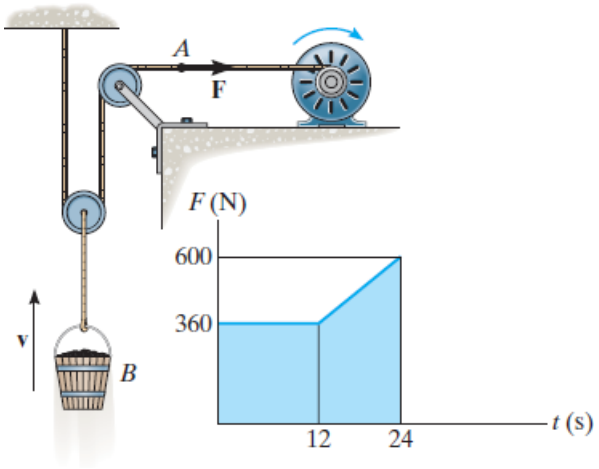
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1513 — Dinámica
Segundo Semestre 2018

Taller 10

Impulso & Momentum II

Problema 1

Un motor tira una cuerda con fuerza F mostrada en la figura si el balde pesa 70 kg determine:

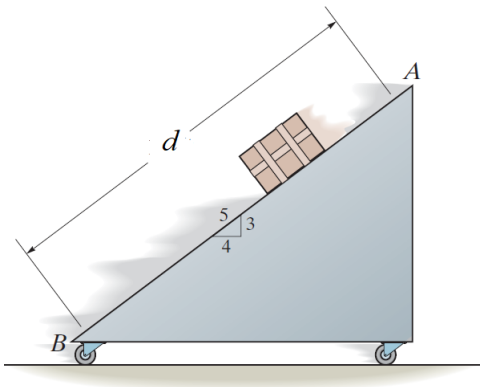


a) Si su velocidad inicial es $3\,m/s$: ¿Cuál es su velocidad en $t = 18\,s$?

b) Si parte del reposo en $t = 0\,s$: ¿Cuál es la potencia en $t = 24$ del motor?

Problema 2

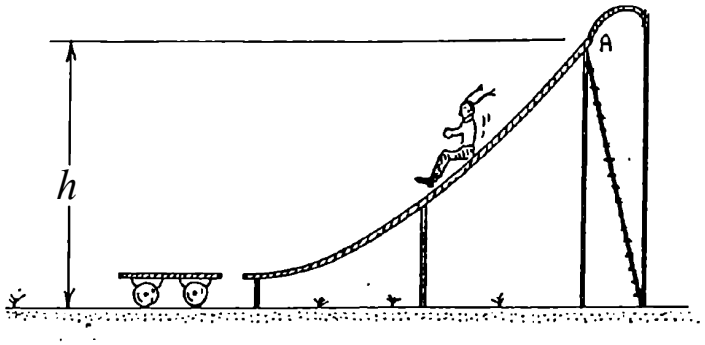
La rampa pesa $M\,kg$ y la caja pesa $m\,kg$. Si la caja parte desde el reposo: ¿Cuál es la velocidad de la rampa cuando la caja a recorrido $d = 15\,m$?



Problema 3

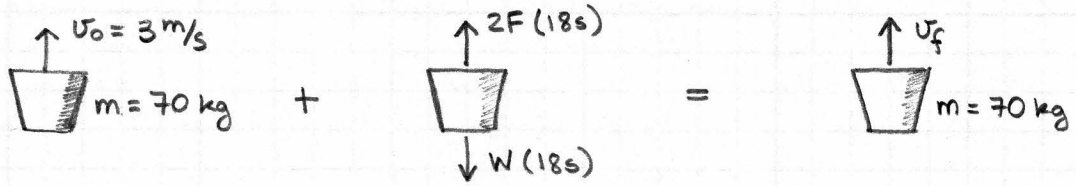
Susana de masa m se desliza por un resbalín hacia la superficie de un carro de masa M. Determine la velocidad que adquiere el carro cuando Susana cae sobre él. Desprecie el roce y suponga que Susana parte del reposo en A a una altura h.

Bonus: ¿Se pierde energía cuando Susana se sube al carro? ¿Qué valor tiene dicha pérdida? ¿Qué tipo de energía es esta?



Problema 1

Haciendo un diagrama de impulso-momentum:



Usando el principio de impulso-momentum en el eje "z":

$$m \cdot v_0 + 2\int_0^{18} F \cdot dt - \int_0^{18} W \cdot dt = m \cdot v_f$$

La integral de F(t) la calcularemos gráficamente:

$$\int_0^{18} F\,dt = \int_0^{12} F \cdot dt + \int_{12}^{18} F\,dt = \underset{12}{\square}\,360 + \left(\underset{6}{\square}\,360 + \underset{6}{\triangle}\,120 \right) = 6840\ N \cdot s$$

, y reemplazando en la ecuación de impulso-momentum:

$$(70)(3) + (2)(6840) - (70 \cdot g)(18) = (70)(v_f)$$

$$v_f = \frac{1389}{7} - 18 \cdot g = 21.85\ m/s$$

En la segunda situación $v_0 = 0$ y hay que integrar hasta 24s:

$$\int_0^{24} F \cdot dt = \int_0^{12} F \cdot dt + \int_{12}^{24} F \cdot dt = \underset{12}{\square}\,360 + \left(\underset{12}{\square}\,360 + \underset{12}{\triangle}\,240 \right) = 10080\ N \cdot s$$

, y reemplazando en la ecuación de impulso-momentum:

$$\underset{0}{\cancel{(70)(0)}} + (2)(10080) - (70 \cdot g)(24) = (70)(v_f)$$

$$v_f = 288 - 24 \cdot g = 52.56\ m/s$$

¡MUY RÁPIDO!

Debido a la ligadura:

$$\dot{x}_m = 2\,\dot{z}_B$$

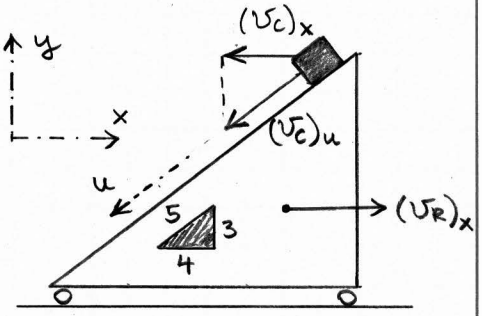
$$\dot{x}_m = 105.12\ m/s$$

La potencia en $t = 24s$ es: $P(t=24) = \dot{x}_m(t=24) \cdot F(t=24)$

$$P = (105.12)(600) = 63072\ N \cdot m/s$$
$$63072\ J/s$$
$$63072\ W$$
$$\sim 63.1\ kW$$

- **Problema 2**

En este tipo de problemas, la dificultad radica en que ambos cuerpos (trabajados como partículas) se mueven: no hay un sistema de referencia obvio.
En la solución de estos problemas, se suelen utilizar 2 conceptos:
a) Una ecuación de conservación de momentum: resulta en una relación similar a una ligadura.
b) Una ecuación de velocidad en términos de movimiento relativo: usar uno de los dos objetos como sistema de referencia.



Aplicando conservación de momentum en el eje "x":

$$m(0) + M(0) = -m\cdot(v_c)_x + M\cdot(v_R)_x$$

$$\left(\frac{m}{M}\right)(v_c)_x = (v_R)_x \qquad (*)$$

* Notar que es similar a una ligadura.

Para un observador en la rampa, la caja desliza con velocidad $v_{c/R}$. Usando las ecuaciones de movimiento relativo en "x" e "y":

$$-(v_c)_x = (v_R)_x + (v_{c/R})_x$$
$$-(v_c)_x = (v_R)_x + (-4/5)(v_{c/R})_u$$

$$-(v_c)_y = (v_R)_y + (v_{c/R})_y \qquad \text{pero } (v_R)_y = 0$$
$$-(v_c)_y = (-3/5)(v_{c/R})_u$$

Podemos usar ambas ecuaciones para eliminar $(v_{c/R})_u$:

$$-3(v_c)_x + 4(v_c)_y = 3(v_R)_x$$

, reemplazando (v_R) con ayuda de la ecuación (*):

$$4(v_c)_y = (3)\left(\frac{m}{M}\right)(v_c)_x + (3)(v_c)_x$$

$$(v_c)_y = \left(\frac{3}{4}\right)\left[\frac{m}{M} + 1\right](v_c)_x \qquad (**)$$

Ahora estamos en condiciones de aplicar conservación de energía, y con ayuda de (*) y (**) resolver para $(v_c)_x$:

$$mg\left(\frac{3}{5}d\right) = \underbrace{\frac{1}{2}m(v_c)_x^2 + \frac{1}{2}m(v_c)_y^2}_{=\frac{1}{2}m(v_c)_u^2} + \frac{1}{2}M(v_R)_x^2$$

(altura inicial de la caja)

$$9mg = \frac{1}{2}m(v_c)_x^2 + \frac{9}{32}m\left[\frac{m}{M}+1\right]^2(v_c)_x^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{m^2}{M^2}\right)(v_c)_x^2$$

$$(v_c)_x^2 = \frac{288 \cdot g}{\left(1+\frac{m}{M}\right)\left(25+9\frac{m}{M}\right)}$$

La velocidad de la rampa se obtiene con (*):

$$(v_R)_x^2 = \frac{m^2}{M^2}(v_c)_x^2 = \frac{288 \cdot m^2 g}{(M+m)(25M+9m)}$$

$$(v_R)_x = \sqrt{\frac{288 \cdot m^2 \cdot g}{(M+m)(25M+9m)}}$$

- Problema 3

Usando conservación de energía podemos determinar la velocidad de la niña el instante previo a caer sobre el carro.

$$V_1 + T_1 = V_2 + T_2$$

$$mgh = \frac{1}{2} m v_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

En el "choque" de la niña con el carro se conserva el momentum ya que no hay fuerzas externas sobre el sistema. Después del "choque", la niña y el carro se mueven juntos (choque de tipo plástico, i.e. "e=0"):

$$m \cdot v_2 = (m+M) \cdot v_f$$

$$v_f = \frac{m}{m+M}\sqrt{2gh}$$

Se pierde energía: $E_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 = mgh$

$$E_f = \frac{1}{2}(m+M) v_f^2 = \frac{1}{2}(m+M)\frac{m^2}{(m+M)^2}(2gh)$$

$$E_f = \left(\frac{m}{m+M}\right)(mgh)$$

Vemos que la energía después del choque es: $E_f = \frac{m}{m+M} \cdot E_2$

La pérdida es: $\Delta E = E_2 - E_f = \left(1 - \frac{m}{m+M}\right) E_2 = \frac{M}{m+M} E_2$

$$\Delta E = \left(\frac{M}{m+M}\right)(mgh)$$

La energía se pierde por roce, calor, sonido, deformaciones permanentes, amortiguamiento de los materiales, etc.