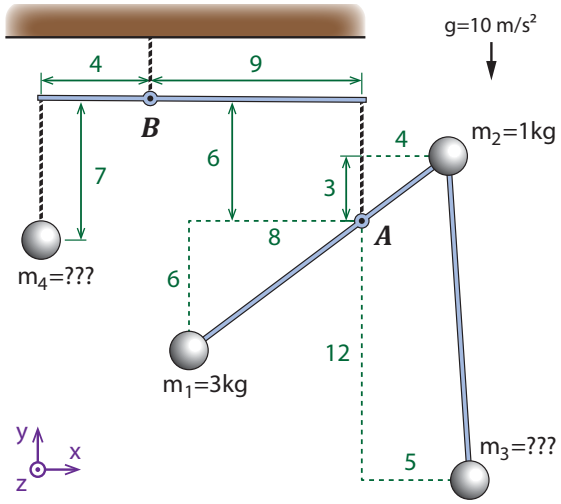
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1513 — Dinámica
Segundo Semestre 2018

Taller 14

¿Qué entra en el examen?... Todo.

Problema 1

Se tiene el móvil de bebé de la Figura. Se pide determinar el valor de la masa m_3 para que lado derecho del móvil no se mueva.



a) $m_3 = 1\,kg$

b) $m_3 = 2\,kg$

c) $m_3 = 3\,kg$

d) $m_3 = 4\,kg$

e) $m_3 = 5\,kg$

Problema 2

Determine el valor de m_4 para que el móvil del problema anterior no se mueva.

a) $m_4 = 10\,kg$

b) $m_4 = 12\,kg$

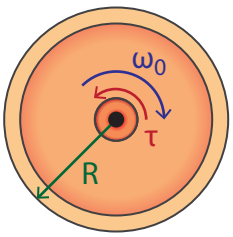
c) $m_4 = 16\,kg$

d) $m_4 = 18\,kg$

e) $m_4 = 20\,kg$

Problema 3

Una rueda de fibra de carbono tiene inercia $I_G = 2/3MR^2$, donde $M = 2\,kg$ y $R = 1\,m$. La rueda gira en sentido horario con velocidad constante $\omega_0 = \frac{1}{2}\,rad/s$. En cierto instante se aplica un momento de magnitud $\tau(t) = t/9$ en sentido anti-horario. La velocidad angular en $t = 4\,s$ es:



a) $\omega(4) = \dfrac{1}{3}\,rad/s$

b) $\omega(4) = \dfrac{1}{6}\,rad/s$

c) $\omega(4) = -\dfrac{1}{3}\,rad/s$

d) $\omega(4) = -\dfrac{1}{6}\,rad/s$

e) $\omega(4) = -\dfrac{2}{3}\,rad/s$

Problema 4

Un cohete de agua gigante de masa M comienza desde el reposo en la posición horizontal (no hay gravedad). La mitad de su masa corresponde a agua. Si el agua se expulsa con rapidez constante (relativa con respecto al cohete): ¿A qué velocidad se debe expulsar el agua para alcanzar una velocidad máxima de $100\,km/h$?

a) $|v_{\text{rel}}| = 100\,km/h$

b) $|v_{\text{rel}}| = 200\,km/h$

c) $|v_{\text{rel}}| = \dfrac{100}{\sqrt{2}}\,km/h$

d) $|v_{\text{rel}}| = 100\sqrt{2}\,km/h$

e) $|v_{\text{rel}}| = \dfrac{200}{\ln(2)}\,km/h$

Problema 5

Las barras de la figura tienen todas $L >> D, B$. Todas las barras tienen masa $M = 5\,kg$ y comienzan desde el reposo. Se les aplica un momento constante $\tau = 10\,N \cdot m$ en la misma dirección a las 3 barras. Transcurrido un Δt: ¿Cuál de ellas girará más lento?

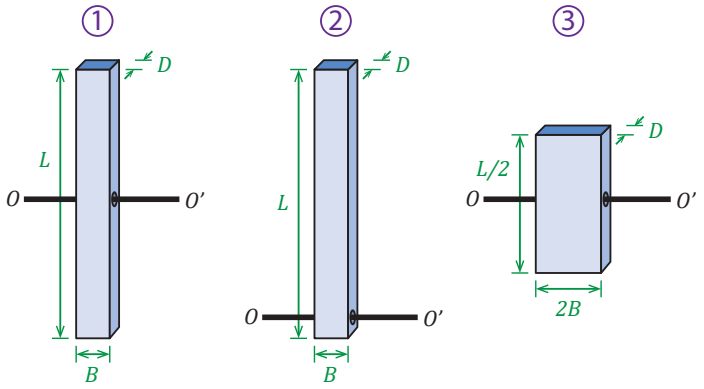
a) Barra 1

b) Barra 2

c) Barra 3

d) Depende de la razón D/B.

e) Faltan datos.



Problema 6

El carrete de la figura comienza desde el reposo. La aceleración angular α del carrete es:

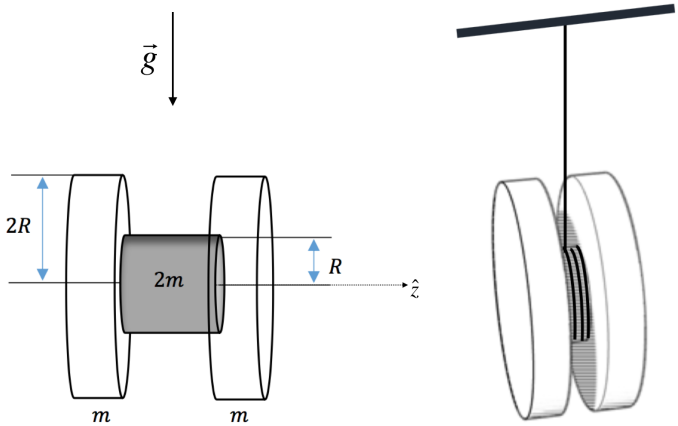
a) $\alpha = \dfrac{2g}{3R}$

b) $\alpha = \dfrac{4g}{9R}$

c) $\alpha = \dfrac{g}{3R}$

d) $\alpha = \dfrac{4g}{3R}$

e) $\alpha = \dfrac{4g}{5R}$



, donde α es la tasa a la que se eyecta masa. Derivando respecto al tiempo se obtiene:

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = -\alpha$$

La ecuación (general) de un sistema de masa variable es:

$$\sum f_{ext} = m \cdot \dot{v} + v_{rel} \cdot \dot{m}$$

, donde $\dot{m} < 0$ es una pérdida o eyección de masa. En nuestro caso, queremos determinar v_{rel}, y no hay fuerzas externas:

$$0 = [m_0 - \alpha \cdot t] \cdot \dot{v} + v_{rel} \cdot (-\alpha)$$

$$\dot{v} = v_{rel} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{m_0 - \alpha t}$$

$$dv = \left[v_{rel} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{m_0 - \alpha \cdot t} \right] dt$$

Integrando en ambos lados:

$$v(t) = v_{rel} \cdot \alpha \cdot \log[m_0 - \alpha \cdot t] \cdot \frac{-1}{\alpha} + C_1$$

$$v(t) = C_1 - v_{rel} \cdot \log[m_0 - \alpha \cdot t]$$

La condición inicial es que $v(0) = 0$, y con ello C_1 es:

$$0 = C_1 - v_{rel} \cdot \log[m_0] \longrightarrow C_1 = v_{rel} \cdot \log[m_0]$$

Es decir: $v(t) = v_{rel} \cdot \log[m_0] - v_{rel} \cdot \log[m_0 - \alpha \cdot t]$

$$v(t) = v_{rel} \cdot \log\left[\frac{m_0}{m_0 - \alpha t}\right]$$

La velocidad máxima se alcanzará cuando se haya expulsado todo el combustible. Esto ocurrirá en un t^* tal que:

$$m(t^*) = m_0 - \alpha \cdot t^* = \frac{m_0}{2} \longrightarrow t^* = \frac{m_0}{2\alpha}$$

Finalmente, queremos que $v(t^*) = 100$, y con ello:

$$v(t^*) = v_{rel} \cdot \log\left[\frac{m_0}{m_0 - \alpha \cdot t^*}\right] = v_{rel} \cdot \log[2] = 100$$

$$v_{rel} = \frac{100}{\log(2)} \text{ km/h}$$

- Problema 5

Las inercias de las barras son:

$$I_1 = \frac{1}{12} M L^2$$

- **Probema 1**

Es importante entender que "el brazo de momento" es la menor distancia a la "linea de acción" de la fuerza. En este, caso la fuerza es el peso (linea de acción vertical).

Para que no se mueva: $\sum \mathcal{T} = I \cdot \alpha$ con $\alpha = 0$, lo que implica:

$$\sum \mathcal{T}_A = 0$$

$$(3g)(8) - (1g)(4) - (m_3 \cdot g)(5) = 0$$

$$m_3 = 4 \text{ kg} //$$

- **Problema 2**

Se puede tomar sumatoria de momentos respecto a todos los objetos, o bien usar el conocimiento que el C.M. del lado derecho quedó en la linea vertical que pasa por A.

Método 1:

$$\sum \mathcal{T}_B = 0$$

$$(m_4 \cdot g)(4) - (3g)(1) - (1g)(13) - (m_3 \cdot g)(14) = 0$$

$$m_4 = 18 \text{ kg} //$$

Método 2:

$$\sum \mathcal{T}_B = 0$$

$$(m_4 \cdot g)(4) - (3g + 1g + 4g)(9) = 0$$

$$m_4 = 18 \text{ kg} //$$

- **Problema 3**

Como gira en sentido horario, entonces: $\omega_0 = -\frac{1}{2}\hat{k}$ rad/s

Usando el principio de impulso-momentum para giro:

$$H_0 + \int_0^{4s} \mathcal{T} \cdot dt = H_1$$

$$I_G \cdot \omega_0 + \left[\frac{t^2}{18}\right]\Big|_0^4 = I_G \cdot \omega_1$$

$$\left[\frac{2}{3}(2)(1^2)\right]\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{8}{9} = \left[\frac{2}{3}(2)(1^2)\right]\omega_1$$

$$-\frac{2}{3} + \frac{8}{9} = \frac{4}{3}\omega_1 \longrightarrow \omega_1 = \frac{1}{6}\hat{k} \text{ rad/s} //$$

- **Problema 4**

La ecuación de la masa del cohete con respecto al tiempo es:

$$m(t) = m_0 - \alpha \cdot t$$

$$I_2 = \frac{1}{3}ML^2$$

$$I_3 = \frac{1}{12}M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{48}ML^2$$

Como $\omega_0 = 0$ para todas las barras:

$$I \cdot \omega_0 + \int_0^{\Delta t} J\,dt = I \cdot \omega_1$$

$$(10)(\Delta t) = I \cdot \omega_1$$

$$\omega_1 = \frac{10 \cdot \Delta t}{I}$$

La barra de mayor inercia girará más lento; i.e. la barra que girará más lento es la barra 2 ya que:

$$I_2 > I_1 > I_3$$

- Problema 6

La masa total del carrete es:

$$M = m + 2m + m = 4m$$

La inercia total del carrete (respecto a su eje central) es:

$$I_G = \frac{1}{2}(m)(2R)^2 + \frac{1}{2}(2m)(R)^2 + \frac{1}{2}(m)(2R)^2 = 5mR^2$$

Usando la 2ª Ley de Newton, y llamando T a la tensión en la cuerda:

$$\Sigma f_3: \quad T - Mg = M \cdot \ddot{z}$$

$$\Sigma \theta: \quad T \cdot R = I \cdot \alpha$$

Además, tenemos una condición de ligadura (cuidado con los signos; usar la "regla de la mano derecha" y ser consistente con el cálculo de momento anterior en $\Sigma\theta$):

$$-\omega \cdot R = \dot{z} \quad \rightarrow \quad -\alpha \cdot R = \ddot{z}$$

Usando las 3 ecuaciones se obtiene:

$$T = \frac{20}{9}mg \quad ; \quad \ddot{z} = -\frac{4}{9}g \quad ; \quad \alpha = \frac{4}{9}\frac{g}{R}$$