PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2024

Nombre: _____

RUT: _____ N lista: _____

Control 01 – Pauta

Duración total: 70 minutos

Reglas generales:

1. Escriba su nombre, RUT, y sección, de manera clara y legible.
2. Las mochilas se deben dejar en el área designada para ello.
3. Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
4. No se podrá abandonar la sala hasta el término de la evaluación. Si necesita ir al baño se registrará su salida/entrada.
5. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
6. **No se aceptan preguntas de ningún tipo**. Si cree que hay algún error, déjelo claramente explicado al final de la prueba.
7. Todo acto contrario a la honestidad académica realizado durante el desarrollo de esta evaluación, será sancionado con la suspensión inmediata de la actividad y con la reprobación de ésta. Se considerarán infracciones a la honestidad académica las siguientes:
   - Cometer fraude en la evaluación.
   - Adulterar el acta de asistencia.
   - Adulterar en forma posterior al término de la evaluación la hoja de respuestas.
   - Cualquier acto u omisión que sea calificado como infracción académica.
   - Cualquier acto u omisión que vaya en contra del *código de honor* `http://www.uc.cl/codigodehonor`

Nota El control 01 consideraba 3 formas diferentes. La presente pauta de solución contiene la solución de todos los problemas utilizados.

Problema 1 [3.0 puntos]

Un cañón ubicado en un plano inclinado dispara su bala con ángulo α sobre la horizontal y rapidez inicial v_0 hacia arriba del plano, como muestra la Figura 1. El cañón debe acertar a un objetivo que se encuentra a distancia b medida por el plano inclinado. Determine la rapidez inicial v_0 con que debe salir la bala para acertar en el blanco. Exprese su resultado en términos de α, b, y aceleración de gravedad g.

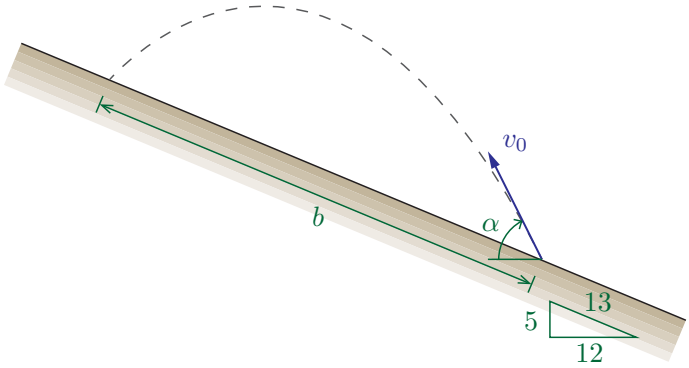


Figura 1: Cañón en plano inclinado.

Solución

Definiendo los los cosenos y senos del ángulo que genera el plano inclinado:

$$\cos(\theta) = \frac{12}{13} \qquad \sin(\theta) = \frac{5}{13}$$

La trayectoria de la bala disparada por el cañón es:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}_0\, t + \frac{1}{2}\,\mathbf{a}\, t^2$$

Si se fija el origen del sistema de coordenadas (datum) sobre el cañón y se tiene que la velocidad inicial y aceleración son:

$$\mathbf{v}_0 = v_0 \begin{Bmatrix} -\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix}$$

, por lo tanto se obtiene:

$$\mathbf{u}(t) = v_0 \begin{Bmatrix} -\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{Bmatrix} t + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} t^2$$

Se sabe que para un tiempo $t^\star$, la posición de la bala intersecta la recta definida por el plano inclinado. Es decir:

$$\mathbf{u}(t^\star) = b \begin{Bmatrix} -\cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{Bmatrix}$$

$$v_0 \begin{Bmatrix} -\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{Bmatrix} t^\star + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} (t^\star)^2 = \frac{b}{13} \begin{Bmatrix} -12 \\ 5 \end{Bmatrix} \tag{1}$$

Tomando la ecuación en dirección x de la ecuación (1) es posible obtener el tiempo $t^\star$:

$$-v_0\, \cos(\alpha)\, t^\star = -\frac{12}{13}\, b$$

$$t^\star = \frac{12}{13}\, \frac{b}{v_0\, \cos(\alpha)}$$

Reemplazando $t^\star$ en la ecuación en dirección y de (1), se obtiene:

$$v_0 \, \sin(\alpha) \left[\frac{12}{13} \, \frac{b}{v_0 \, \cos(\alpha)}\right] - \left(\frac{1}{2} \, g\right) \left[\frac{12}{13} \, \frac{b}{v_0 \, \cos(\alpha)}\right]^2 = \frac{5}{13} \, b$$

$$\frac{12}{13} \, b \, \tan(\alpha) - \left(\frac{g}{2}\right) \left(\frac{12}{13}\right)^2 \left[\frac{b^2}{v_0^2 \, \cos^2(\alpha)}\right] = \frac{5}{13} \, b$$

$$- \left(\frac{g}{2}\right) \left(\frac{12}{13}\right)^2 \left[\frac{b^2}{v_0^2 \, \cos^2(\alpha)}\right] = \left(\frac{b}{13}\right) [5 - 12 \, \tan(\alpha)]$$

Despejando v_0, se obtiene:

$$v_0^2 = \left[\frac{b}{\cos(\alpha)}\right]^2 \left(\frac{g}{2}\right) \left(\frac{12}{13}\right)^2 \left(\frac{13}{b}\right) \left[\frac{1}{12 \, \tan(\alpha) - 5}\right]$$

$$v_0 = \frac{12 \, b}{13 \, \cos(\alpha)} \sqrt{\frac{13 \, g}{24 \, b \, \tan(\alpha) - 10 \, b}}$$

, donde sólo consideramos la solución positiva ya que es la única que tiene sentido físico.

Problema 2 [3.0 puntos]

Una partícula tiene una aceleración descrita por la siguiente expresión:

$$a(t) = \frac{1}{4\sqrt{t}}$$

, donde el tiempo está en segundos y las distancias en metros. Adicionalmente, se sabe que la velocidad en dos instantes es:

$$v(0) = \frac{1}{2}\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}} \qquad\qquad v(1) = 1\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$$

Determine el desplazamiento Δu entre los instantes $t = 0 \to 1\,\mathrm{s}$.

Solución

Integrando la aceleración se obtiene la velocidad:

$$\int \mathrm{d}v = \int \frac{1}{4\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$
$$v(t) = \frac{\sqrt{t}}{2} + C$$

, utilizando cualquiera de las condiciones iniciales se puede obtener el valor de la constante C:

$$v(0) = \frac{\sqrt{0}}{2} + C_1 = \frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad C_1 = \frac{1}{2}$$

por lo tanto, la velocidad de la partícula es:

$$v(t) = \frac{\sqrt{t}}{2} + \frac{1}{2}$$

El desplazamiento entre $t = 0$ y $t = 1$ es el siguiente:

$$\int_{u(0)}^{u(1)\,\mathrm{d}u} = \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{t}}{2} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t$$
$$u(1) - u(0) = \left.\frac{t^{3/2}}{3} + \frac{t}{2}\right|_0^1$$
$$\Delta u = \frac{5}{6}$$

Alternativamente, se podría haber resuelto utilizando el método de integrales indefinidas ya que la constante de integración se elimina:

$$\int 1\,\mathrm{d}u = \int \left(\frac{\sqrt{t}}{2} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t$$
$$u(t) = \frac{t^{3/2}}{3} + \frac{t}{2} + C_2$$

El desplazamiento entre $t = 0$ y $t = 1$ es el siguiente:

$$\Delta u = u(1) - u(0) = \left[\frac{1^{3/2}}{3} + \frac{1}{2} + C_2\right] - \left[\frac{0^{3/2}}{3} + \frac{0}{2} + C_2\right] = \frac{5}{6}$$

Problema 3 [3.0 puntos]

Un cañón se encuentra en la cima de un acantilado de altura h. El cañón dispara su bala con ángulo α sobre la horizontal y rapidez inicial v_0, como muestra la Figura 2. Determine la distancia b donde impacta la bala de cañón medida horizontalmente desde el pie del acantilado. Exprese su resultado en términos de h, α, v_0, y aceleración de gravedad g.

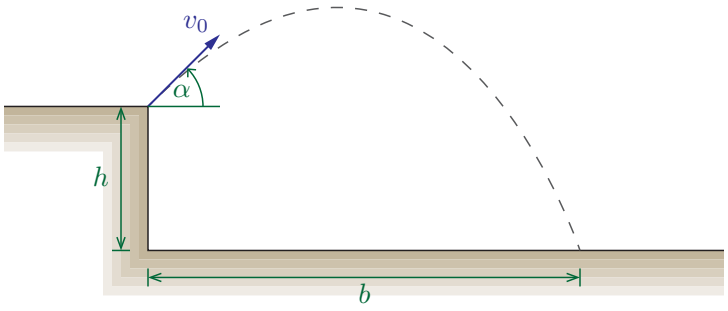


Figura 2: Cañón disparando en la cima de un acantilado.

Solución

La posición de la bala en todo instante de tiempo es:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}_0\, t + \frac{1}{2}\,\mathbf{a}\, t^2$$

Tomando como origen del sistema coordenado (datum) la base del acantilado, se tiene:

$$\mathbf{u}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ h \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{v}_0 = v_0 \begin{Bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix}$$

Reemplazando en $\mathbf{u}(t)$ se obtiene:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ h \end{Bmatrix} + v_0 \begin{Bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{Bmatrix} t + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} t^2$$

Se sabe que en un instante de tiempo $t^\star$ la posición de la partícula tendrá $u_y = 0$ y se encontrará a una distancia $u_x = b$ de la base del acantilado. Es decir:

$$\mathbf{u}(t^\star) = \begin{Bmatrix} b \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ h \end{Bmatrix} + v_0 \begin{Bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{Bmatrix} t^\star + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} (t^\star)^2 = \begin{Bmatrix} b \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{1}$$

De la ecuación en dirección x de (1) se obtiene el tiempo $t^\star$:

$$v_0\, \cos(\alpha)\, t^\star = b$$

$$t^\star = \frac{b}{v_0\, \cos(\alpha)}$$

Reemplazando $t^\star$ en la ecuación en dirección y de (1) se obtiene la distancia b:

$$h + v_0\, \sin(\alpha) \left[\frac{b}{v_0\, \cos(\alpha)}\right] - \left(\frac{g}{2}\right) \left[\frac{b}{v_0\, \cos(\alpha)}\right]^2 = 0$$

$$h + \tan(\alpha)\, b - \frac{g}{2\, v_0^2\, \cos^2(\alpha)}\, b^2 = 0$$

Se tiene una ecuación cuadrática para b, cuya solución es:

$$b = \frac{1}{(2)\left[-\frac{g}{2\,v_0^2\,\cos^2(\alpha)}\right]}\left[-\tan(\alpha) \pm \sqrt{\tan^2(\alpha) - (4)(h)\left[-\frac{g}{2\,v_0^2\,\cos^2(\alpha)}\right]}\right]$$
$$= \left[\frac{v_0^2\,\cos^2(\alpha)}{g}\right]\left[\tan(\alpha) \mp \sqrt{\tan^2(\alpha) + \frac{2\,g\,h}{v_0^2\,\cos^2(\alpha)}}\right]$$

En este problema específico sólo la solución $b > 0$ tiene sentido físico. Por lo tanto, el valor de b es:

$$b = \left[\frac{v_0^2\,\cos^2(\alpha)}{g}\right]\left[\tan(\alpha) + \sqrt{\tan^2(\alpha) + \frac{2\,g\,h}{v_0^2\,\cos^2(\alpha)}}\right]$$

Es posible llegar a una versión más simplificada:

$$b = \frac{v_0^2\,\cos(\alpha)}{g}\left[\sin(\alpha) + \sqrt{\sin^2(\alpha) + \frac{2\,g\,h}{v_0^2}}\right]$$

Problema 4 [3.0 puntos]

Una partícula tiene una aceleración descrita por la siguiente expresión:

$$a(t) = 2\,t\,\sqrt{v}$$

, donde el tiempo está en segundos y las distancias en metros. Adicionalmente, se sabe que en el instante inicial la partícula tiene velocidad y posición:

$$v(0) = 1\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}} \qquad\qquad u(0) = -3\ \mathrm{m}$$

Encuentre la expresión de la posición $u(t)$.

Solución

De la definición de aceleración se tiene:

$$\dot{v} = 2\,t\,\sqrt{v}$$
$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{v}}\right) \mathrm{d}v = \int (2\,t)\,\mathrm{d}t$$
$$2\,\sqrt{v} = t^2 + C_1 \quad \longrightarrow \quad v(t) = \left(\frac{t^2}{2} + C_1\right)^2$$

Utilizando la condición de velocidad inicial se obtiene:

$$v(0) = \left(\frac{0^2}{2} + C_1\right)^2 = 1 \quad \longrightarrow \quad C_1 = \pm 1$$

, por lo tanto,

$$v(t) = \left(\frac{t^2}{2} \pm 1\right)^2$$

Curiosidad: En este caso específico se obtienen dos soluciones debido a una *bifurcación*. No obstante, una de ellas no satisface la ecuación diferencial original.

$$\dot{v} = 2\,t\,\sqrt{v}$$
$$2\,t\left(\frac{t^2}{2} \pm 1\right) = 2\,t\,\sqrt{\left(\frac{t^2}{2} \pm 1\right)^2}$$
$$2\,t\left(\frac{t^2}{2} \pm 1\right) = 2\,t\,\left|\frac{t^2}{2} \pm 1\right|$$

Notar que la solución con signo negativo no cumple la EDO para $t < \sqrt{2}$, mientras que la solución con signo positivo es siempre válida.

Ahora, integrando la velocidad se obtiene la posición de la partícula,

$$\int (1)\,\mathrm{d}u = \int \left(\frac{t^2}{2} + 1\right)^2 \mathrm{d}t$$
$$u(t) = \frac{t^5}{20} + \frac{t^3}{3} + C_2$$

Utilizando la condición de posición inicial se obtiene:

$$u(0) = \frac{0^5}{20} + \frac{0^3}{3} + 0 + C_2 = -3 \quad \longrightarrow \quad C_2 = -3$$

, por lo tanto, la expresión de posición de la partícula es:

$$u(t) = \frac{t^5}{20} + \frac{t^3}{3} + t - 3$$

Problema 5 [3.0 puntos]

Un cañón debe entregar un paquete a una persona que se encuentra en la cima de un acantilado de altura h. El cañón dispara su bala con ángulo α sobre la horizontal y rapidez inicial v_0, como muestra la Figura 3. Determine la distancia b medida horizontalmente desde el pie del acantilado donde se debe ubicar el cañón para acertar a la cima del acantilado. Exprese su resultado en términos de h, v_0, y aceleración de gravedad g.

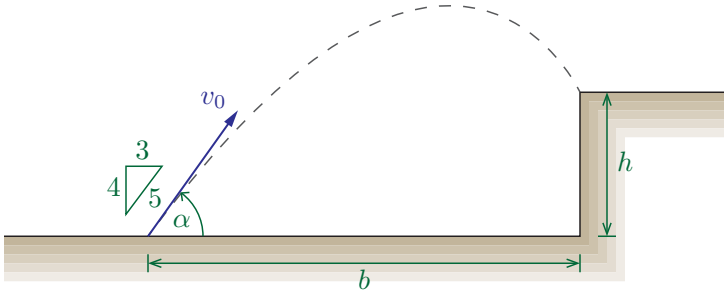


Figura 3: Cañón disparando hacia la cima de un acantilado.

Solución

La ecuación de posición de la partícula es:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}_0\, t + \frac{1}{2}\,\mathbf{a}\, t^2$$

Tomando como origen del sistema coordenado (datum) el cañón, se tiene:

$$\mathbf{u}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{v}_0 = v_0 \begin{Bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix}$$

reemplazando en la ecuación de posición se obtiene:

$$\mathbf{u}(t) = v_0 \begin{Bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{Bmatrix} t + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} t^2$$

En cierto instante $t^\star$, la bala se encontrará en la cima del acantilado. Es decir, en una posición:

$$\mathbf{u}(t^\star) = \begin{Bmatrix} b \\ h \end{Bmatrix}$$

$$v_0 \begin{Bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{Bmatrix} t^\star + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} (t^\star)^2 = \begin{Bmatrix} b \\ h \end{Bmatrix} \tag{1}$$

De la ecuación en dirección x de (1) se obtiene el tiempo $t^\star$:

$$v_0\, \cos(\alpha)\, t^\star = b$$

$$t^\star = \frac{b}{v_0\, \cos(\alpha)}$$

Reemplazando $t^\star$ en la ecuación en dirección y de (1) se obtiene la distancia b pedida:

$$v_0\, \sin(\alpha) \left[\frac{b}{v_0\, \cos(\alpha)}\right] - \left(\frac{g}{2}\right) \left[\frac{b}{v_0\, \cos(\alpha)}\right]^2 = h$$

$$\left[\frac{g}{2\, v_0^2\, \cos^2(\alpha)}\right] b^2 - b\, \tan(\alpha) + h = 0$$

Esta es una ecuación cuadrática en función de b, por lo que su solución es:

$$\begin{aligned} b &= \left[\frac{v_0^2\,\cos^2(\alpha)}{g}\right]\left[\tan(\alpha) \pm \sqrt{\tan^2(\alpha) - (4)\left[\frac{g}{2\,v_0^2\,\cos^2(\alpha)}\right](h)}\right] \\ &= \left[\frac{v_0\,\cos(\alpha)}{g}\right]\left[v_0\,\sin(\alpha) \pm \sqrt{v_0^2\,\sin^2(\alpha) - 2\,g\,h}\right] \end{aligned}$$

Notar que ambas soluciones son positivas y tienen sentido físico: el menor valor de b significa que el paquete acierta a la persona mientras sube; mientras que el mayor valor de b acierta cuando ya superó un punto de máxima altura y comienza a descender.

Curiosidad: El determinante de la raíz debe ser positivo. Es decir, se requiere que:

$$v_0^2\,\sin^2(\alpha) - 2\,g\,h > 0$$

para que la solución obtenida sea válida. En el caso contrario, el cañón no dispara con la velocidad suficiente para alcanzar la altura h del acantilado.

Reemplazando los valores $\cos(\alpha) = 3/5$ y $\sin(\alpha) = 4/5$, se tiene que:

$$b = \left(\frac{3\,v_0}{25\,g}\right)\left(4\,v_0 \pm \sqrt{16\,v_0^2 - 50\,g\,h}\right)$$

Es decir, el cañón puede ubicarse a distancias b_1 o b_2 iguales a:

$$b_1 = \left(\frac{3\,v_0}{25\,g}\right)\left(4\,v_0 + \sqrt{16\,v_0^2 - 50\,g\,h}\right) \quad \longleftarrow \quad \text{el paquete llega de caída}$$

$$b_2 = \left(\frac{3\,v_0}{25\,g}\right)\left(4\,v_0 - \sqrt{16\,v_0^2 - 50\,g\,h}\right) \quad \longleftarrow \quad \text{el paquete llega de subida}$$

Problema 6 [3.0 puntos]

Una partícula tiene una aceleración descrita por la siguiente expresión:

$$a(t) = -\frac{v^2}{t}$$

, donde el tiempo está en segundos y las distancias en metros. Adicionalmente, se sabe que la velocidad de la partícula en dos instantes es:

$$v(1) = \frac{1}{2}\ {}^{\mathrm{m}}\!/_{\mathrm{s}} \qquad\qquad v\left(e^2\right) = \frac{1}{4}\ {}^{\mathrm{m}}\!/_{\mathrm{s}}$$

Determine una expresión para $v(t)$.

Solución

De la definición de aceleración se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= a(t) \\ \int \left(\frac{-1}{v^2}\right) \mathrm{d}v &= \int \left(\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t \\ \frac{1}{v} &= \ln(t) + C_1 \\ v(t) &= \frac{1}{\ln(t) + C_1} \end{aligned}$$

Utilizando cualquiera de las dos condiciones de borde para la velocidad se puede despejar el valor de la constante C_1:

$$v\left(e^2\right) = \frac{1}{2\ln(e) + C_1} = \frac{1}{4} \quad \longrightarrow \quad C_1 = 2$$

, por lo tanto, la expresión de velocidad de la partícula para todo tiempo t es:

$$v(t) = \frac{1}{\ln(t) + 2}$$