PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2023

Control 01

Duración total: 70 minutos

Problema 1 [3.0 puntos] [Forma A]

Usted lanza un proyectil desde el punto A con un cañón que dispara el proyectil con una rapidez conocida v. Determine el ángulo α requerido para que el proyectil toque el punto B, ubicado a una distancia conocida d.

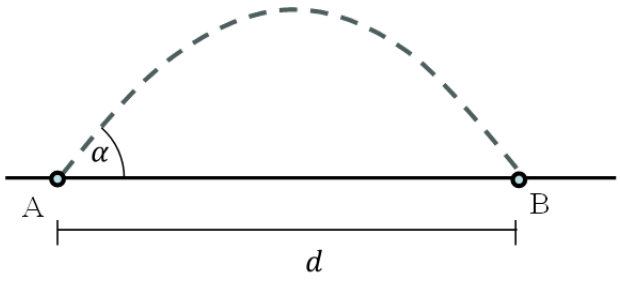


Figura 1: Movimiento parabólico del proyectil A

Solución

Dado que este es un movimiento parabólico, fijando el origen en A, la ecuación de movimiento del proyectil A es:

$$\mathbf{u}_A(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + v \begin{Bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{Bmatrix} t + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} t^2$$

En el punto B se tiene:

$$\mathbf{u}_A(t^*) = \begin{Bmatrix} B \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$v \begin{Bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{Bmatrix} t^* + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} (t^*)^2 = \begin{Bmatrix} B \\ 0 \end{Bmatrix}$$

donde t^* es el tiempo total del vuelo (o el tiempo requerido para llegar a B). De la ecuación anterior se tienen 2 ecuaciones con 2 incógnitas, α y t^*, utilizando la ecuación de movimiento en el eje y se obtiene t^*:

$$v \sin(\alpha)\, t^* - \frac{1}{2} g (t^*)^2 = 0$$

$$t^* \left[v \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t^* \right] = 0$$

Esta ecuación tiene dos soluciones, $t^* = 0$ implica que la pelota está en el origen, la solución de interés es:

$$\begin{aligned} v \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t^* &= 0 \\ \frac{1}{2} g t^* &= v \sin(\alpha) \\ t^* &= \frac{2v \sin(\alpha)}{g} \end{aligned}$$

Reemplazando t^* en la ecuación de movimiento en el eje x se puede obtener α:

$$\begin{aligned} v \cos(\alpha)\, t^* &= B \\ v \cos(\alpha) \cdot \frac{2v \sin(\alpha)}{g} &= B \\ \frac{2v^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{g} &= B \\ 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) &= \frac{gB}{v^2} \end{aligned}$$

Para obtener α se puede utilizar la siguiente relación:

$$\sin(2\alpha) = 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)$$

entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} \sin(2\alpha) &= \frac{gB}{v^2} \\ 2\alpha &= \sin^{-1}\left(\frac{gB}{v^2}\right) \\ \alpha &= \frac{1}{2} \sin^{-1}\left(\frac{gB}{v^2}\right) \end{aligned}$$

Problema 2 [3.0 puntos] [Forma B]

Usted lanza un proyectil desde el punto A con un cañón que dispara el proyectil con una rapidez conocida v. Determine el ángulo α requerido para que el proyectil alcance una altura máxima h.

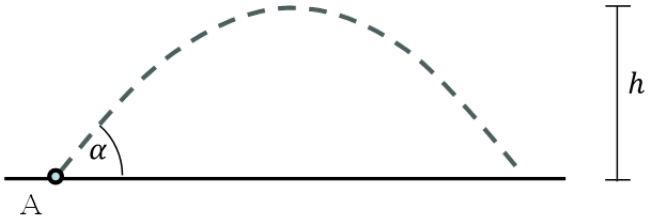


Figura 2: Movimiento parabólico del proyectil A

Solución

Dado que este es un movimiento parabólico, fijando el origen en A, la ecuación de movimiento del proyectil A es:

$$\mathbf{u}_A(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + v \begin{Bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{Bmatrix} t + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} t^2$$

La velocidad del proyectil A es:

$$\dot{\mathbf{u}}_A(t) = v \begin{Bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} t$$

La altura máxima es tal que la velocidad es:

$$\dot{\mathbf{u}}_A(t^*) = \begin{Bmatrix} v\cos(\alpha) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$v \begin{Bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} t^* = \begin{Bmatrix} v\cos(\alpha) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

donde t^* es el tiempo hasta que el proyectil alcanza la altura máxima, de la ecuación de velocidad en y se obtiene t^*:

$$\begin{aligned} v\sin(\alpha) - gt^* &= 0 \\ gt^* &= v\sin(\alpha) \\ t^* &= \frac{v\sin(\alpha)}{g} \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación de movimiento en el eje y se puede obtener el ángulo α:

$$\begin{aligned} v\sin(\alpha)\, t^* - \frac{1}{2} g (t^*)^2 &= h \\ v\sin(\alpha) \cdot \frac{v\sin(\alpha)}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{v^2 \sin^2(\alpha)}{g^2} &= h \\ \frac{v^2 \sin^2(\alpha)}{2g} &= h \end{aligned}$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{2gh}{v^2}$$
$$\sin(\alpha) = \sqrt{\frac{2gh}{v^2}}$$
$$\alpha = \sin^{-1}\left[\sqrt{\frac{2gh}{v^2}}\right]$$

Problema 3 [3.0 puntos] [Forma A]

Un disco de radio 10 cm gira respecto al centro O con una velocidad angular constante de $\omega = \pi/6\,{}^{\text{rad}}/_{\text{s}}$. En el tiempo $t = 0$, una hormiga ubicada en el punto A comienza a caminar hacia el centro del círculo con una rapidez de $1\,{}^{\text{cm}}/_{\text{s}}$.

a) Determine la velocidad y aceleración de la hormiga para $t = 4\,\text{s}$, en coordenadas polares.

b) Determine la velocidad de la hormiga cuando $\theta = {}^{\pi}/_{3}$, en coordenadas cartesianas.

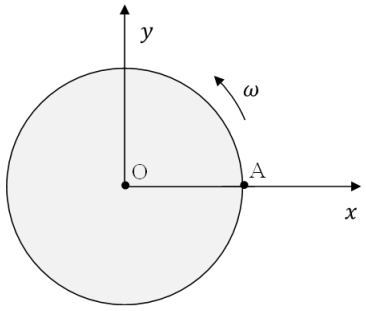


Figura 3: Hormiga caminando hacia en centro del círculo

Solución

De enunciado se tiene que la velocidad radial de la hormiga es:

$$\dot{r}(t) = -1\,{}^{\text{cm}}/_{\text{s}}$$

Como la hormiga se encuentra inicialmente en $r_0 = 10\,\text{cm}$, entonces, la posición radial es:

$$r(t) = -t + r_0 = -t + 10\,\text{cm}$$

y la aceleración radial es:

$$\ddot{r}(t) = 0\,{}^{\text{cm}}/_{\text{s}^2}$$

La velocidad angular es constante en todo momento:

$$\omega(t) = {}^{\pi}/_{6}\,{}^{\text{rad}}/_{\text{s}}$$

Como la hormiga empieza el recorrido en $\theta_0 = 0\,\text{rad}$, entonces:

$$\theta(t) = \frac{\pi}{6}t + \theta_0 = \frac{\pi}{6}t\,\text{rad}$$

y la aceleración angular es:

$$\alpha(t) = 0\,{}^{\text{rad}}/_{\text{s}^2}$$

Solución a)

La velocidad, en coordenadas polares es:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}(t) &= \dot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\omega\,\hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &= -1\,\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{\pi}{6}(-t+10)\,\hat{\mathbf{e}}_\theta\,{}^{\text{cm}}/_{\text{s}}\end{aligned}$$

La celeración, en coordenadas polares es:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}}(t) &= \left(\ddot{r} - r\omega^2\right)\,\hat{\mathbf{e}}_r + \left(r\alpha + 2\dot{r}\omega\right)\,\hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &= -\frac{\pi^2}{36}(-t+10)\,\hat{\mathbf{e}}_r - \frac{\pi}{3}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta\,{}^{\text{cm}}/_{\text{s}^2}\end{aligned}$$

En $t = 4\,\mathrm{s}$ se tiene:

$$\dot{\mathbf{u}}(4) = -1\,\hat{\mathbf{e}}_r + \pi\,\hat{\mathbf{e}}_\theta\ {}^{\mathrm{cm}}/_{\mathrm{s}}$$
$$\ddot{\mathbf{u}}(4) = -\frac{\pi^2}{6}\,\hat{\mathbf{e}}_r - \frac{\pi}{3}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta\ {}^{\mathrm{cm}}/_{\mathrm{s}^2}$$

Solución b)

Para $\theta = {}^{\pi}/_{3}$ se tiene un tiempo de:

$$\theta(t^*) = \frac{\pi}{6}t^* = \frac{\pi}{3} \longrightarrow t^* = 2\,\mathrm{s}$$

Los vectores directores polares en coordenadas cartesianas son:

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \begin{Bmatrix}\cos({}^{\pi}/_{3})\\ \sin({}^{\pi}/_{3})\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{Bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{e}}_\theta = \begin{Bmatrix}-\sin({}^{\pi}/_{3})\\ \cos({}^{\pi}/_{3})\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}-\sqrt{3}\\ 1\end{Bmatrix}$$

Entonces, la velocidad en $\theta = {}^{\pi}/_{3}$ en coordenadas cartesianas es:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}(2) &= -\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{Bmatrix} + \frac{\pi}{6}(-2+10)\cdot\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}-\sqrt{3}\\ 1\end{Bmatrix}\\ &= \begin{Bmatrix}-\frac{1}{2} - \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3}\end{Bmatrix}\end{aligned}$$

Problema 4 [3.0 puntos] [Forma B]

Un disco de radio 20 cm gira respecto al centro O con una velocidad angular constante de $\omega = \pi/3\,\text{rad/s}$. En el tiempo $t = 0$, una hormiga ubicada en el punto O comienza a caminar en dirección radial hacia el punto A con una rapidez de $2\,\text{cm/s}$.

a) Determine la velocidad y aceleración de la hormiga para $t = 3\,\text{s}$, en coordenadas polares.

b) Determine la velocidad de la hormiga cuando $\theta = -\pi/6$, en coordenadas cartesianas.

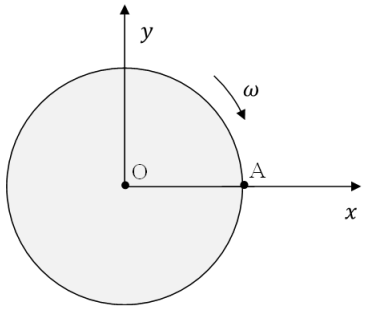


Figura 4: Hormiga caminando hacia en centro del círculo

Solución

De enunciado se tiene que la velocidad radial de la hormiga es:

$$\dot{r}(t) = 2\,\text{cm/s}$$

Como la hormiga se encuentra inicialmente en el punto O, entonces $r_0 = 0\,\text{cm}$, por lo tanto, la posición radial es:

$$r(t) = 2t + r_0 = 2t\,\text{cm}$$

y la aceleración radial es:

$$\ddot{r}(t) = 0\,\text{cm/s}^2$$

La velocidad angular es constante en todo momento:

$$\omega(t) = -\pi/3\,\text{rad/s}$$

Como la hormiga empieza el recorrido en $\theta_0 = 0\,\text{rad}$, entonces:

$$\theta(t) = -\frac{\pi}{3}t + \theta_0 = -\frac{\pi}{3}t\,\text{rad}$$

y la aceleración angular es:

$$\alpha(t) = 0\,\text{rad/s}^2$$

Solución a)

La velocidad, en coordenadas polares es:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}(t) &= \dot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\omega\,\hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &= 2\,\hat{\mathbf{e}}_r - \frac{\pi}{3}(2t)\,\hat{\mathbf{e}}_\theta\,\text{cm/s}\end{aligned}$$

La aceleración, en coordenadas polares es:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}}(t) &= \left(\ddot{r} - r\omega^2\right)\,\hat{\mathbf{e}}_r + (r\alpha + 2\dot{r}\omega)\,\hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &= -\frac{\pi^2}{9}(2t)\,\hat{\mathbf{e}}_r - \frac{4\pi}{3}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta\,\text{cm/s}^2\end{aligned}$$

En $t = 3\,\text{s}$ se tiene:

$$\dot{\mathbf{u}}(3) = 2\,\hat{\mathbf{e}}_r - 2\pi\,\hat{\mathbf{e}}_\theta\ {}^{\text{cm}}/_{\text{s}}$$
$$\ddot{\mathbf{u}}(3) = -\frac{2\pi^2}{3}\,\hat{\mathbf{e}}_r - \frac{4\pi}{3}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta\ {}^{\text{cm}}/_{\text{s}^2}$$

Solución b)

Para $\theta = -{}^{\pi}/_{6}$ se tiene un tiempo de:

$$\theta(t^*) = -\frac{\pi}{3}t^* = -\frac{\pi}{6} \longrightarrow t^* = \frac{1}{2}\,\text{s}$$

Los vectores directores polares en coordenadas cartesianas son:

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \begin{Bmatrix}\cos(-{}^{\pi}/_{6})\\ \sin(-{}^{\pi}/_{6})\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\sqrt{3}\\ -1\end{Bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{e}}_\theta = \begin{Bmatrix}-\sin(-{}^{\pi}/_{6})\\ \cos(-{}^{\pi}/_{6})\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{Bmatrix}$$

Entonces, la velocidad en $\theta = -{}^{\pi}/_{6}$ en coordenadas cartesianas es:

$$\dot{\mathbf{u}}({}^{1}/_{2}) = \begin{Bmatrix}\sqrt{3}\\ -1\end{Bmatrix} - \frac{\pi}{3}(2)({}^{1}/_{2}) \cdot \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{Bmatrix}$$
$$= \begin{Bmatrix}\sqrt{3} - {}^{\pi}/_{6}\\ -1 - \frac{\sqrt{3}\pi}{6}\end{Bmatrix}$$