PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2019

Taller 08

Impulso–momentum & Colisiones

Problema 1. 🌶🌶🌶

La Figura 1 muestra fuerza ejercida por una pistola a una bala de 30 gr. Se pide determinar:

a) La velocidad en función del tiempo.

b) Determine la fuerza máxima F_o si la velocidad final de la bala es de 500 m/s.

Nota: Puede ser resuelto con la 2^a ley de Newton y cinética, pero el objetivo es que lo haga usando impulso–momentum.

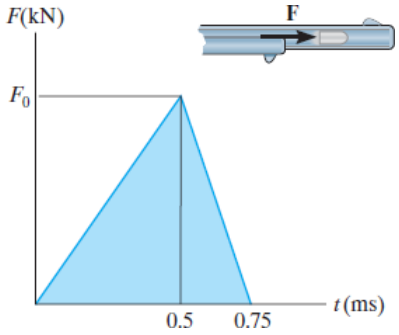


Figura 1: Fuerza aplicada por una pistola sobre una bala.

Problema 2. 🌶🌶

Se tienen los mismos autos del taller 1. Previo a chocar, éstos llevan las velocidades mostradas en la Figura 2. La masa del auto 1 es m, mientras que la del auto 2 es $8m$.

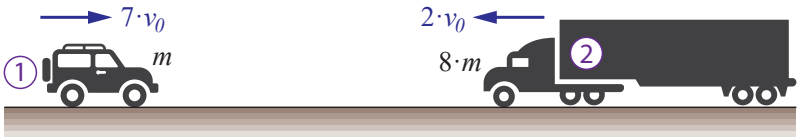


Figura 2: Automóviles camino a colisionar.

Se pide determinar:

a) La velocidad final de los autos si el choque es "perfectamente elástico".

b) La velocidad final de los autos si el choque es "perfectamente plástico".

c) Si la colisión tiene una duración Δt; calcule la fuerza de la colisión promedio f_m.

Soluciones.

Problema 1.a
Comenzamos con un diagrama de impulso–momentum:

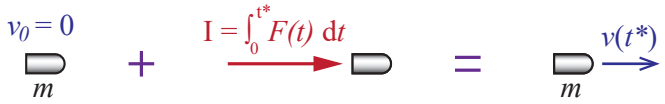


Figura 3: Diagrama de impulso–momentum para obtener la velocidad de la bala en el instante $t^\star$.

Escrito en forma de ecuación:

$$m \cdot v_0 + \int_0^{t^\star} F\left(t\right)\,\mathrm{d}t = m \cdot v\left(t^\star\right)$$
$$0 + \left(\frac{1}{m}\right) \cdot \int_0^{t^\star} F\left(t\right)\,\mathrm{d}t = v\left(t^\star\right)$$

La forma de la fuerza en el tiempo sugiere que se tendrán 3 tramos para la solución.
Tramo I : el impulso es la integral (área) de un triángulo.
Tramo II : el impulso es la integral (área) de un triángulo y un trapecio.
Tramo III: el impulso es la integral (área) de la fuerza completa.

En el tramo I, la fuerza tiene la siguiente expresión en función del tiempo:

$$F^{\mathrm{I}}\left(t\right) = \left(2 \cdot 10^6\right)\left(F_0 \cdot t\right)$$

, donde se puede verificar que $F^{\mathrm{I}}\left(0\right) = 0$, y que $F^{\mathrm{I}}\left({}^{0{,}5}/_{1000}\right) = 1000 \cdot F_0$ (notar que $F\left(\cdot\right)$ entrega valores en Newtons [N] y el tiempo está segundos [s]: unidades consistentes). Con ello, la velocidad $v^{\mathrm{I}}\left(t^\star\right)$ del tramo I una vez que ha actuado el impulso entre $t = 0 \ldots t^\star$ es:

$$\left(\frac{1}{m}\right) \int_0^{t^\star} F^{\mathrm{I}}\left(t\right)\,\mathrm{d}t = v^{\mathrm{I}}\left(t^\star\right)$$
$$\left(\frac{1}{m}\right)\left[\frac{1}{2} \cdot t^\star \cdot F\left(t^\star\right)\right] = v^{\mathrm{I}}\left(t^\star\right)$$
$$\left(\frac{1}{m}\right)\left[\frac{1}{2} \cdot t^\star \cdot \left(2 \cdot 10^6\right)\left(F_0 \cdot t^\star\right)\right] = \left(\frac{10^6 \cdot F_0}{m}\right)\left(t^\star\right)^2 = v^{\mathrm{I}}\left(t^\star\right)$$

En el tramo II, la fuerza tiene la siguiente expresión en función del tiempo:

$$F^{\mathrm{II}}\left(t\right) = \left(10^3 \cdot F_0\right)\left(3 - 4 \cdot 10^3 \cdot t\right)$$

, donde se puede verificar que $F^{\mathrm{II}}\left({}^{0{,}5}/_{1000}\right) = 1000 \cdot F_0$, y que $F^{\mathrm{II}}\left({}^{0{,}75}/_{1000}\right) = 0$. Con ello, la velocidad $v^{\mathrm{II}}\left(t^\star\right)$ del tramo II considera los impulsos del triángulo entre $t = 0 \ldots {}^{0{,}5}/_{1000}$ y el trapecio entre $t = {}^{0{,}5}/_{1000} \ldots t^\star$:

$$\left(\frac{1}{m}\right)\left[\frac{F_0}{4} + \int_{{}^{0{,}5}/_{1000}}^{t^\star} F^{\mathrm{II}}\left(t\right)\,\mathrm{d}t\right] = v^{\mathrm{II}}\left(t^\star\right)$$
$$\left(\frac{1}{m}\right)\left[\frac{F_0}{4} - F_0\left(1000\,t^\star - 1\right)\left(2000\,t^\star - 1\right)\right] = v^{\mathrm{II}}\left(t^\star\right)$$
$$\left(\frac{F_0}{4m}\right)\left[12\left(1000 \cdot t^\star\right) - 8\left(1000 \cdot t^\star\right)^2 - 3\right] = v^{\mathrm{II}}\left(t^\star\right)$$

En el tramo III el impulso es toda el área bajo la curva. Es decir:

$$\left(\frac{1}{m}\right)\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{0{,}75}{1000}\right)(1000\cdot F_0)\right] = v^{\mathrm{III}}(t^\star)$$
$$\frac{3\,F_0}{8\,m} = v^{\mathrm{III}}(t^\star)$$

Finalmente, la velocidad de la bala en el tiempo es:

$$v(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{10^6\cdot F_0}{m}\right)t^2 & \text{para} \quad 0 \le t \le \dfrac{0{,}5}{1000} \\ \left(\dfrac{F_0}{4m}\right)\left[12\,(1000\cdot t^\star) - 8\,(1000\cdot t^\star)^2 - 3\right] & \text{para} \quad \dfrac{0{,}5}{1000} < t \le \dfrac{0{,}75}{1000} \\ \dfrac{3\,F_0}{8\,m} & \text{para} \quad \dfrac{0{,}75}{1000} < t \end{cases}$$

Problema 1.b
Igualando la velocidad final de la bala a $500\,m/s$, y considerando que la masa de la bala es $m = 0{,}03\,kg$:

$$\frac{3\,F_0}{8\,m} = \frac{100\,F_0}{8} = 500$$
$$F_0 = 40\,kN$$

Problema 2.a
Nota: Como regla general en las colisiones no se conserva la energía. Pese a que en el caso particular del choque "perfectamente elástico" sí se conserva la energía; no suele ser recomendable usar energía en la solución de las colisiones[1].
En una colisión se conserva el momentum lineal del sistema (no de cada partícula por separado). La segunda ecuación se obtiene del coeficiente de restitución; que en el caso de un choque "perfectamente elástico" es $e = 1$.
La conservación de momentum implica que:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$$
$$(m)(7v_0) + (8m)(-2v_0) = (m)(v_1') + (8m)(v_2')$$
$$-9v_0 = v_1' + v_2'$$

Mientras que el coeficiente de restitución dice que:

$$e = 1 = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} \qquad \rightarrow \qquad v_1 - v_2 = v_2' - v_1'$$
$$7v_0 - (-2v_0) = 9v_0 = v_2' - v_1'$$

Usando ambas ecuaciones se obtiene:

$$v_1' = -9v_0 \qquad \text{y} \qquad v_2' = 0$$

Se puede verificar que la energía, en este caso particular, se conserva.

Problema 2.b
La ecuación de conservación de momentum queda idéntica al caso anterior, e implica que: $-9v_0 = v_1' + v_2'$. Mientras que el coeficiente de restitución para el caso "perfectamente plástico" es $e = 0$, y con ello:

$$e = 0 = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} \qquad \rightarrow \qquad v_1' = v_2'$$

[1] La ecuación de energía es de tipo cuadrática en velocidad. Mientras que las ecuaciones de conservación de momentum y coeficiente de restitución son lineales en velocidad: más sencillo de resolver.

Usando ambas ecuaciones se obtiene:

$$v_1' = -v_0 \qquad \text{y} \qquad v_2' = -v_0$$

Lo que indica que posterior a la colisión ambos vehículos quedan unidos y moviéndose a velocidad v_0 hacia la izquierda.
Se puede verificar que la energía no se conserva; como es esperable en la mayoría de las colisiones.

Problema 2.c
Para *ver* el impulso de una colisión, es necesario analizar sólo uno de los cuerpos que participan, ya que de lo contrario los impulsos se cancelarán. Haremos los cálculos con el automóvil de la izquierda:

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + \int_0^{\Delta t} f_m \,\mathrm{d}t &= m_1 v_1' \\ (f_m)\,(\Delta t - 0) &= m_1\,(v_1' - v_1) \\ f_m &= \frac{m_1}{\Delta t}\,(v_1' - v_1) = \frac{m}{\Delta t}\,(v_1' - 7v_0) \end{aligned}$$

En el caso del choque "perfectamente elástico":

$$f_m^{\mathrm{PE}} = \frac{m}{\Delta t}\,(-9v_0 - 7v_0) = \frac{-16mv_0}{\Delta t}$$

Mientras que en el caso del choque "perfectamente plástico":

$$f_m^{\mathrm{PP}} = \frac{m}{\Delta t}\,(-v_0 - 7v_0) = \frac{-8mv_0}{\Delta t}$$

Si se hace el cálculo con el automóvil de la derecha (de masa $8m$) se obtienen los mismos impulsos pero con distinto signo, lo que resulta en fuerzas promedio para la colisión de ${}^{16mv_0}/_{\Delta t}$ y ${}^{8mv_0}/_{\Delta t}$, respectivamente.