PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Física & Escuela de Ingeniería
FIS1514 / ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2019

Examen Recuperativo

Duración total: 150 minutos

Reglas generales:

1. Escriba su nombre, RUT, y sección, de manera clara y legible.
2. Las mochilas se deben dejar en el área designada para ello.
3. Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
4. No se podrá abandonar la sala hasta el término de la evaluación. Si necesita ir al baño se registrará su salida/entrada.
5. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
6. **No se aceptan preguntas de ningún tipo**. Si cree que hay algún error, déjelo claramente explicado al final de la prueba.
7. Todo acto contrario a la honestidad académica realizado durante el desarrollo de esta evaluación, será sancionado con la suspensión inmediata de la actividad y con la reprobación de éste. Se considerarán infracciones a la honestidad académica las siguientes:

   Cometer fraude en la evaluación

   Adulterar el acta de asistencia

   Adulterar en forma posterior al término de la evaluación la hoja de respuestas

   Cualquier acto u omisión que sea calificado como infracción académica

   Cualquier acto u omisión que vaya en contra del *código de honor* `http://www.uc.cl/codigodehonor`

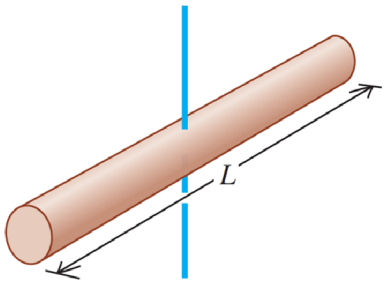
Reglas preguntas de selección múltiple:

1. Debe **seleccionar una sola respuesta** en las preguntas de selección múltiple. Para ello debe rellenar completamente el círculo de la respuesta seleccionada (de lo contrario su respuesta se considerará inválida). Los cálculos y desarrollo de las preguntas de selección múltiple no se consideran.
2. En las preguntas de selección múltiple: **las respuestas incorrectas descuentan** 1/4 **de punto**.
3. Al finalizar la interrogación, entregue únicamente la hoja de respuestas (no entregue este cuadernillo).

Nota
Este semestre el equipo de profesores acordó coordinar las secciones FIS e ICE. Debido a una situación extraordinaria, la coordinación no se pudo mantener intacta. El equipo docente intentó mantener los exámenes lo más coordinados posibles, pero una parte del examen debía ser distinta y abordar contenido diferente.

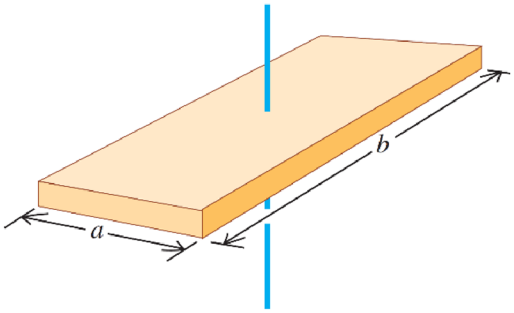
Varilla delgada,
eje por el centro

$$I = \frac{1}{12}ML^2$$



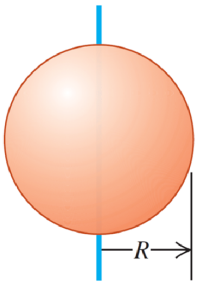
Placa rectangular,
eje por el centro

$$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$$



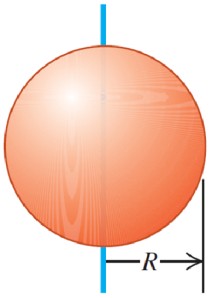
Esfera hueca de
pared delgada

$$I = \frac{2}{3}MR^2$$



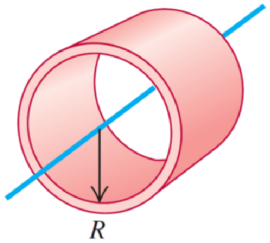
Esfera sólida

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$



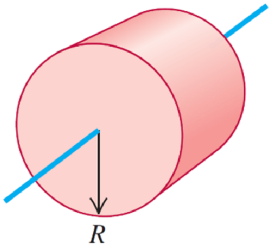
Cilindro hueco de
pared delgada

$$I = MR^2$$



Cilindro sólido

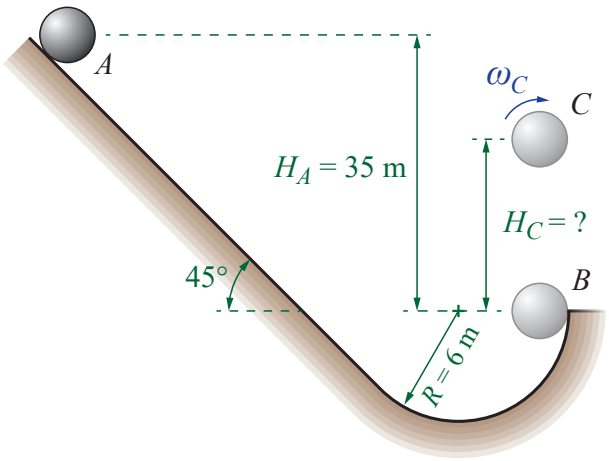
$$I = \frac{1}{2}MR^2$$



Problema 1 [1 punto]

Una esfera sólida de radio r rueda sin deslizar por una rampa desde una altura $H_A = 35\,m$ medida desde el fin de la rampa. La esfera comienza del reposo y se puede despreciar el roce con el aire.

Determine la altura máxima que alcanza la esfera H_C medida desde el fin de la rampa.



a) $H_C = 25\,m$

b) $H_C = \dfrac{25}{\sqrt{2}}\,m$

c) $H_C = 35\,m$

d) $H_C = \dfrac{35}{\sqrt{2}}\,m$

e) $H_C = 31\,m$

Solución

Como la esfera rueda sin deslizar, entonces $v = r \cdot \omega$. En el caso de una esfera, la inercia es $I = {}^2\!/_5 m r^2$. Usando conservación de energía entre los puntos A y B:

$$V_A + T_A = V_B + T_B$$

$$mgH_A + 0 = 0 + \left(\frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}I\omega_B^2\right) = \frac{7}{10}mv_B^2$$

$$\rightarrow \qquad v_B = \sqrt{\frac{10\,g\,H_A}{7}}$$

En el punto B la esfera despega con velocidad vertical v_B y velocidad angular ω_B. Entre los puntos B y C la esfera mantiene su velocidad angular ($\omega_B = \omega_C$), mientras que en el punto más alto $v_C = 0$. Usando conservación de energía:

$$V_B + T_B = V_C + T_C$$

$$0 + \left(\frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}I\omega_B^2\right) = mgH_C + \left(\frac{1}{2}I\omega_B^2\right)$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgH_C$$

$$\rightarrow \qquad H_C = \frac{1}{2} \cdot \frac{10\,g\,H_A}{7} \cdot \frac{1}{g} = \frac{5}{7}H_A$$

Es decir, la altura máxima alcanzada es $H_C = 25\,m$.

Problema 2 [1 punto]

Considere el sistema de masas y polea mostrado en la figura. La polea consta de un disco sólido homogéneo, de masa m y radio R. Suponga que la cuerda no tiene masa y que no desliza sobre la polea. La masa $2m$ parte del reposo desde una altura h conocida.

Determine la tensión en la cuerda que sujeta la masa de $2m$ mientras los bloques están en movimiento (cuerda del lado derecho).

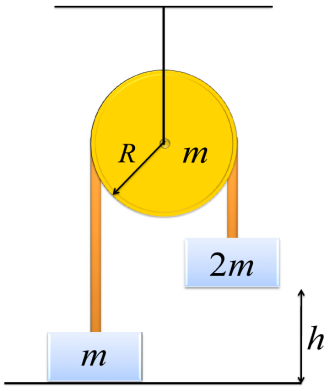
a) $T_{\text{der}} = \dfrac{10}{7}mg$

b) $T_{\text{der}} = \dfrac{9}{7}mg$

c) $T_{\text{der}} = \dfrac{4}{3}mg$

d) $T_{\text{der}} = \dfrac{7}{5}mg$

e) $T_{\text{der}} = \dfrac{6}{5}mg$



Haciendo un DCL para cada objeto (masa m, masa $2m$, y polea) y formulando las ecuaciones de Newton, se obtiene:

$$\left.\begin{array}{lcl} \sum f_z^{(\text{masa } m)} & : & T_1 - mg = m\ddot{z}_1 \\ \sum f_z^{(\text{masa } 2m)} & : & T_2 - 2mg = 2m\ddot{z}_2 \\ \sum \tau^{(\text{polea})} & : & RT_1 - RT_2 = I\alpha \end{array}\right\} \quad \text{donde } I = \frac{1}{2}mR^2$$

La ligadura (movimiento dependiente) de los 3 objetos entrega 2 ecuaciones adicionales:

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{z}_1 = -\ddot{z}_2 \\ \ddot{z}_1 = -R\alpha \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$T_1 = \frac{9}{7}mg \qquad T_2 = \frac{10}{7}mg \qquad \ddot{z}_1 = \frac{2}{7}g \qquad \ddot{z}_2 = -\frac{2}{7}g \qquad \alpha = -\frac{2g}{7R}$$

La tensión en la cuerda derecha (T_2) es: $T_2 = \frac{10}{7}mg$.

Problema 3 [1 punto]

Un martillo neumático dispara el cincel S de masa $2\,kg$ a una velocidad $v_1 = -90\,{}^{m}/_{s}$ (hacia abajo). El cincel golpea el hormigón (concreto) con una fuerza como se indica en la gráfica. Determine la velocidad del cincel justo después del rebote (término del golpe).

Hint: Debido a que el intervalo de tiempo Δt es muy pequeño, puede despreciar el impulso que produce la fuerza de gravedad.

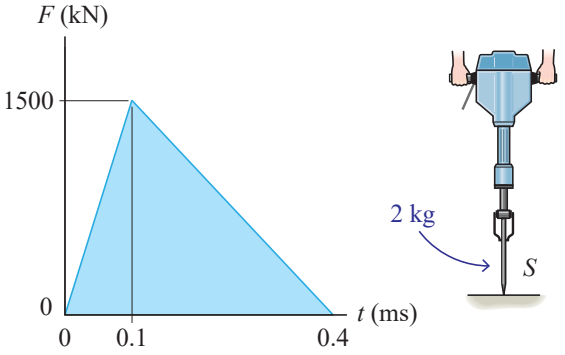
a) $v_2 = 60\,{}^{m}/_{s}$

b) $v_2 = \dfrac{105}{2}\,{}^{m}/_{s}$

c) $v_2 = \dfrac{45}{2}\,{}^{m}/_{s}$

d) $v_2 = 210\,{}^{m}/_{s}$

e) $v_2 = 240\,{}^{m}/_{s}$



Solución

Hay que tener cuidado con los signos y con las unidades ($1\,kN = 1000\,N$ y $1\,s = 1000\,ms$). El problema se resuelve de manera directa usando el principio de impulso–momentum:

$$m\,v_1 + \int f\,(t)\;\mathrm{d}t = m\,v_2$$

, donde la integral se calcula como el área de triángulos:

$$(2)\,(-90) + \left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{0{,}1-0{,}0}{1000}\right)(1500\cdot 1000) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{0{,}4-0{,}1}{1000}\right)(1500\cdot 1000)\right] = (2)\,(v_2)$$

$$-180 + \left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{10}\right)(1500) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{10}\right)(1500)\right] = (2)\,(v_2)$$

$$-180 + \left[\left(\frac{1+3}{2}\right)(150)\right] = (2)\,(v_2)$$

$$-180 + 300 = 2\cdot v_2$$

$$\rightarrow \qquad v_2 = 60\,{}^{m}/_{s}$$

Problema 4 [1 punto]

Un oscilador armónico (sistema masa–resorte) sin roce tiene $k = 54\,{}^{N}/_{m}$ y $m = 2\,kg$. El sistema se encuentra oscilando infinitamente pasando por los puntos $1 \to 2 \to 3 \to 1'$. En cierto instante, se toma una medición y se determina que la posición y velocidad del oscilador son:

$$x_0 = \frac{-1}{3}\ m \qquad \text{y} \qquad \dot{x}_0 = 3\ {}^{m}/_{s}$$

Determine la distancia que recorre el oscilador entre sus puntos máximo y mínimo (puntos 2 y 3 en la Figura).

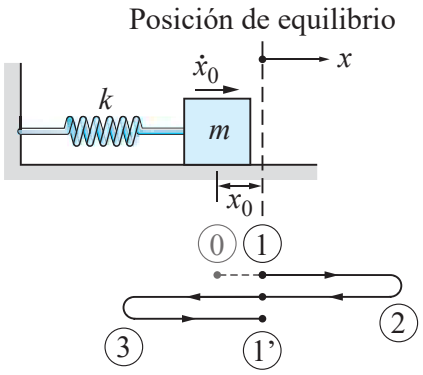
a) $|\Delta x_{\max}| = \dfrac{4}{3}\ m$

b) $|\Delta x_{\max}| = \dfrac{2}{3}\ m$

c) $|\Delta x_{\max}| = \dfrac{\sqrt{82}}{3}\ m$

d) $|\Delta x_{\max}| = \dfrac{2\sqrt{82}}{3}\ m$

e) $|\Delta x_{\max}| = \dfrac{2}{3}\sqrt{2188}\ m$



<u>Solución 1:</u> Usando el principio de conservación de energía.
En los puntos 2 y 3 la velocidad del oscilador es cero. Es decir:

$$T_1 + V_{e1} = T_2 + V_{e2} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{1}{2}m\,(v_0)^2 + \frac{1}{2}k\,(x_0)^2 = \frac{1}{2}k\,(x_{\lim})^2$$

$$9 + 3 = 0 + \left(\frac{1}{2}\right)(54)\,(x_{\lim})^2$$

Cuyas soluciones son $x_{\lim} = \pm\frac{2}{3}\,m$, que corresponden a los puntos 2 y 3 (máximo y mínimo, respectivamente). Con ello, la distancia entre ambos puntos es:

$$|\Delta x_{\max}| = \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}\,m$$

<u>Solución 2:</u> Usando ecuaciones del oscilador armónico simple.
La frecuencia natural circular del oscilador es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{54}{2}} = \sqrt{27}$$

La amplitud del movimiento es:

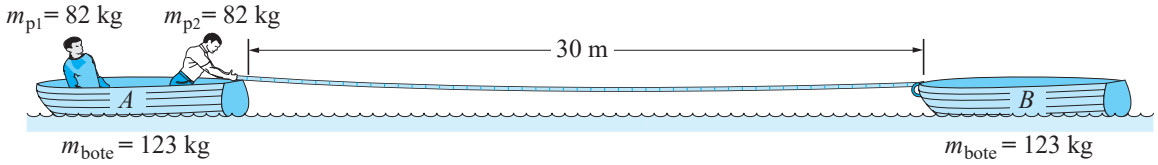
$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{(x_0)^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{9}{27}} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}\,m$$

La distancia entre los puntos mínimo y máximo de la oscilación es igual a dos veces la amplitud del movimiento. Es decir:

$$|\Delta x_{\max}| = 2C = \frac{4}{3}\,m$$

Problema 5 [1 punto]

Dos personas de $82\,kg$ están en un bote A de $123\,kg$. Usando una cuerda de $30\,m$ de largo, uno de ellos tira de un segundo bote B idéntico al anterior ($123\,kg$ de masa también). Asuma despreciable el roce con el agua y aire, así como la masa de la cuerda. Desprecie también las dimensiones de los botes (longitud despreciable). Determine lo que avanza el bote A cuando los dos botes están por hacer contacto (en la misma posición).



a) $\Delta x_A = 9\ m$

b) $\Delta x_A = 21\ m$

c) $\Delta x_A = \dfrac{45}{4}\ m$

d) $\Delta x_A = \dfrac{75}{4}\ m$

e) $\Delta x_A = 15\ m$

Solución

Tomando el origen (o datum) en el bote A, entonces el centro de masa del sistema completo está en:

$$\overline{x} = \frac{(2m_p + m_{\text{bote}})(0) + (m_{\text{bote}})(30)}{2m_p + 2m_{\text{bote}}} = \frac{(123)(30)}{(2)(205)} = 9\ m$$

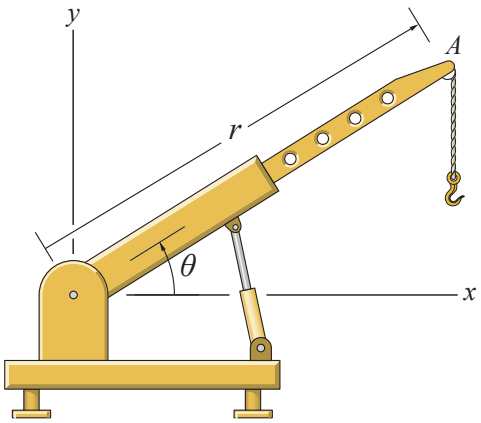
La fuerza (e impulso) que se genera al tirar de la cuerda y acercar los botes es una fuerza de tipo interna en el sistema. Es decir, el centro de masa del sistema no se desplaza. Debido a ello, todos los cuerpos del sistema convergerán en el mismo centro de masa al acercarse.
El bote A se habrá desplazado:

$$\Delta x_A = \overline{x} - 0 = \overline{x} = 9\ m$$

Problema 6 [1 punto]

Una grúa telescópica a control remoto (a escala) mueve el extremo A de su brazo según $r(t)$ y $\theta(t)$. En cierto movimiento el brazo se mueve según

$$\dot{r}(t) = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{t}{2} \qquad \text{y} \qquad \theta(t) = \frac{t^2}{8}$$



Con condición inicial $r_0 = 1\,m$.

Determine el vector de aceleración del extremo del brazo en $t = 2\,s$.

a) $\ddot{\mathbf{u}} = 0\,\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{3}{2}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta \quad [m/s^2]$

b) $\ddot{\mathbf{u}} = \frac{1}{4}\,\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{5}{4}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta \quad [m/s^2]$

c) $\ddot{\mathbf{u}} = \frac{-3}{4}\,\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{9}{4}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta \quad [m/s^2]$

d) $\ddot{\mathbf{u}} = \frac{-1}{4}\,\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{3}{4}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta \quad [m/s^2]$

e) $\ddot{\mathbf{u}} = \frac{-1}{2}\,\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{3}{2}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta \quad [m/s^2]$

Solución

Las expresiones para $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$, y $\ddot{\theta}$, se obtienen derivando las ecuaciones que se entregan. El caso de r se obtiene con el proceso inverso: integrando y utilizando la condición inicial $r_0 = 1\,m$. Con ello se obtiene:

$$r(t) = \frac{t^2}{4} + 1 \qquad \theta(t) = \frac{t^2}{8}$$
$$\dot{r}(t) = \frac{t}{2} \qquad \dot{\theta}(t) = \frac{t}{4}$$
$$\ddot{r}(t) = \frac{1}{2} \qquad \ddot{\theta}(t) = \frac{1}{4}$$

Evaluando en $t = 2\,s$ resulta:

$$r(2) = 2\ m \qquad \theta(2) = \frac{1}{2}\ rad$$
$$\dot{r}(2) = 1\ m/s \qquad \dot{\theta}(2) = \frac{1}{2}\ rad/s$$
$$\ddot{r}(2) = \frac{1}{2}\ m/s^2 \qquad \ddot{\theta}(2) = \frac{1}{4}\ rad/s^2$$

La aceleración en coordenadas polares es:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\,\hat{\mathbf{e}}_r + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

Reemplazando los valores para $t = 2\,s$:

$$\ddot{\mathbf{u}}(2) = \left[\frac{1}{2} - (2)\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\,\hat{\mathbf{e}}_r + \left[(2)\left(\frac{1}{4}\right) + (2)(1)\left(\frac{1}{2}\right)\right]\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$$
$$\ddot{\mathbf{u}}(2) = 0\,\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{3}{2}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta \quad [m/s^2]$$

Problema 7 [1 punto]

Se lanza un objeto pequeño desde una altura h con rapidez inicial de $10\,{}^{m}/_{s}$, y con un ángulo de $30°$ por sobre la horizontal. Se desea que el objeto impacte el suelo con un ángulo de $45°$ por debajo de la horizontal. Desprecie el roce con el aire y aproxime $g = 10\,{}^{m}/_{s^2}$. Determine la altura h del punto de lanzamiento.

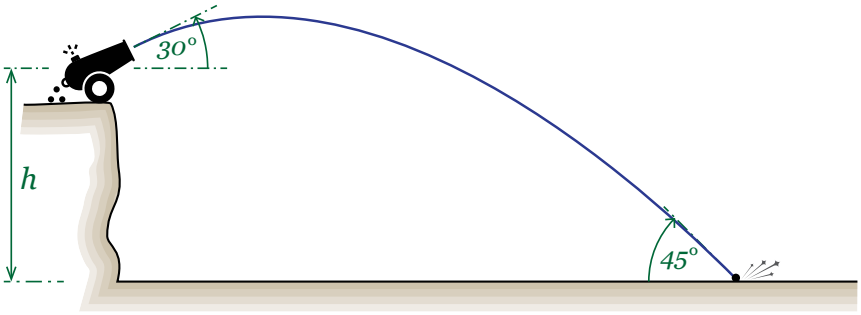
a) $h = 1{,}5\ m$

b) $h = 2{,}0\ m$

c) $h = 2{,}5\ m$

d) $h = 3{,}0\ m$

e) $h = 3{,}5\ m$



Solución

Sea h la altura de lanzamiento, entonces sea t el tiempo en segundos, la posición en metros es

$$x(t) = (10)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t \qquad y(t) = h + 5\,t - \frac{1}{2}g\,t^2 = h + 5\,t(1-t) \quad ,$$

luego la velocidad es

$$\dot{x}(t) = 5\sqrt{3} \qquad \dot{y}(t) = 5 - 10\,t \quad ,$$

luego si T es el tiempo de impacto, debe tenerse que

$$10\,T - 5 = 5\sqrt{3} \quad ,$$

luego

$$T = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right) \quad ,$$

por tanto

$$0 = y(T) = h + \frac{5}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\left[1 - \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\right] = h - \frac{5}{2} \quad ,$$

por tanto $h = 2{,}5\,m$.

Problema 8 [1 punto]

Un juego de un parque de diversiones, consiste en un carro que está atado al cable OA de la figura. El carro rota siguiendo una trayectoria horizontal circular, sin roce, con una velocidad de $v_1 = 4\,{}^m/_s$ cuando $r = 12\,m$. El cable es entonces jalado hacia el centro, con rapidez constante $\frac{1}{2}\,{}^m/_s$ sin detenerse. Determine la rapidez total del carro transcurridos 3 segundos.

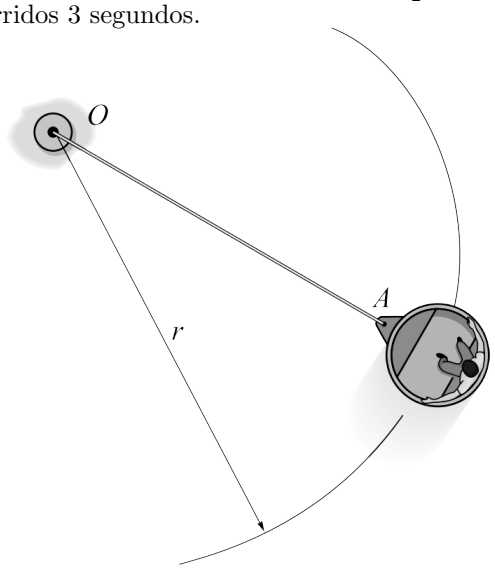
a) $|\mathbf{v}| = \sqrt{\left(\frac{32}{7}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$

b) $|\mathbf{v}| = \sqrt{\left(\frac{32}{7}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$

c) $|\mathbf{v}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{32}{7}\right)^2}$

d) $|\mathbf{v}| = \sqrt{\left(\frac{7}{32}\right)^2 + (2)^2}$

e) $|\mathbf{v}| = \sqrt{\left(\frac{7}{32}\right)^2 - (2)^2}$



Solución

Inicialmente el carro cuenta con momentum angular, con respecto al centro de giro, $\vec{L_1} = \vec{r_1} \times (\vec{v_1}\, m)$. Al momento de ser tirado el carro el momentum final se conserva puesto que la tension del cable no genera torque. Además el radio evoluciona como $r_2 = r_1 - \Delta t\, v_r$.

$$\vec{L_2} = \vec{r_2} \times \left(-v_r\, \hat{r} + v_2\, \hat{\theta}\right)\, m$$
$$\rightarrow \qquad L_2 = (r_1 - \Delta t\, v_r)\; v_2\, m$$

Debido a que el momentum angular se conserva:

$$L_1 = L_2 \qquad \Rightarrow \qquad r_1\, v_1\, m = (r_1 - \Delta t\, v_r)\; v_2\, m$$
$$\longrightarrow \qquad v_2 = \frac{r_1\, v_1}{r_1 - \Delta t\, v_r} = \frac{(12)\,(4)}{12 - (3)\,(1/2)} = \frac{32}{7}$$

Finalmente, la rapidez con que se mueve es:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_2^2 + v_r^2} = \sqrt{\left(\frac{32}{7}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

Problema 9 [1 punto]

Un cilindro de masa $m = 20\,kg$ se suelta desde el reposo cuando $h = 0$. Los resortes tienen un largo natural $\ell_0 = 2\,m$. Considere $g = 10\,{}^{m}/_{s^2}$. Determine su velocidad cuando $h = 3\,m$.

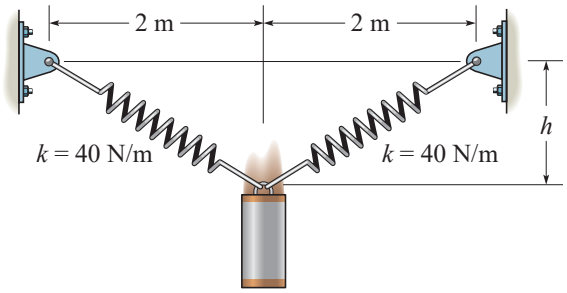
a) $v = \sqrt{60 - 4\left(\sqrt{13} - 2\right)^2}$

b) $v = \sqrt{60 + 4\left(\sqrt{13} - 2\right)^2}$

c) $v = \sqrt{60 + 4\left(\sqrt{13} + 2\right)^2}$

d) $v = \sqrt{60 - 4\left(\sqrt{15} - 2\right)^2}$

e) $v = \sqrt{60 - 4\left(\sqrt{15} + 2\right)^2}$



Solución

Todas las fuerzas involucradas son de tipo conservativas: se puede usar conservación de energía. Inicialmente la altura es $z_1 = h$, y luego es $z_2 = 0$. La energía inicial es:

$$E_1 = mgh$$

La energía final es:

$$E_2 = \frac{1}{2}mv^2 + 2\left(\frac{1}{2}k\Delta\ell^2\right)$$

, en que $\Delta\ell = \sqrt{\ell_0^2 + h^2} - \ell_0$. Es decir:

$$\Delta\ell = \sqrt{\ell_0^2 + h^2} - \ell_0 = \sqrt{2^2 + 3^2} - 2 = \sqrt{13} - 2$$

Igualando las energías y despejando v se obtiene:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + 2\left(\frac{1}{2}k\Delta\ell^2\right)$$

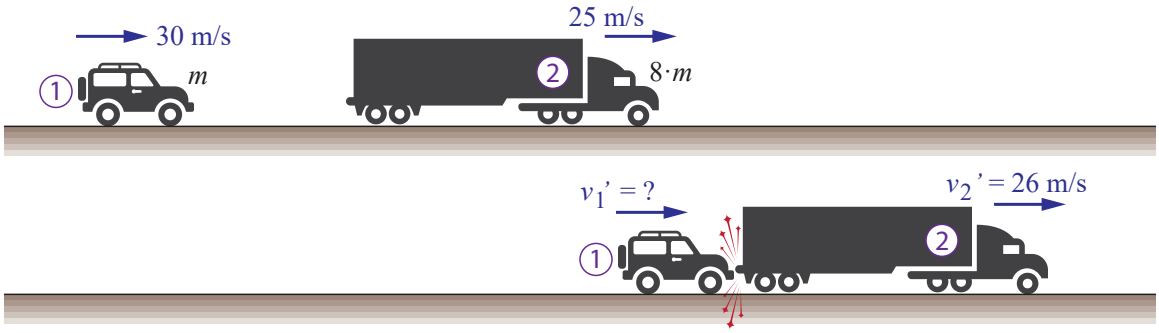
$$\longrightarrow \qquad v = \sqrt{2gh - 2\frac{k}{m}\Delta\ell^2}$$

$$v = \sqrt{(2)\,(10)\,(3) - (2)\left(\frac{40}{20}\right)\left(\sqrt{13} - 2\right)^2}$$

$$v = \sqrt{60 - 4\left(\sqrt{13} - 2\right)^2}$$

Problema 10 [1 punto]

Un automóvil de masa $m_1 = m$ y un camión de masa $m_2 = 8m$ se mueven en la misma dirección con velocidades $v_1 = 30\,{}^{m}/_{s}$ y $v_2 = 25\,{}^{m}/_{s}$, respectivamente. El automóvil choca al camión, luego de lo cual el camión queda con velocidad $v_2' = 26\,{}^{m}/_{s}$ (hacia la derecha). Determine el coeficiente de restitución e del choque.



a) $e = \dfrac{4}{5}$

b) $e = \dfrac{1}{2}$

c) $e = 1$

d) $e = \dfrac{2}{3}$

e) $e = \dfrac{3}{4}$

Solución

En toda colisión se conserva el momentum, y con ello:

$$(m)\,(30) + (8m)\,(25) = (m)\,(v_1') + (8m)\,(26)$$
$$v_1' = 22\ {}^{m}/_{s}$$

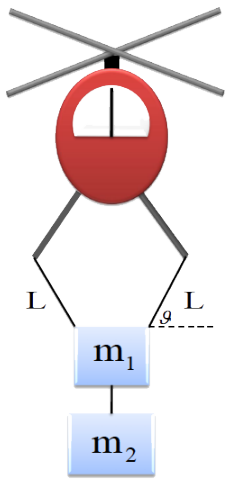
El coeficiente de restitución del choque es:

$$e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} = \frac{26 - 22}{30 - 25} = \frac{4}{5}$$

Lo que indica que el choque es de tipo inelástico ($e < 1$). Es decir, hay algo de daño en los vehículos.

Sección FIS: Problema 11 [1 punto]

Un helicóptero carga dos objetos m_1 y m_2 como se indica en la figura. El helicóptero acelera verticalmente hacia arriba con aceleración a. Determine la tensión T_1 en las cuerdas que sujetan la primera masa.



a) $T_1 = \dfrac{(m_1 + m_2)(a + g)}{2\sin\theta}$

b) $T_1 = \dfrac{(m_1 + m_2)(a + g)}{2\cos\theta}$

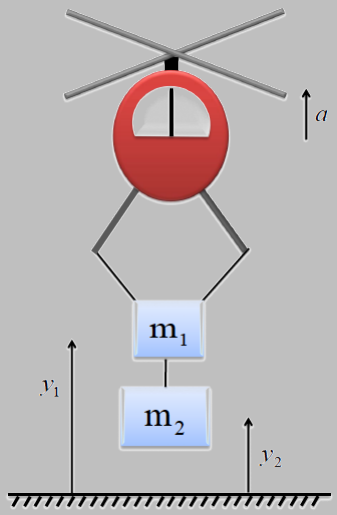
c) $T_1 = \dfrac{(m_1 + m_2)\, g}{2\sin\theta}$

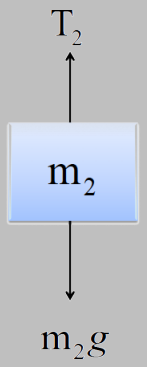
d) $T_1 = \dfrac{(m_1 + m_2)\, a}{2\sin\theta}$

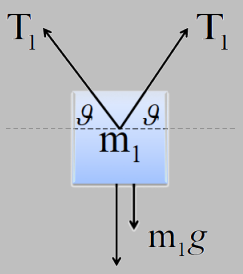
e) $T_1 = \dfrac{(m_1 + m_2)(a + g)}{\sin\theta}$

Solución

Definimos las coordenadas como se muestran en la figura para referirnos a las posiciones de ambos bloques y el diagrama de cuerpo libre para éstos se muestra en la segunda figura.







Para m_2:

$$T_2 - m_2 g = m_2 a$$
$$T_2 = m_2 (a + g)$$

Para m_1:

$$T_1 \sin\theta + T_1 \sin\theta - m_1 g T_2 = m_1 a$$
$$2T_1 \sin\theta - m_1 g - m_2 (a + g) = m_1 a$$

Despejando T_1 se obtiene que:

$$T_1 = \frac{(m_1 + m_2)(a + g)}{2\sin\theta}$$

Sección ICE: Problema 11 [1 punto]

Una placa homogénea de un metro de largo tiene espesor que decae linealmente, teniendo $0{,}4\,m$ de espesor en un extremo y $0{,}2\,m$ de espesor en el otro extremo. Entonces la distancia entre el *centro de masa* de la placa y su borde más grueso es:

Hint: La solución es independiente del espesor de la placa t fuera del plano.

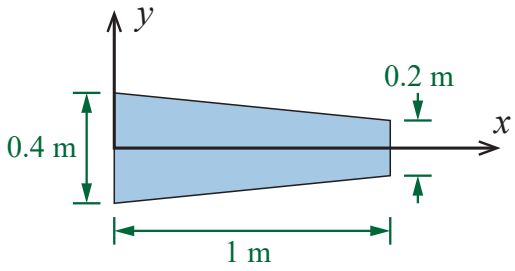
a) $\frac{1}{3}\,m$

b) $\frac{3}{8}\,m$

c) $\frac{2}{5}\,m$

d) $\frac{5}{12}\,m$

e) $\frac{4}{9}\,m$



<u>Solución 1:</u> Método algebraico.
Debido a que la placa es homogénea, la densidad ρ se simplifica o bien puede tomarse $\rho = 1$.
Se tiene que:

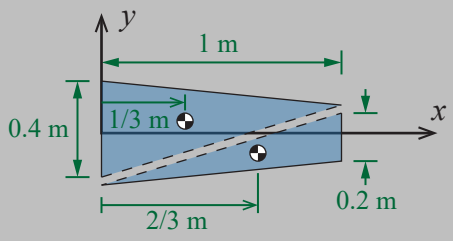
$$M = (1)\left(\frac{0{,}4 + 0{,}2}{2}\right) = 0{,}3$$

y luego

$$\overline{x} = \frac{1}{0{,}3}\int_0^1 2\,x\,(0{,}2 - 0{,}1x)\,\mathrm{d}x = \frac{20}{3}\left(0{,}1x^2 - 0{,}1\frac{x^3}{3}\right)\Big]_0^1$$
$$\overline{x} = \left(\frac{20}{3}\right)(0{,}1)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}\ \mathrm{m}$$

<u>Solución 2:</u> Método gráfico y de composición de 2 cuerpos.

Se puede dividir el trapecio en 2 triángulos, y gracias a que la densidad es uniforme, sabemos que el centro de masa de aquellos triángulos se encuentran ubicados en el promedio de sus vértices.



Componiendo ambos triángulos:

$$\overline{x} = \frac{A_{\text{tri.superior}}\,\overline{x}_{\text{tri.superior}} + A_{\text{tri.inferior}}\,\overline{x}_{\text{tri.inferior}}}{A_{\text{tri.superior}} + A_{\text{tri.inferior}}}$$
$$\overline{x} = \frac{(0{,}4)\,(1)\left(\frac{1}{3}\right) + (0{,}2)\,(1)\left(\frac{2}{3}\right)}{(0{,}4)\,(1) + (0{,}2)\,(1)} = \frac{\frac{2}{15} + \frac{2}{15}}{\frac{2}{5} + \frac{1}{5}} = \left(\frac{4}{15}\right)\left(\frac{5}{3}\right)$$
$$\overline{x} = \frac{4}{9}\ \mathrm{m}$$

Sección FIS: Problema 12 [1 punto]

Un vagón minero vacío de masa M empieza a moverse desde el reposo al aplicársele una fuerza de magnitud constante F en la dirección de movimiento, tal como se muestra en la figura. Al mismo tiempo arena empieza a caer de un embudo grande que se encuentra en reposo con respecto al riel del vagón. La arena cae en forma vertical dentro del carro a una tasa constante $b = \mathrm{d}m/\mathrm{d}t$. Determine la rapidez del vagón transcurrido un tiempo t.

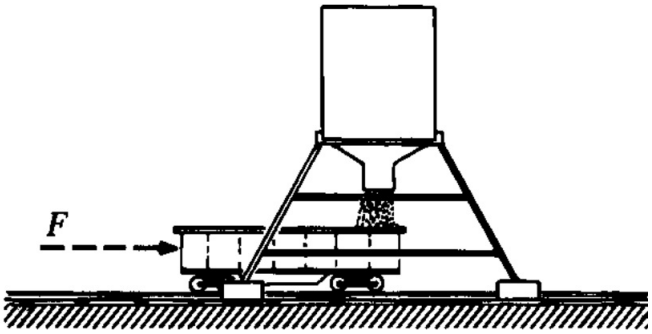
a) $v = \dfrac{F t}{M + b\,t}$

b) $v = \dfrac{F t}{m + b\,t}$

c) $v = \dfrac{F}{b}$

d) $v = \dfrac{F}{b}\left(\dfrac{M}{M + b\,t}\right)$

e) $v = \dfrac{F}{b}\left(\dfrac{M + b\,t}{M}\right)$



<u>Solución 1:</u> Usando el principio de impulso–momentum.
El sistema consiste del vagón de masa M y la masa m de arena. Ambos (vagón y arena) se encuentran inicialmente en reposo. Es decir, el momentum (lineal) inicial del sistema es:

$$P\,(0) = 0$$

Transcurrido un tiempo t, la masa dentro del vagón es $m = b\,t$. El momentum del sistema pra un tiempo t será:

$$P\,(t) = [M + m\,(t)]\,v\,(t) = (M + b\,t)\,v\,(t)$$

El impulso producto de la fuerza F es

$$I = \int_0^t F\,\mathrm{d}t = F\,t$$

Usando el principio de impulso–momentum:

$$P\,(0) + I = P\,(t) \qquad \rightarrow \qquad F\,t = (M + b\,t)\,v\,(t)$$
$$v\,(t) = \frac{F\,t}{M + b\,t}$$

<u>Solución 2:</u> Usando ecuación de un sistema de masa variable.
Usando la ecuación de un sistema de masa variable (que gana masa):

$$\sum F_{ext} = m\,(t)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v_{c/p}\,\dot{m} \qquad \rightarrow \qquad F = (M + b\,t)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + b\,v\,(t)$$

Reorganizando los términos y resolviendo por "separación de variables":

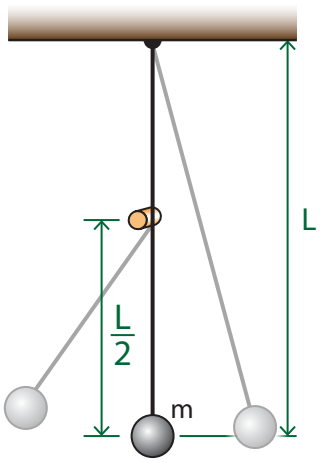
$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{\frac{M}{b} + t} = \int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{\frac{F}{b} - v} \qquad \rightarrow \qquad \ln\left(\frac{M}{b} + t\right)\Big|_0^t = -\ln\left(\frac{F}{b} - v\right)\Big|_0^v$$

Integrando, y simplificando finalmente se obtiene:

$$v\,(t) = \frac{F\,t}{M + b\,t}$$

Sección ICE: Problema 12 [1 punto]

Se tiene un péndulo *ideal*[1] que oscila con ángulos pequeños[2]. La cuerda *ideal* (masa despreciable) tiene largo L, mientras que la masa m en el extremo se puede asumir concentrada (partícula). Un *pin* (o palito) hace que la mitad del movimiento del péndulo sea con un largo de cuerda reducido e igual a $L/2$. Se sabe que $g = 10\,{}^{m}/_{s^2}$, $m = 3\,kg$, y $L = 5\,m$. Determine el tiempo T que tarda el péndulo en hacer una oscilación completa.



a) $T = \dfrac{\pi}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)$

b) $T = \pi\left(1+\sqrt{2}\right)$

c) $T = \dfrac{\pi}{3}\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)$

d) $T = \dfrac{\pi}{6}\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)$

e) $T = \dfrac{1}{2}\left(2+\sqrt{2}\right)$

Solución

El péndulo tendrá una frecuencia natural circular distinta cuando se encuentre del lado derecho o izquierdo:

$$\omega_{\text{der}} = \sqrt{\frac{g}{L}} = \sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad \omega_{\text{izq}} = \sqrt{\frac{g}{L/2}} = 2$$

Los periodos naturales del péndulo en cada lado son:

$$T_{\text{der}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{der}}} = \pi\sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad T_{\text{izq}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{izq}}} = \pi$$

El péndulo hace media oscilación en el lado derecho, y media oscilación en el lado izquierdo. Es decir, el tiempo que tarda en hacer una oscilación completa es:

$$T = \frac{T_{\text{der}}}{2} + \frac{T_{\text{izq}}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2}$$
$$T = \frac{\pi}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)$$

[1] Llamado también péndulo *simple* o *matemático*.
[2] Es decir: $\theta \gtrsim 0$ lo que implica que $\sin(\theta) \approx \theta$.