisión.

b) En caso de hacer un sutil contacto (sin colisionar), ¿En qué instante de tiempo ocurre? (medido respecto al cambio de carril)

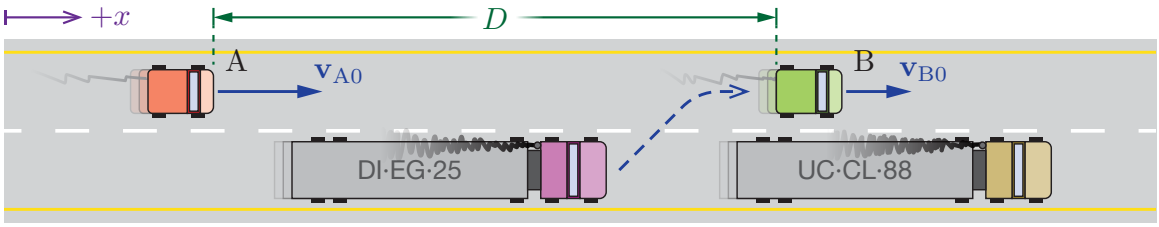


Figura 1: Automóviles en vías de una colisión.

Solución

Se tiene libertad de ubicar el datum (i.e. posición donde $x = 0$) para el problema. En este caso se posicionará en punto donde el automóvil B se encuentra al inicio del problema. Con ello, las ecuaciones de posición y velocidad (en escalares) para ambos automóviles son:

$$u_A(t) = v_{A0}\,t - D \qquad u_B(t) = \frac{1}{2}\,\overline{a}_B\,t^2 + v_{B0}\,t$$
$$v_A(t) = v_{A0} \qquad v_B(t) = \overline{a}_B\,t + v_{B0}$$

En el caso en que los automóviles hacen contacto (pero no colisionan) se cumple que compartirán la posición y tendrán la misma velocidad (rapidez en sentido escalar). Es decir:

$$\begin{cases} u_A(t^\star) = u_B(t^\star) \\ v_A(t^\star) = v_B(t^\star) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} v_{A0}\,t^\star - D = \left(\frac{1}{2}\,\overline{a}_B\right)(t^\star)^2 + v_{B0}\,t^\star \\ v_{A0} = \overline{a}_B\,t^\star + v_{B0} \end{cases}$$

Despejando $t^\star$ de la segunda ecuación se obtiene:

$$t^\star = \frac{v_{A0} - v_{B0}}{\overline{a}_B}$$

Reemplazando este valor en la primera ecuación:

$$\frac{v_{A0}^2 - v_{A0}\,v_{B0}}{\overline{a}_B} - D = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{(v_{A0} - v_{B0})^2}{\overline{a}_B} + \frac{v_{A0}\,v_{B0} - v_{B0}^2}{\overline{a}_B}$$
$$2\,(v_{A0} - v_{B0})^2 - 2\,D\,\overline{a}_B = (v_{A0} - v_{B0})^2$$
$$\overline{a}_B = \frac{(v_{A0} - v_{B0})^2}{2\,D}$$

Es decir, para que no colisionen los automóviles, se debe cumplir que:

$$\overline{a}_B \geq \frac{(v_{A0} - v_{B0})^2}{2\,D} \qquad \text{(positivo: aceleración de B)}$$

, y en caso de hacer contacto (sin colisionar), lo harán en el instante:

$$t^\star = \frac{v_{A0} - v_{B0}}{\overline{a}_B} = \frac{2\,D}{v_{A0} - v_{B0}}$$

Problema 2 [3.0 puntos]

El automóvil A se encuentra adelantando un par de camiones en la carretera a velocidad constante $\mathbf{v}_{\mathrm{A0}}$. El automóvil B se encontraba entre los camiones y se cambia al carril izquierdo a una distancia D del automóvil A, y ambos viajan a velocidades iniciales $\mathbf{v}_{\mathrm{A0}}$ y $\mathbf{v}_{\mathrm{B0}}$ tal que $\mathbf{v}_{\mathrm{B0}} < \mathbf{v}_{\mathrm{A0}}$. El automóvil B, que va distraído, no altera su velocidad; mientras que el automóvil A comienza a desacelerar de forma constante $\overline{a}_{\mathrm{A}}$. Se pide determinar:

a) La mínima desaceleración constante $\overline{a}_{\mathrm{A}}$ para evitar una colisión.

b) En caso de hacer un sutil contacto (sin colisionar), ¿En qué instante de tiempo ocurre? (medido respecto al cambio de carril)

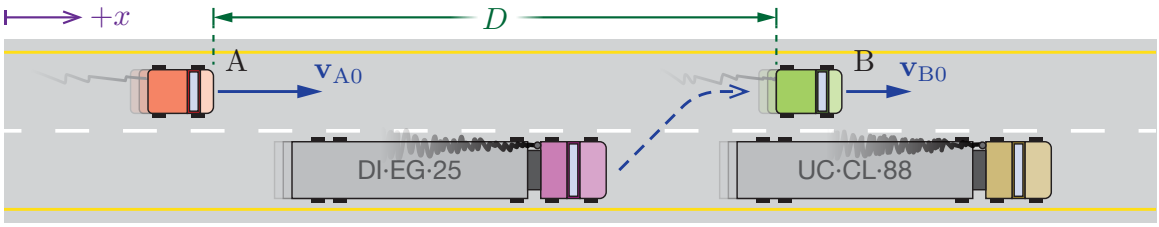


Figura 2: Automóviles en vías de una colisión.

Solución

Se tiene libertad de ubicar el datum (i.e. posición donde $x = 0$) para el problema. En este caso se posicionará en punto donde el automóvil B se encuentra al inicio del problema. Con ello, las ecuaciones de posición y velocidad (en escalares) para ambos automóviles son:

$$u_{\mathrm{A}}(t) = \frac{1}{2}\,\overline{a}_{\mathrm{A}}\,t^2 + v_{\mathrm{A0}}\,t - D \qquad u_{\mathrm{B}}(t) = v_{\mathrm{B0}}\,t$$
$$v_{\mathrm{A}}(t) = \overline{a}_{\mathrm{A}}\,t + v_{\mathrm{A0}} \qquad v_{\mathrm{B}}(t) = v_{\mathrm{B0}}$$

En el caso en que los automóviles hacen contacto (pero no colisionan) se cumple que compartirán la posición y tendrán la misma velocidad (rapidez en sentido escalar). Es decir:

$$\begin{cases} u_{\mathrm{A}}(t^\star) = u_{\mathrm{B}}(t^\star) \\ v_{\mathrm{A}}(t^\star) = v_{\mathrm{B}}(t^\star) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\,\overline{a}_{\mathrm{A}}\right)(t^\star)^2 + v_{\mathrm{A0}}\,t^\star - D = v_{\mathrm{B0}}\,t^\star \\ \overline{a}_{\mathrm{A}}\,t^\star + v_{\mathrm{A0}} = v_{\mathrm{B0}} \end{cases}$$

Despejando $t^\star$ de la segunda ecuación se obtiene:

$$t^\star = -\left(\frac{v_{\mathrm{A0}} - v_{\mathrm{B0}}}{\overline{a}_{\mathrm{A}}}\right)$$

, donde es relevante notar que $t^\star \geq 0$ si $\overline{a}_{\mathrm{A}} < 0$. Reemplazando este valor en la primera ecuación:

$$\left(\frac{1}{2}\right)\frac{(v_{\mathrm{A0}} - v_{\mathrm{B0}})^2}{\overline{a}_{\mathrm{A}}} - \frac{v_{\mathrm{A0}}^2 - v_{\mathrm{A0}}\,v_{\mathrm{B0}}}{\overline{a}_{\mathrm{A}}} - D = -\frac{v_{\mathrm{A0}}\,v_{\mathrm{B0}} - v_{\mathrm{B0}}^2}{\overline{a}_{\mathrm{A}}}$$
$$(v_{\mathrm{A0}} - v_{\mathrm{B0}})^2 - 2\,D\,\overline{a}_{\mathrm{A}} = 2\,(v_{\mathrm{A0}} - v_{\mathrm{B0}})^2$$
$$\overline{a}_{\mathrm{A}} = -\frac{(v_{\mathrm{A0}} - v_{\mathrm{B0}})^2}{2\,D}$$

Es decir, para que no colisionen los automóviles, se debe cumplir que:

$$\overline{a}_{\mathrm{A}} \leq -\frac{(v_{\mathrm{A0}} - v_{\mathrm{B0}})^2}{2\,D} \qquad \text{(negativo: desaceleración o frenado de A)}$$

, y en caso de hacer contacto (sin colisionar), lo harán en el instante:

$$t^\star = -\left(\frac{v_{\mathrm{A0}} - v_{\mathrm{B0}}}{\overline{a}_{\mathrm{A}}}\right) = \frac{2\,D}{v_{\mathrm{A0}} - v_{\mathrm{B0}}}$$

Problema 3 [3.0 puntos]

Un bote está en apuros y necesita un componente crítico para poder atracar en el puerto de forma segura. La solución propuesta considera lanzar el componente desde la cima de un faro costero antes de que el bote alcance la costa. Determine la distancia D a la cual se debe lanzar el componente para que le llegue al bote.

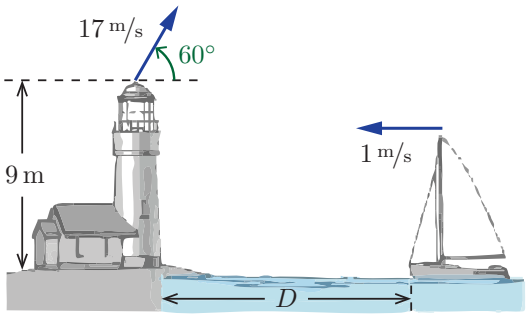


Figura 3: Componente lanzado a bote desde la cima del faro.

Solución

Llamando A al componente y B al bote, sus respectivas ecuaciones de movimiento resultan ser:

$$\mathbf{u}_{\mathrm{A}}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \frac{t^2}{2} + 17 \begin{Bmatrix} \cos 60^\circ \\ \sin 60^\circ \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} 0 \\ 9 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{u}_{\mathrm{B}}(t) = 1 \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} D \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En determinado instante $t^\star$ ambos (el componente y el bote) se deben encontrar en la misma posición. Es decir:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \frac{(t^\star)^2}{2} + 17 \begin{Bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{Bmatrix} t^\star + \begin{Bmatrix} 0 \\ 9 \end{Bmatrix} = 1 \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} t^\star + \begin{Bmatrix} D \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Utilizando la primera ecuación (según el eje $\hat{\mathbf{i}}$ se obtiene que:

$$t^\star = \frac{2\,D}{19}$$

, que reemplazado en la segunda ecuación resulta en:

$$-\frac{2\,g}{19^2}\,D^2 + \frac{17\,sqrt3}{19}\,D + 9 = 0$$

$$D = \frac{-\,(17 \cdot 19)\,(\sqrt{3}) \pm \sqrt{(3 \cdot 17^2 \cdot 19^2) + (72 \cdot 19^2)\,(g)}}{-4\,g}$$

$$D = \frac{19\,\sqrt{3}}{4\,g}\left(17 \mp \sqrt{17^2 + 24\,g}\right)$$

La solución con $D < 0$ no tiene sentido físico en nuestro caso, por lo que la distancia pedida es:

$$D = \frac{19\,\sqrt{3}}{4\,g}\left(17 + \sqrt{17^2 + 24\,g}\right)$$

Curiosidad: Este problema está basado en Young & Freedman, University Physics 14$^{\text{th}}$ ed, Problem 3.52. En la elaboración de la variante para esta evaluación se proponía aproximar $g \simeq 10\ \mathrm{m/s^2}$, lo que resultaba en una respuesta muy simplificada, pero que requería notar que $17^2 + 240 = 23^2$. La idea fue finalmente desechada y se dejó g como una constante.

Problema 4 [3.0 puntos]

Un bote está en apuros y necesita un componente crítico para poder atracar en el puerto de forma segura. La solución propuesta considera lanzar el componente desde la cima de un faro costero antes de que el bote alcance la costa. Determine la distancia D a la cual se debe lanzar el componente para que le llegue al bote.

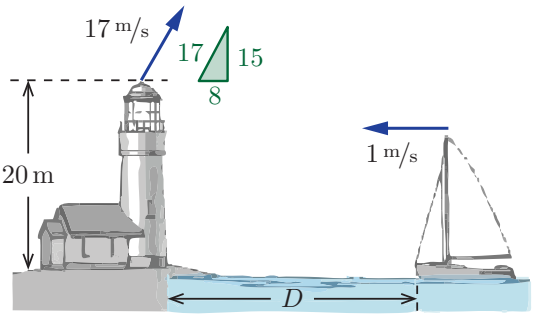


Figura 4: Componente lanzado a bote desde la cima del faro.

Solución

Llamando A al componente y B al bote, sus respectivas ecuaciones de movimiento resultan ser:

$$\mathbf{u}_{\mathrm{A}}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \frac{t^2}{2} + 17 \begin{Bmatrix} 8/17 \\ 15/17 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} 0 \\ 20 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{u}_{\mathrm{B}}(t) = 1 \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} D \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En determinado instante $t^\star$ ambos (el componente y el bote) se deben encontrar en la misma posición. Es decir:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} \frac{(t^\star)^2}{2} + \begin{Bmatrix} 8 \\ 15 \end{Bmatrix} t^\star + \begin{Bmatrix} 0 \\ 20 \end{Bmatrix} = 1 \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} t^\star + \begin{Bmatrix} D \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Utilizando la primera ecuación (según el eje $\hat{\mathbf{i}}$ se obtiene que:

$$t^\star = \frac{D}{9}$$

, que reemplazado en la segunda ecuación resulta en:

$$-\frac{g}{2 \cdot 9^2} D^2 + \frac{5}{3} D + 20 = 0$$

$$D = \frac{-(2 \cdot 5 \cdot 27) \pm \sqrt{(2^2 \cdot 5^2 \cdot 27^2) + (4 \cdot 20 \cdot 2 \cdot 9^2)(g)}}{-2\,g}$$

$$D = \frac{9}{g}\left(15 \mp \sqrt{5^2 \cdot 3^2 + 40\,g}\right)$$

La solución con $D < 0$ no tiene sentido físico en nuestro caso, por lo que la distancia pedida es:

$$D = \frac{9}{g}\left(15 + \sqrt{15^2 + 40\,g}\right)$$

Curiosidad: Este problema está basado en Young & Freedman, University Physics 14$^{\text{th}}$ ed, Problem 3.52. En la elaboración de la variante para esta evaluación se proponía aproximar $g \simeq 10\ \mathrm{m/s^2}$, lo que resultaba en una respuesta muy simplificada, pero que requería notar que $15^2 + 400 = 25^2$. La idea fue finalmente desechada y se dejó g como una constante.