PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2020

Taller 04

Leyes de Newton

Problema 1.
Se tiene una cuña de masa $m_1 = 50\ kg$ e inclinación $\alpha = 30°$, y sobre ella desliza una caja de masa $m_2 = 5\ kg$. La cuña se encuentra sujetada a un trípode mediante una cuerda ideal (sin masa), de tal manera que la cuña no puede moverse.

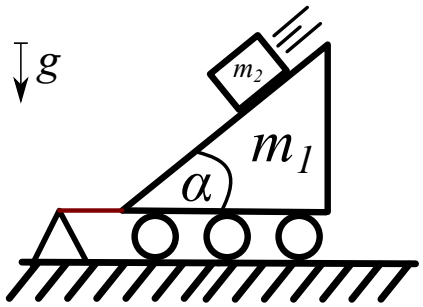


Figura 1: Cuña con Caja y Cuerda

Considere que entre la caja y la cuña se tiene un coeficiente de roce de cinético de μ_k, mientras que entre la cuña y el piso no existe roce. Considerando que $g = 9{,}81\ m/s^2$ determine:

a. La aceleración de la caja, dirección y magnitud, si $\mu_k = 0{,}2$.

b. La tensión en la cuerda, si $\mu_k = 0{,}2$.

c. La fuerza normal que ejerce el suelo sobre la cuña, si $\mu_k = 0{,}2$.

Solución
Haciendo un diagrama de cuerpo libre de cada cuerpo y ocupando ejes locales que sean convenientes se tiene que:

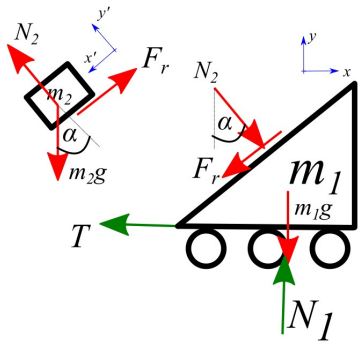


Figura 2: DCL

Con esto es posible plantear las ecuaciones de la Segunda Ley de Newton en los ejes correspondientes:

- Cuña:

$$\begin{array}{c}\sum F_x = m_1\ddot{x} \\ \sum F_y = m_1\ddot{y}\end{array} \longrightarrow \begin{array}{c}N_2\sin\alpha - T - F_r\cos\alpha = m_1\ddot{x} \\ N_1 - N_2\cos\alpha - m_1 g - F_r\sin\alpha = m_1\ddot{y}\end{array}$$

- Bloque:

$$\begin{array}{c}\sum F_x = m_2\ddot{x}' \\ \sum F_y = m_2\ddot{y}'\end{array} \longrightarrow \begin{array}{c}m_2 g\sin\alpha - F_r = m_2\ddot{x}' \\ N_2 - m_2 g\cos\alpha = m_2\ddot{y}'\end{array}$$

Debido a los sistemas de referencia elegidos se tiene $\ddot{y} = \ddot{y}' = 0$. Además $\ddot{x} = 0$, por lo tanto:

$$\begin{cases} N_2\sin\alpha - T - F_r\cos\alpha = 0 \\ N_1 - N_2\cos\alpha - m_1 g - F_r\sin\alpha = 0 \\ m_2 g\sin\alpha - F_r = m_2\ddot{x}' \\ N_2 - m_2 g\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

Además, se sabe que

$$F_r = N_2\mu_k$$

Luego se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} N_2\sin\alpha - T - N_2\mu_k\cos\alpha = 0 \\ N_1 - N_2\cos\alpha - m_1 g - N_2\mu_k\sin\alpha = 0 \\ m_2 g\sin\alpha - N_2\mu_k = m_2\ddot{x}' \\ N_2 - m_2 g\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

De la cuarta ecuación:

$$N_2 = m_2 g\cos\alpha$$

Reemplazando en la tercera se tiene:

$$m_2 g\sin\alpha - m_2 g\cos\alpha\mu_k = m_2\ddot{x}'$$

Luego:

$$\ddot{x}' = g\sin\alpha - g\cos\alpha\mu_k = 3{,}2\ m/s^2$$

Entonces, la aceleración de la caja es:

$$a = \sqrt{\ddot{x}'^2 + \ddot{y}'^2} = \sqrt{3{,}2^2 + 0^2} = 3{,}2\ m/s^2$$

Y su dirección es la misma que el vector director de $\ddot{x}'$, es decir:

$$[-\cos\alpha\ \ -\sin\alpha]^T = [-0{,}866\ \ -0{,}5]^T$$

Para encontrar la tensión en la cuerda basta con tomar la primera ecuación y despejar:

$$T = N_2\sin\alpha - N_2\mu_k\cos\alpha = m_2 g\cos\alpha\sin\alpha - m_2 g\cos^2\alpha\mu_k = 13{,}88\ N$$

Finalmente para la normal que ejerce el piso sobre la cuña se utiliza la ecuación dos:

$$N_1 = m_2 g\cos^2\alpha + m_1 g + m_2 g\cos\alpha\mu_k\sin\alpha = 531{,}5\ N$$

Suponga ahora que se tiene la misma situación, pero el coeficiente de roce ha aumentado al doble, es decir, $\mu_k = 0{,}4$. Con esto, la normal N_2 se mantiene, entonces para la aceleración de la caja:

$$\ddot{x}' = g\sin\alpha - g\cos\alpha\mu_k = 1{,}51\ m/s^2$$

Entonces, la aceleración de la caja es de $a = 1{,}51\ m/s^2$, y su dirección sigue siendo la misma. Luego, la tensión en la cuerda es:

$$T = N_2\sin\alpha - N_2\mu_k\cos\alpha = m_2 g\cos\alpha\sin\alpha - m_2 g\cos^2\alpha\mu_k = 6{,}52\ N$$

Y la fuerza normal entre el piso y la cuña:

$$N_1 = m_2 g \cos^2 \alpha + m_1 g + m_2 g \cos \alpha \mu_k \sin \alpha = 535{,}78 \ N$$

Problema 2.
Ahora se tiene la misma cuña y la misma caja, pero sin la cuerda.

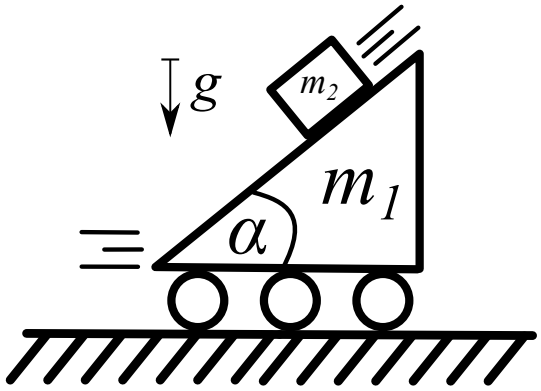


Figura 3: Cuña con Caja

Determine:

a. La aceleración de la caja y la cuña, dirección y magnitud, si $\mu_k = 0$

b. La fuerza normal que ejerce el suelo sobre la cuña, si $\mu_k = 0$.

c. La aceleración de la caja y la cuña, dirección y magnitud, si $\mu_k = 0{,}3$

d. La fuerza normal que ejerce el suelo sobre la cuña, si $\mu_k = 0{,}3$.

Solución
Haciendo el diagrama de cuerpo libre de este caso se tiene:

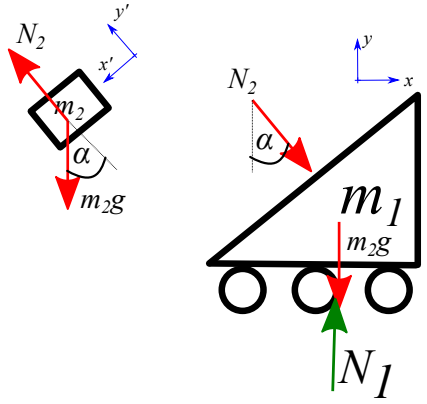


Figura 4: DCL

Escribimos entonces las ecuaciones de la Segunda Ley de Newton:

- Cuña:

$$\begin{matrix} \sum F_x = m_1 \ddot{x} \\ \sum F_y = m_1 \ddot{y} \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} N_2 \sin \alpha = m_1 \ddot{x} \\ N_1 - N_2 \cos \alpha - m_1 g = m_1 \ddot{y} \end{matrix}$$

- Bloque:

$$\begin{array}{c} \sum F_x = m_2\ddot{x}' \\ \sum F_y = m_2\ddot{y}' \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} m_2 g \sin\alpha = m_2\ddot{x}' \\ N_2 - m_2 g\cos\alpha = m_2\ddot{y}' \end{array}$$

En este caso la cuña si puede moverse en el eje horizontal. Entonces, el sistema de ecuaciones a resolver es:

$$\begin{cases} N_2 \sin\alpha = m_1\ddot{x} \\ N_1 - N_2\cos\alpha - m_1 g = 0 \\ m_2 g\sin\alpha = m_2\ddot{x}' \\ N_2 - m_2 g\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

Nuevamente se obtiene que $N_2 = m_2 g\cos\alpha$, luego:

$$\ddot{x} = \frac{m_2}{m_1} g\sin\alpha\cos\alpha = 0{,}42\ m/s^2$$

Entonces, la aceleración de la cuña es de

$$a_{cuña} = 0{,}42\ m/s^2$$

Y su dirección es paralela al eje x, es decir

$$[1\ 0]^T$$

Por otra parte, la aceleración de la caja viene de:

$$\ddot{x}' = g\sin\alpha = 4{,}9\ m/s^2$$

Entonces, la aceleración de la caja es:

$$a_{caja} = 4{,}9\ m/s^2$$

Y su dirección es la misma que en el caso anterior, es decir

$$[-0{,}866\ \ -0{,}5]^T$$

Finalmente, tomando la segunda ecuación del sistema se tiene que:

$$N_1 = N_2\cos\alpha + m_1 g = m_2 g\cos^2\alpha + m_1 g = 527{,}29\ N$$

Repitiendo el proceso para $\mu_k = 0{,}3$:

$$\begin{cases} N_2\sin\alpha - F_r\cos\alpha = m_1\ddot{x} \\ N_1 - N_2\cos\alpha - m_1 g - F_r\sin\alpha = 0 \\ m_2 g\sin\alpha - F_r = m_2\ddot{x}' \\ N_2 - m_2 g\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

Recordamos que

$$F_r = N_2\mu_k$$

Por tanto la aceleración de la cuña será:

$$m_1\ddot{x} = m_2 g\cos\alpha\sin\alpha - m_2 g\mu_k\cos^2\alpha$$

$$\ddot{x} = \frac{m_2}{m_1}\left[g\cos\alpha\sin\alpha - g\mu_k\cos^2\alpha\right] = 0{,}2\ m/s^2$$

Y va en la misma dirección anterior, paralela al eje x. Ahora, para la aceleración de la caja:

$$\ddot{x}' = g\sin\alpha - g\cos\alpha\mu_k = 2{,}36\ m/s^2$$

Finalmente, para la normal que ejerce el suelo sobre la cuña:

$$N_1 = N_2\cos\alpha + m_1 g + F_r\sin\alpha = m_2 g\cos^2\alpha + m_1 g + m_2 g\mu_k\cos\alpha\sin\alpha = 533{,}66\ N$$