PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2019

Taller 04

Leyes de Newton & Roce

Problema 1. 🌶🌶🌶

Se tiene una caja de masa m apoyada contra una pared como muestra la Figura 1. Una fuerza no constante e igual a $F(t) = (m/k)\,t$ la mantiene pegada a la pared. La caja parte del reposo y el coeficiente de roce (estático y dinámica) entre la caja y la pared es μ_0. Se pide:

a) Determine la aceleración de la caja en función del tiempo en ambos ejes (ejes x e y).

b) Determine el tiempo Δt que la caja se demora en frenar.

c) Determine la distancia total recorrida por la caja.

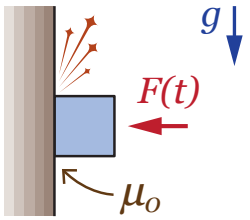


Figura 1: Caja apoyada contra pared.

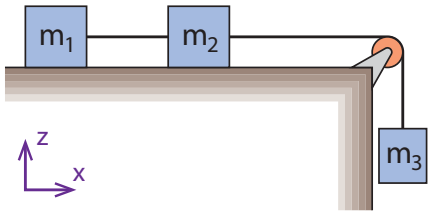


Figura 2: Sistemas de 3 masas con una colgando.

Problema 2. 🌶🌶🌶

Considere el sistema de mostrado en la Figura 2. Suponga inicialmente que no hay roce entre las masas m_1 y m_2 y la superficie.
Se pide determinar:

a) La tensión en cada cuerda.

b) La aceleración de los 3 objetos.

c) ¿Por qué la aceleración es la misma para todos los objetos?

d) Repita el problema pero con un coeficiente de roce estático μ_s y dinámico μ_k entre las cajas y la superficie horizontal.

e) En el problema con roce: determine el valor la masa m_3 para que el sistema acelere.

Soluciones.

Problema 1 [1]
El diagrama de cuerpo libre del problema se muestra en la Figura 3.

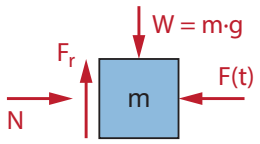


Figura 3: Diagrama de cuerpo libre (DCL) de la caja apoyada contra la pared.

Como el bloque no acelera en x, entonces $\sum (f_x)_i = 0$ y con ello:

$$N - F(t) = 0 \qquad \rightarrow \qquad N = F(t) = \frac{m}{k}\, t$$

, y con ello la fuerza de roce resulta: $F_r = \mu_0 \cdot N = \mu_0 \left({}^{m}/_{k}\right) t$. En la dirección y la 2^a Ley de Newton dice $\sum (f_y)_i = m \cdot a_y$. Es decir:

$$m \cdot a_y = -W + F_r = -mg + \frac{\mu_0 \cdot m}{k}\, t$$
$$a_y(t) = \frac{\mu_0}{k}\, t - g$$

El bloque inicialmente acelera (moviéndose hacia abajo) hasta que $a_y(t_b) = 0$, instante previo a que comience a frenar:

$$\frac{\mu_0}{k}\, t_b - g = 0 \qquad \rightarrow \qquad t_b = \frac{g \cdot k}{\mu_0}$$

El tiempo que tarda la caja en detenerse está dado por $v(t^\star) = 0$. Es decir:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a(t) \qquad \text{con} \qquad v(0) = v_0 = 0$$
$$v(t) = \frac{\mu_0}{2k}\, t^2 - g \cdot t = t\left(\frac{\mu_0}{2k}\, t - g\right)$$
$$\rightarrow \qquad t^\star = \begin{cases} 0 & \leftarrow \quad \text{punto de partida: solución trival} \\ 2\frac{k \cdot g}{\mu_0} \end{cases}$$

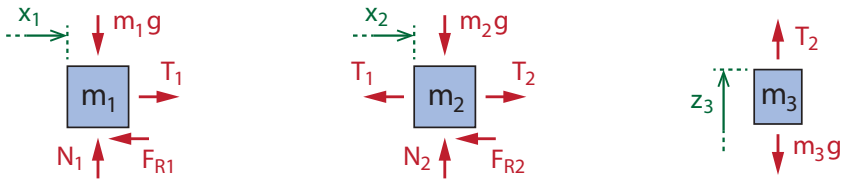
En $t = t^\star$ la caja ha descendido $|u(t^\star)|$. Es decir:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = v(t) \qquad \text{con} \quad u(0) = u_0 = 0$$
$$u(t) = \frac{\mu_0}{6k}\, t^3 - \frac{g}{2}\, t^2$$
$$u(t^\star) = \left(\frac{\mu_0}{6k}\right)\left(\frac{8k^3 g^3}{\mu_0^3}\right) - \left(\frac{g}{2}\right)\left(\frac{4k^2 g^2}{\mu_0^2}\right) = \frac{k^2 g^3}{\mu_0^2}\left(\frac{4}{3} - 2\right)$$
$$u(t^\star) = \left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{k^2 g^3}{\mu_0}\right)$$

Notar que la constante k tiene unidades de $\left(s^3/m\right)$, para que así $F(t)$ resulte en *fuerza*.

Problema 2.a
Comenzamos con los DCL de los 3 cuerpos del sistema (incluiremos la fuerza de roce en los DCL ya que luego será considerada):

[1] Creado por F. Bertin.



Aplicando la 2^a ley de Newton en la dirección "x" para los bloques 1 y 2:

$$\sum f_{x1} = m\ddot{x}_1 \qquad \rightarrow \qquad T_1 = m_1\ddot{x}_1 \tag{1}$$

$$\sum f_{x2} = m\ddot{x}_2 \qquad \rightarrow \qquad -T_1 + T_2 = m_2\ddot{x}_2 \tag{2}$$

, y para el bloque 3 en la dirección "z":

$$\sum f_{z3} = m\ddot{z}_3 \qquad \rightarrow \qquad T_2 - m_3 g = m_3\ddot{z}_3 \tag{3}$$

Llamando x_p a la posición de la polea (inmóvil) medida desde $x = 0$, y análogamente z_p a la elevación de la polea (inmóvil) medida desde $z = 0$; podemos escribir los largos de ambas cuerdas (de longitud constante):

$$L_{\text{izq}} = x_2 - x_1 + \text{cte} \qquad \rightarrow \qquad 0 = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1$$
$$L_{\text{der}} = (x_p - x_2) + (z_p - z_3) + \text{cte} \qquad \rightarrow \qquad 0 = -\ddot{x}_2 - \ddot{z}_3$$

Ambas ecuaciones pueden ser combinadas para encontrar la ligadura (movimiento dependiente) del sistema:

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = -\ddot{z}_3$$

, lo que puede ser reemplazado en las ecuaciones (1), (2), y (3); para así dejar todo expresado en términos de $\ddot{x}_1$:

$$\begin{aligned} T_1 &= m_1\ddot{x}_1 \\ -T_1 + T_2 &= m_2\ddot{x}_1 \\ T_2 - m_3 g &= m_3\left(-\ddot{x}_1\right) \end{aligned}$$

Reemplazando T_1 de la primera ecuación en la segunda:

$$\begin{aligned} -m_1\ddot{x}_1 + T_2 &= m_2\ddot{x}_1 \\ T_2 - m_3 g &= m_3\left(-\ddot{x}_1\right) \end{aligned}$$

, e igualando T_2 en las ecuaciones restantes:

$$\left(m_1 + m_2\right)\ddot{x}_1 = m_3 g - m_3\ddot{x}_1 \qquad \rightarrow \qquad \ddot{x}_1 = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} g$$

Con ello, la tensión en la cuerda izquierda es:

$$T_1 = m_1\ddot{x}_1 = \frac{m_1 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} g$$

, y lo mismo para la cuerda derecha es:

$$T_2 = \left(m_1 + m_2\right)\ddot{x}_1 = \frac{m_3\left(m_1 + m_2\right)}{m_1 + m_2 + m_3} g$$

Problema 2.b

La aceleración de los tres objetos es:

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} g \qquad ; \qquad \ddot{x}_2 = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} g \qquad ; \qquad \ddot{z}_3 = -\frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} g$$

Problema 2.c
Las aceleraciones (en magnitud) es idéntica en los 3 objetos producto de las cuerdas que establecen una condición de movimiento dependiente (ligadura) entre los objetos.

Problema 2.d
Los bloques 1 y 2 no aceleran en la dirección "z", con lo que:

$$\sum f_{z1} = m\ddot{z}_1 = 0 \qquad \rightarrow \qquad -m_1 g + N_1 = 0 \qquad \rightarrow \qquad N_1 = m_1 g$$
$$\sum f_{z2} = m\ddot{z}_2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad -m_2 g + N_2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad N_2 = m_2 g$$

Aplicando la 2^a ley de Newton según las direcciones x_1, x_2, y z_3:

$$\begin{aligned} T_1 - F_{r1} = T_1 - \mu_k m_1 g &= m_1 \ddot{x}_1 \\ -T_1 + T_2 - F_{r2} = -T_1 + T_2 - \mu_k m_2 g &= m_2 \ddot{x}_2 \\ T_2 - m_3 g &= m_3 \ddot{z}_3 \end{aligned}$$

La condición de ligadura no cambia:

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = -\ddot{z}_3$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \frac{m_3 - (m_1 + m_2)\,\mu_k}{m_1 + m_2 + m_3} g \qquad \text{y} \qquad \ddot{z}_3 = -\ddot{x}_1 = \frac{(m_1 + m_2)\,\mu_k - m_3}{m_1 + m_2 + m_3} g$$
$$T_1 = \frac{m_1 m_3\,(1 + \mu_k)}{m_1 + m_2 + m_3} g \qquad \text{y} \qquad T_2 = \frac{m_3\,(m_1 + m_2)\,(1 + \mu_k)}{m_1 + m_2 + m_3} g$$

Problema 2.e
Si el sistema está en reposo, entonces $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \ddot{z}_3 = 0$. En la condición límite $F_{r1} = \mu_s N_1 = \mu_s m_1 g$ y $F_{r2} = \mu_s N_2 = \mu_s m_2 g$. Usando la 2^a ley de Newton para los 3 bloques:

$$\begin{aligned} T_1 - \mu_s m_1 g &= 0 \\ -T_1 + T_2 - \mu_s m_2 g &= 0 \\ T_2 - m_3 g &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo para m_3 se obtiene que en la condición límite:

$$m_3 = \mu_s\,(m_1 + m_2)$$

Es decir, el sistema acelerará para: $m_3 > \mu_s\,(m_1 + m_2)$.