PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2020

Taller 09

Centro de Masa y Momentum Angular

Problema 1.

Juanito tiene un juego que consiste en una pelotita de 1 kg atada a una cuerda que pasa por un tubo. Él tiene la cuerda tomada de tal manera que la pelotita está girando en una trayectoria circular de diámetro 0.5 m, tal como muestra la figura, y dejando un largo de cuerda $l = 80\ cm$. Suponga que ahora Juanito decide tirar de la cuerda, acortándola de manera que $l' = 30\ cm$. Considerando que $g = 10\ m/s^2$ y que no existe roce con el aire, determine:

a) La velocidad de la pelotita en la condición inicial.

b) La tensión de la cuerda en la condición final.

c) La velocidad en la condición final.

d) El diámetro de la trayectoria circular en la condición final.

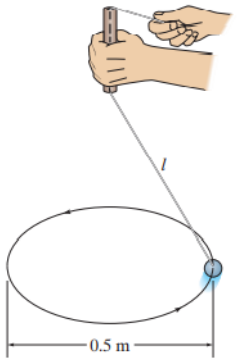


Figura 1: Problema 1

Solución

Viendo que el largo de la cuerda es $l = 80\ cm$ y que el radio de giro es $0{,}25\ m$ es posible determinar que la altura a la que está el tubo es de $h = \sqrt{0{,}8^2 - 0{,}25^2} = \sqrt{0{,}5775}$. Haciendo sumatoria de fuerzas sobre la pelotita se tiene que:

$$\sum F_y : T_1 * \frac{\sqrt{0{,}5775}}{0{,}8} - 1 * 10 = 0$$

Y por tanto se tiene que:

$$T_1 = 10{,}53\ N$$

Luego:

$$\sum F_x : T_1 * \frac{0{,}25}{0{,}8} = 1 * \frac{v_1^2}{0{,}25} \Longrightarrow v_1 = 0{,}91\ m/s$$

Como no existen fuerzas en el plano tangencial, es decir, que hagan momento, entonces el momentum angular se conserva. Por tanto se tendrá:

$$0{,}25 * 1 * v_1 = r' * 1 * v_2$$

Donde r' es el radio de la trayectoria final y v_2 es la velocidad de la condición final. Además, haciendo nuevamente sumatoria de fuerzas:

$$\sum F_y : T_2 * \frac{\sqrt{0{,}3^2 - r'^2}}{0{,}3} - 1 * 10 = 0$$

$$\sum F_x : T_2 * \frac{r'}{0{,}3} = 1 * \frac{v_2^2}{r'}$$

Por tanto, se tiene un sistema de ecuaciones de 3x3. Resolviendo se obtiene que:

$$T_2 = 12{,}76\ N$$

$$v_2 = 1{,}22\ m/s$$

$$r' = 0{,}19\ m$$

Y entonces, el diámetro en la condición final es 37 cm.

Problema 2.

Se tiene la configuración de la figura, donde las cuatro pelotitas de 2 kg cada una están unidas por brazos rígidos al eje central a una distancia $r = 60\ cm$. Si originalmente están en reposo y comienza a actuar un momento en el eje igual a $M = e^t + 2t^2$ donde t es el tiempo en segundos. ¿Cuál será la velocidad de las pelotitas luego de que hayan transcurrido 4 segundos?

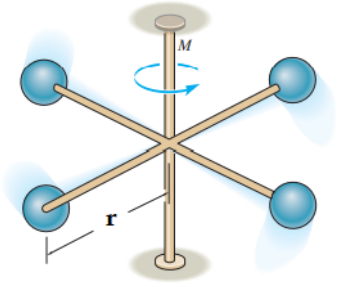


Figura 2: Problema 2

Solución

Aplicando el principio de momentum angular se tiene:

$$\int M dt = \Delta H$$

$$\int_0^4 e^t + 2t^2 dt = 8 * 0{,}6 * v_2 - 8 * 0{,}6 * 0$$

$$e^t + \frac{2t^3}{3} \,|_0^4 = e^4 - 1 + \frac{128}{3} = 4{,}8 v_2 \Longrightarrow v_2 = 20{,}06 \ m/s$$

Problema 3.

Determine las coordenadas del centro de masa de la sección mostrada, que se forma con un triángulo y un cuarto de círculo.

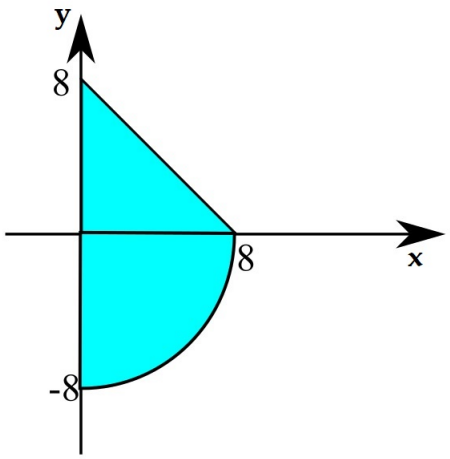


Figura 3: Problema 3

Solución

Al ser una figura compuesta se calculará el centro de masa de cada pedazo y luego se ponderarán. Para el triángulo superior es sencillo, se sabe que está a 1/3 de la base. Por tanto:

$$x_t = 8/3$$

$$y_t = 8/3$$

Para el cuarto de círculo se tendrá que:

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

Luego, para sacar la coordenada x:

$$x_c = \frac{\int_{-\pi/2}^0 \int_0^8 r^2 \cos\theta dr \ d\theta}{\int_{-\pi/2}^0 \int_0^8 r \ dr \ d\theta} = \frac{\int_{-\pi/2}^0 (512/3)\cos\theta d\theta}{16\pi} = \frac{(512/3)}{16\pi} = \frac{32}{3\pi}$$

Y haciendo lo mismo en y:

$$y_c = \frac{\int_{-\pi/2}^0 \int_0^8 r^2 \sin\theta dr \ d\theta}{\int_{-\pi/2}^0 \int_0^8 r \ dr \ d\theta} = -\frac{32}{3\pi}$$

Entonces, para la figura completa:

$$x = \frac{(8/3) * 32 + (32/3\pi) * 16\pi}{16\pi + 32} = 3{,}11$$

$$y = \frac{(8/3) * 32 - (32/3\pi) * 16\pi}{16\pi + 32} = -1{,}04$$