PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2019

Taller 06

Roce viscoso & Potencia

Problema 1.

Un bloque de masa m desliza en la terraza de cerámica (sin roce) con una velocidad v_0. En $x = 0$ el bloque ingresa a un jardín con coeficiente de roce: $\mu(x) = k\sqrt{x}$, como muestra la Figura 1.
Se pide determinar:

a) La fuerza de roce en función de x, i.e. una expresión $f_r(x)$.

b) La distancia de frenado d medida desde el inicio del jardín.

c) La potencia que hace la fuerza de roce en $x = d/2$. ¿Puede interpretar el signo obtenido?

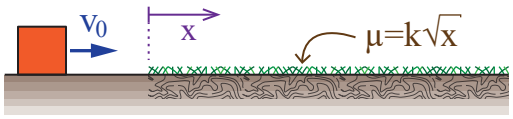


Figura 1: Bloque de masa m que ingresa al jardín con roce dinámico variable

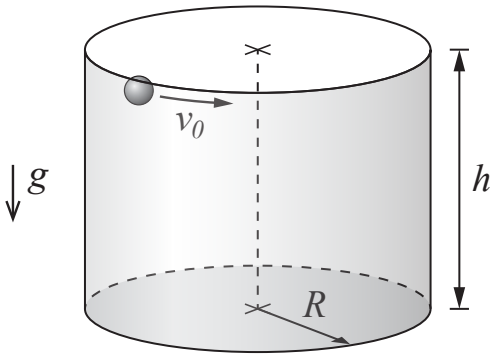


Figura 2: Partícula recorriendo un cilindro lleno con un fluido viscoso.

Problema 2.

Una partícula P de masa $m = 10\ kg$ se lanza de manera tangencial por el interior de un recipiente cilíndrico de radio $R = 40\ m$ y altura $h = 50$, como muestra la Figura 2. El cilindro está lleno con un fluido ligero y viscoso. El roce (fricción seca) de P con la pared cilíndrica es despreciable, pero el roce viscoso es igual a $\vec{f}_r = -0{,}02\,\vec{v}$. La partícula comienza con velocidad tangencial $v_0 = 70\,m/s$.
Se pide determinar:

a) El diagrama de cuerpo libre y las ecuaciones de Newton para todos los ejes.

b) La velocidad vertical $v_z(t)$ y la posición $z(t)$ en función del tiempo.

c) La velocidad angular $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ de P en función del tiempo.

Hint: Recuerde que si $z = z(t)$, entonces $\ddot{z} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{z})$.

Soluciones.

Problema 1.a
Como el bloque no acelera verticalmente, entonces $\ddot{z}$. Usando la 2^a ley de Newton:

$$N - mg = m\ddot{z} = 0 \qquad \rightarrow \qquad N = mg$$

La fuerza de roce es $f_r(x) = -\mu(x)\, N$. Es decir:

$$f_r(x) = -k\sqrt{x}\,(mg) = -(mgk)\sqrt{x}$$

Problema 1.b
Llamaremos A al punto donde se inicia el jardín, y B al punto cuando el bloque se detiene. Con ello, el trabajo hecho por la fuerza de roce es:

$$U^{\star}_{AB} = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{f}_r \cdot \dot{\mathbf{u}})\, \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \left(\mathbf{f} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\right) \mathrm{d}t = \int_{\mathbf{u}(t_1)}^{\mathbf{u}(t_2)} \mathbf{f}_r \cdot \mathrm{d}\mathbf{u}$$

$$U^{\star}_{AB} = -\int_0^d (mgk)\sqrt{x}\, \mathrm{d}x = -\frac{2mgk}{3} x^{3/2}\Big|_{x=0}^{x=d} = -\frac{2mgk}{3} d^{3/2}$$

Usando conservación de energía entre los puntos A y B, pero considerando el trabajo hecho por el roce (fuerza no-conservativa):

$$T_A + (V_g)_A + (V_e)_A + U^{\star}_{AB} = T_B + (V_g)_B + (V_e)_B$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + 0 + 0 - \frac{2mgk}{3} d^{3/2} = 0 + 0 + 0$$

$$d = \left(\frac{3\, v_0^2}{4gk}\right)^{2/3}$$

Problema 1.c
Llamaremos C al punto $x = d/2$. El trabajo hecho por la fuerza de roce entre A y C es:

$$U^{\star}_{AC} = -\int_0^{d/2} (mgk)\sqrt{x}\, \mathrm{d}x = -\frac{2mgk}{3} x^{3/2}\Big|_{x=0}^{x=d/2}$$

$$U^{\star}_{AC} = -\frac{\sqrt{2}mgk}{6} d^{3/2}$$

$$U^{\star}_{AC} = -\frac{\sqrt{2}}{8} m\, v_0^2$$

Usando conservación de energía entre los puntos A y C, pero considerando el trabajo hecho por el roce (fuerza no-conservativa), podemos determinar la velocidad en $x = d/2$:

$$T_A + (V_g)_A + (V_e)_A + U^{\star}_{AC} = T_C + (V_g)_C + (V_e)_C$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + 0 + 0 - \frac{\sqrt{2}}{8} m\, v_0^2 = \frac{1}{2} m v_C^2 + 0 + 0$$

$$v_C^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) v_0^2$$

$$v_C = v_0 \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{4}}$$

La fuerza de roce en $x = d/2$ es:

$$f_r\left(x = {}^{d}/_{2}\right) = -k\sqrt{x}\,(mg) = -k\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{3\,v_0^2}{4gk}\right)^{2/3}}\,(mg)$$

$$f_r\left(x = {}^{d}/_{2}\right) = -\frac{m}{4}\left(3\sqrt{32}\,(gkv_0)^2\right)^{1/3}$$

Finalmente, la potencia es:

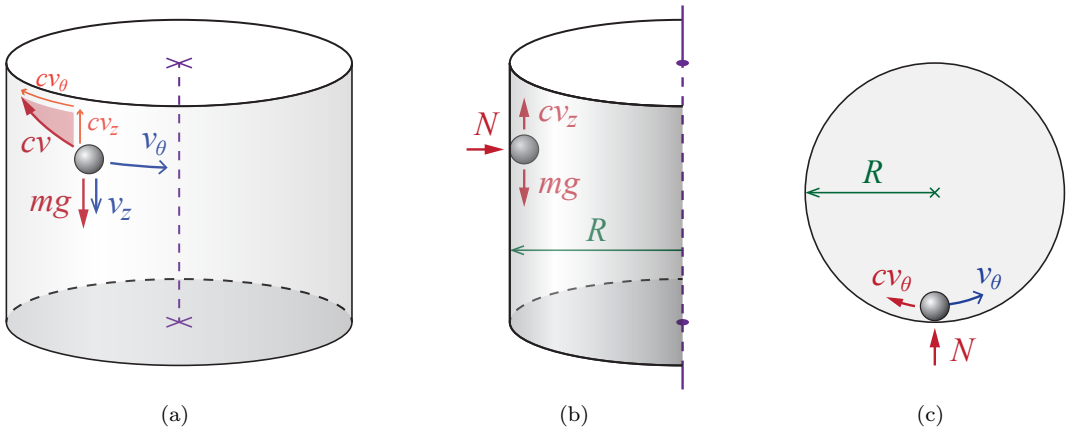
$$P = \mathbf{f}\cdot\mathbf{u} = \left\{f_r\left(x = {}^{d}/_{2}\right)\right\}\,\hat{\mathbf{i}}\cdot\left\{v_C\right\}\,\hat{\mathbf{i}}$$

$$P = -\frac{m}{4}\left(3\sqrt{32}\,(gkv_0)^2\right)^{1/3}\left(v_0\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{4}}\right)$$

La potencia es negativa; lo que tiene sentido ya que la fuerza de roce se opone al movimiento ($\mathbf{f}_r = -f_r\,\hat{\mathbf{v}}$). Es decir, el producto punto entre la fuerza de roce y la velocidad siempre será negativo[1].

Problema 2.a

La fuerza viscosa tiene una componente tangencial y otra en z. Esto se puede ver en el DCL de la Figura 3(a). Para tener mayor claridad de las fuerzas que actúan sobre la partícula, el DCL se divide en dos vistas: una de frente (axisimétrica) y otra en planta en las Figuras 3(b) y 3(c), respectivamente.



(a) (b) (c)

Figura 3: Diagrama de cuerpo libre de la partícula en un cilindro con fluido viscoso: (a) Vista tridimensional con la descomposición de la fuerza viscosa en $\hat{\mathbf{k}}$ y $\hat{\mathbf{e}}_\theta$; (b) Vista frontal del diagrama; y (c) vista en planta del diagrama.

La fuerza de roce viscoso (en su forma vectorial) es:

$$\mathbf{f}_r = f_{c\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + f_{cz}\,\hat{\mathbf{k}} = c\,\mathbf{v} = c\,v_\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + c\,v_z\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$f_{c\theta} = c\,v_\theta \qquad \text{y} \qquad f_{cz} = c\,v_z$$

, donde se puede ver que los roces viscosos en los ejes $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ y $\hat{\mathbf{k}}$ están desacoplados.
La partícula describe un movimiento circular en $\hat{\mathbf{e}}_r$ — $\hat{\mathbf{e}}_\theta$, y usando la 2^a ley de Newton resulta:

$$\sum \mathbf{f} = m\,\mathbf{a}$$

$$(-N)\,\hat{\mathbf{e}}_r + (-c\,v_\theta)\,\hat{\mathbf{e}}_\theta + (-mg - c\,v_z)\,\hat{\mathbf{k}} = m\left(-R\,\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r + m\left(R\,\ddot{\theta}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta + m\ddot{z}\,\hat{\mathbf{k}} \qquad (1)$$

[1]Notar que la raíz $\sqrt{1-\sqrt{2}/4}$ es positiva; y debido a ello el signo de la potencia es finalmente negativo.

Esta expresión que parece ser una única ecuación es en realidad 3 ecuaciones desacopladas (según ejes $\hat{\mathbf{e}}_r$, $\hat{\mathbf{e}}_\theta$, y $\hat{\mathbf{k}}$).

Problema 2.b

La primera ecuación de (1), ecuación en $\hat{\mathbf{e}}_r$, sirve para calcular la fuerza normal de la partícula con el cilindro.

La tercera ecuación de (1) nos permite calcular $\dot{z}$ y z:

$$\begin{aligned} -mg - c\dot{z} &= m\ddot{z} \\ -g - \frac{c}{m}\dot{z} &= \frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t} \\ -\mathrm{d}t &= \left(\frac{1}{g + \frac{c}{m}\dot{z}}\right)\mathrm{d}\dot{z} \\ \left(\frac{m}{c}\right)\log\left(mg + c\dot{z}\right) &= -t + C_1 \\ \dot{z} &= Ae^{-\frac{c}{m}t} - \frac{mg}{c} \end{aligned}$$

, pero sabemos de las condiciones iniciales que $\dot{z}\left(t=0\right) = \dot{z}_0 = 0$, y con ello:

$$\begin{aligned} 0 &= Ae^0 - \frac{mg}{c} \\ A &= \frac{mg}{c} \\ \rightarrow \qquad \dot{z} &= \frac{mg}{c}\left[e^{-\frac{c}{m}t} - 1\right] \end{aligned}$$

Integrando nuevamente la expresión para $\dot{z}\left(t\right)$ se obtiene:

$$z = -\left(\frac{m^2 g}{c^2}\right)e^{-\frac{c}{m}t} - \left(\frac{mg}{c}\right)t + C_2$$

, pero sabemos de las condiciones iniciales que $z\left(t=0\right) = z_0 = h$, y con ello:

$$\begin{aligned} z_0 = -\left(\frac{m^2 g}{c^2}\right)e^0 + 0 + C_2 &= h \\ C_2 &= h + \frac{m^2 g}{c^2} \\ \rightarrow \qquad z &= -\left(\frac{m^2 g}{c^2}\right)\left[e^{-\frac{c}{m}t} - 1\right] - \left(\frac{mg}{c}\right)t + h \end{aligned}$$

Problema 2.c

Repitiendo el análisis con la segunda ecuación de (1) nos permite calcular $\dot{\theta}$ y θ:

$$\begin{aligned} -c\,v_\theta = -cR\dot{\theta} = mR\ddot{\theta} &= mR\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} \\ -\frac{c}{m}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{\dot{\theta}}\,\mathrm{d}\dot{\theta} \\ -\frac{c}{m}t + C_1 &= \log\left(\dot{\theta}\right) \\ Ae^{-\frac{c}{m}t} &= \dot{\theta} \end{aligned}$$

, donde la condición inicial es $v_0 = R\omega_0$, y con ello:

$$\begin{aligned} \frac{v_0}{R} &= Ae^0 = A \\ \rightarrow \qquad \dot{\theta}\left(t\right) = \omega\left(t\right) &= \left(\frac{v_0}{R}\right)e^{-\frac{c}{m}t} \end{aligned}$$