PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2023

Interrogación 01

Duración total: 120 minutos

Reglas generales:

1. Escriba su nombre, RUT, y sección, de manera clara y legible.
2. Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
3. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
4. **Sólo se aceptarán preguntas de enunciado**. Si la pregunta no es de enunciado o una aclaración de este, no se le dará respuesta alguna.
5. Debe **seleccionar una sola respuesta** en las preguntas de selección múltiple. Para ello debe rellenar completamente el círculo de la respuesta seleccionada (de lo contrario su respuesta se considerará inválida). Los cálculos y desarrollo de las preguntas de selección múltiple no se consideran.
6. En las preguntas de selección múltiple: **las respuestas incorrectas descuentan** 1/5 **de una respuesta correcta**.
7. Al finalizar la interrogación, entregue únicamente la hoja de respuestas (no entregue este cuadernillo).
8. Todo acto contrario a la honestidad académica realizado durante el desarrollo de esta evaluación, será sancionado con la suspensión inmediata de la actividad y será calificado con la nota mínima. Se considerarán infracciones a la honestidad académica las siguientes:

   Cometer fraude en la evaluación

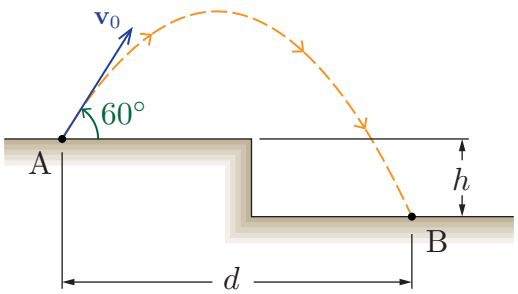
   Adulterar el acta de asistencia

   Adulterar en forma posterior al término de la evaluación la hoja de respuestas

   Cualquier acto u omisión que sea calificado como infracción académica

   Cualquier acto u omisión que vaya en contra del *código de honor* `http://www.uc.cl/codigodehonor`

Problema 1 [0.5 punto]



Un proyectil se dispara desde el punto A con un ángulo de 60° sobre la horizontal. Determine la rapidez inicial v_0 necesaria para que el proyectil caiga en el punto B.

a) $v_0 = d\sqrt{\dfrac{2\,g}{h+\sqrt{3}\,d}}$

b) $v_0 = d\sqrt{\dfrac{2\,g}{\sqrt{3}\,h+d}}$

c) $v_0 = h\sqrt{\dfrac{2\,g}{\sqrt{3}\,h+d}}$

d) $v_0 = d\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}\,g}{2\,h+d}}$

e) $v_0 = h\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}\,g}{2\,h+\sqrt{3}\,d}}$

Solución

Considerando el origen del sistema coordenado en el punto A, la posición del proyectil está dada por:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} t^2 + v_0 \begin{Bmatrix} \cos 60^\circ \\ \sin 60^\circ \end{Bmatrix} t$$

El punto B está en la trayectoria del proyectil, por lo que en determinado instante $t^\star$ se tiene:

$$\mathbf{u}(t^\star) = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} (t^\star)^2 + v_0 \begin{Bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{Bmatrix} t^\star = \begin{Bmatrix} d \\ -h \end{Bmatrix}$$

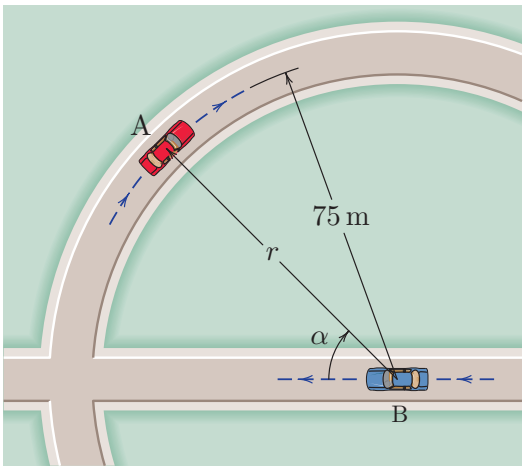
La ecuación para el eje horizontal permite despejar el tiempo $t^\star$:

$$t^\star = \frac{2\,d}{v_0}$$

Reemplazando este valor en la ecuación del eje vertical y despejando v_0 se obtiene:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\,g\left(\frac{2\,d}{v_0}\right)^2 + v_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{2\,d}{v_0}\right) &= -h \\ -\frac{2\,g\,d^2}{v_0^2} + \sqrt{3}\,d &= -h \\ v_0^2\left(h+\sqrt{3}\,d\right) &= 2\,g\,d^2 \\ v_0 &= d\sqrt{\frac{2\,g}{h+\sqrt{3}\,d}} \end{aligned}$$

Problema 2 [0.5 puntos]



El automóvil A se desplaza por una rotonda de radio $r = 75\,\text{m}$ con rapidez constante e igual a $15\,\text{m/s}$. En determinado instante, el automóvil B se encuentra en el centro de la rotonda y visualiza al automóvil A con ángulo $\alpha = 45°$ a su derecha. El automóvil B se mueve con rapidez $v = 20\,\text{m/s}$, pero se encuentra desacelerando debido a que se aproxima a un cruce con $\dot{v} = -2\,\text{m/s}^2$. Determine la aceleración del automóvil A para el conductor del automóvil B.

a) $\ddot{\mathbf{u}}_{A/B} = \left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2} - 2\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s}^2$

b) $\ddot{\mathbf{u}}_{A/B} = \left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2} - 2\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s}^2$

c) $\ddot{\mathbf{u}}_{A/B} = \left(-\dfrac{15\sqrt{2}}{2} - 2\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(-\dfrac{15\sqrt{2}}{2}\right)\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s}^2$

d) $\ddot{\mathbf{u}}_{A/B} = \left(-\dfrac{15\sqrt{2}}{2} - 2\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\dfrac{15\sqrt{2}}{2}\right)\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s}^2$

e) $\ddot{\mathbf{u}}_{A/B} = \left(\dfrac{15\sqrt{2}}{2} - 2\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(-\dfrac{15\sqrt{2}}{2}\right)\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s}^2$

Solución

El centro de la rotonda se usa como origen del sistema coordinado (polar y cartesiano). La velocidad angular del automóvil A se relaciona con su rapidez según $\dot{\omega} = {}^{v}/_{r} = {}^{15}/_{75} = {}^{1}/_{5}\ \text{rad/s}$, con $\ddot{\theta} = 0$ ya que su rapidez es constante. La aceleración del automóvil en coordenadas polares es:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}}_A &= \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &= \left[0 - (75)\left(\frac{1}{5}\right)^2\right]\hat{\mathbf{e}}_r + \left[(75)(0) + (2)(0)\left(\frac{1}{5}\right)\right]\hat{\mathbf{e}}_\theta = -3\,\hat{\mathbf{e}}_r\ \text{m/s}^2\end{aligned}$$

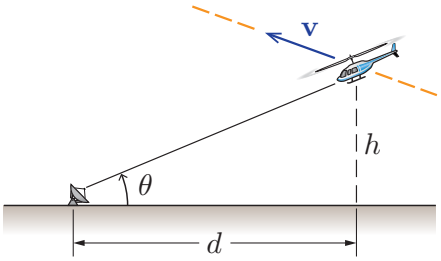
Para utilizar las ecuaciones de movimiento relativo, es necesario que los sistemas coordenados de ambos automóviles sean el mismo. Es más sencillo llevar el sistema polar al cartesiano, donde es necesario notar que $\theta = 180° - 45° = 135°$, y con ello:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}}_A &= (-3)\,\hat{\mathbf{e}}_r + (0)\,\hat{\mathbf{e}}_\theta = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\cos 135°\,\hat{\mathbf{i}} + \sin 135°\hat{\mathbf{j}}\right) + (0)\left(-\sin 135°\,\hat{\mathbf{i}} + \cos 135°\hat{\mathbf{j}}\right) \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2}\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\,\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s}^2\end{aligned}$$

Por otro lado, la aceleración del automóvil B es hacia la derecha (eje x positivo), i.e., $\ddot{\mathbf{u}}_B = 2\,\hat{\mathbf{i}}\ \text{m/s}^2$, y con ello se tiene que:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}}_{A/B} = \ddot{\mathbf{u}}_A - \ddot{\mathbf{u}}_B &= \frac{3\sqrt{2}}{2}\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\,\hat{\mathbf{j}} - \left[2\,\hat{\mathbf{i}}\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s}^2\right] \\ &= \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s}^2\end{aligned}$$

Problema 3 [0.5 puntos]



Un radar está siguiendo el vuelo de un helicóptero y registra los siguientes valores respecto a la distancia al radar:

$$r = 100\,\text{m} \qquad \dot{r} = -\frac{11}{2}\,\text{m/s} \qquad \ddot{r} = \frac{1}{16}\,\text{m/s}^2$$

Por otro lado, respecto al ángulo θ se sabe que:

$$\theta = 0{,}3948\,\text{rad} \qquad \dot{\theta} = \frac{1}{20}\,\text{rad/s} \qquad \ddot{\theta} = \frac{1}{32}\,\text{rad/s}^2$$

Además se sabe que para $\theta = 0{,}3948\,\text{rad}$ se tiene que:

$$\cos\theta = \frac{12}{13} \qquad \sin\theta = \frac{5}{13}$$

Determine la velocidad del helicóptero $\mathbf{v}$ en coordenadas cartesianas.

a) $\mathbf{v} = -7\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{5}{2}\,\hat{\mathbf{j}}$ m/s

b) $\mathbf{v} = -\frac{41}{13}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{175}{26}\,\hat{\mathbf{j}}$ m/s

c) $\mathbf{v} = -\frac{3}{2}\,\hat{\mathbf{i}} + 41\,\hat{\mathbf{j}}$ m/s

d) $\mathbf{v} = -\frac{5}{2}\,\hat{\mathbf{i}} + 5\,\hat{\mathbf{j}}$ m/s

e) $\mathbf{v} = -5\,\hat{\mathbf{i}} + 3\,\hat{\mathbf{j}}$ m/s

Solución

Con el radar como el origen del sistema coordenado, la velocidad del helicóptero en coordenadas polares es:

$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\,\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta = -\frac{11}{2}\,\hat{\mathbf{e}}_r + (100)\left(\frac{1}{20}\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta = -\frac{11}{2}\,\hat{\mathbf{e}}_r + 5\,\hat{\mathbf{e}}_\theta \ \text{m/s}$$

Reescribiendo los vectores base $\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ en términos de sus pares cartesianos $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = -\frac{11}{2}\,\hat{\mathbf{e}}_r + 5\,\hat{\mathbf{e}}_\theta &= \left(-\frac{11}{2}\right)\left(\frac{12}{13}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{5}{13}\,\hat{\mathbf{j}}\right) + (5)\left(-\frac{5}{13}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{12}{13}\,\hat{\mathbf{j}}\right) \\ &= \left(-\frac{66}{13} - \frac{25}{13}\right)\hat{\mathbf{i}} - \left(-\frac{55}{26} + \frac{120}{26}\right)\hat{\mathbf{j}} \ \text{m/s} \\ &= -7\,\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{5}{2}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta \ \text{m/s}\end{aligned}$$

Problema 4 [0.5 puntos]

Una partícula se mueve en un eje s con velocidad $v = 2 + 5\,t^{(3/2)}$, donde t está en segundos, y v en metros por segundo. La partícula se encuentra en $u = -51\,\mathrm{m}$ cuando $t = 1\,\mathrm{s}$. Determine la posición u en el instante $t = 4\,\mathrm{s}$.

a) $u(4) = 17\,\mathrm{m}$

b) $u(4) = 21\,\mathrm{m}$

c) $u(4) = 42\,\mathrm{m}$

d) $u(4) = -43\,\mathrm{m}$

e) $u(4) = 64\,\mathrm{m}$

Solución
Se tiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 2 + 5\,t^{(3/2)} \qquad\qquad u(1) = -51\,\mathrm{m}$$

Cuya solución es:

$$u(t) = 2\,t + 2\,t^{(5/2)} + C$$

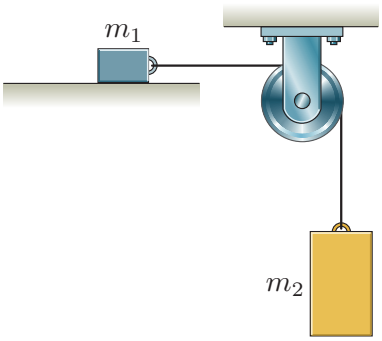
Utilizando la condición $u(1) = -51\,\mathrm{m}$ se determina que $C = -55\,\mathrm{m}$. Con ello, la ecuación de posición es:

$$u(t) = 2\,t + 2\,t^{(5/2)} - 55$$

Finalmente, en el instante $t = 4\,\mathrm{s}$, la partícula se encuentra en:

$$u(4) = (2)\,(4) + (2)\left(\sqrt{4}\right)^5 - 55 = 17\,\mathrm{m}$$

Problema 5 [0.5 puntos]



Los dos bloques de la figura se liberan del reposo en $t = 0$. El coeficiente de fricción cinética entre la superficie horizontal y el bloque de masa m_1 es μ_k. Asuma que el bloque desliza (se vence la fuerza de roce estático). Determine la tensión en la cuerda T.

a) $T = g\,(1+\mu)\left(\dfrac{m_1\,m_2}{m_1+m_2}\right)$

b) $T = g\,(1-\mu)\left(\dfrac{m_1\,m_2}{m_1-m_2}\right)$

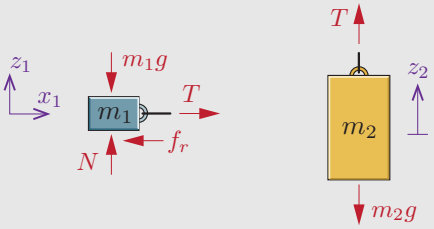
c) $T = g\,(1-\mu)\left(\dfrac{m_1\,m_2}{m_1+m_2}\right)$

d) $T = g\,(1-\mu)\left(\dfrac{m_1\,m_2}{m_2-m_1}\right)$

e) $T = g\,(1+\mu)\left(\dfrac{m_1\,m_2}{m_2-m_1}\right)$

Solución

La figura al costado muestra los DCL para cada bloque, donde la fuerza de roce se opone al movimiento. Usando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton en el sentido z_1 para el bloque m_1, se tiene que:



$$N - m_1 g = 0 \qquad \longrightarrow \qquad f_r = \mu_k\,N = m_k\,m_1 g$$

Luego, repitiendo lo mismo para los ejes x_1 y z_2, se tienen las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} \text{Bloque } m_1 \text{ en sentido } x_1: &\quad T - f_r = m_1\,\ddot{x}_1 \\ \text{Bloque } m_2 \text{ en sentido } z_2: &\quad T - m_2\,g = m_2\,\ddot{z}_2 \end{aligned}$$

Reemplazando la expresión de f_r, y notando que $\ddot{z}_2 = -\ddot{x}_1$, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

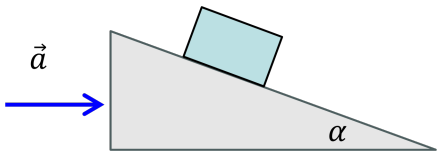
$$\left.\begin{aligned} T - \mu\,m_1\,g &= \;\; m_1\,\ddot{x}_1 \\ T - m_2\,g &= -m_2\,\ddot{x}_1 \end{aligned}\right\}$$

, cuya solución es:

$$T = g\,(1+\mu)\left(\frac{m_1\,m_2}{m_1+m_2}\right) \qquad\qquad \ddot{x}_1 = \left(\frac{m_2-\mu\,m_1}{m_1+m_2}\right) g$$

Nota: Notar que para que los bloques se muevan (vencer el roce), se debe cumplir que $m_2 > \mu_k\,m_1$. Esto queda confirmado con la aceleración obtenida (no era un dato pedido), ya que si hubiese sido negativa, la dirección de la fuerza de roce habría estado errada.

Problema 6 [0.5 puntos]



Un bloque de masa m se encuentra sobre un plano inclinado. El coeficiente de roce entre el bloque y la superficie es μ. El plano inclinado acelera hacia la derecha con aceleración **a**. Determine el módulo de la aceleración del plano inclinado para que el bloque esté a punto de deslizar hacia arriba. Considere que el módulo de la aceleración de gravedad es g.

a) $a = g\left[\dfrac{\mu\cos(\alpha)+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)-\mu\sin(\alpha)}\right]$

b) $a = g\left[\dfrac{\cos(\alpha)+\mu\sin(\alpha)}{\mu\cos(\alpha)-\sin(\alpha)}\right]$

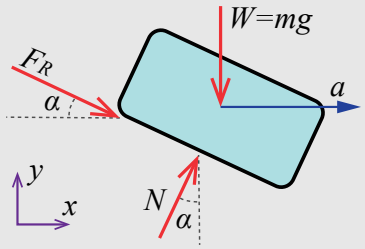
c) $a = g\left[\dfrac{\mu\cos(\alpha)-\mu\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)+\mu\sin(\alpha)}\right]$

d) $a = g\left[\mu\cos(\alpha)+\sin(\alpha)\right]$

e) $a = g\left[\mu\cos(\alpha)-\sin(\alpha)\right]$

Solución

Utilizando un sistema cartesiano en las direcciones x–y, se obtiene el diagrama de cuerpo libre que se muestra al costado para bloque. Mediante la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton se tiene:



$$\sum_i \mathbf{f}_i = m\,\mathbf{a}$$

$$N\begin{Bmatrix}\sin(\alpha)\\ \cos(\alpha)\end{Bmatrix} + mg\begin{Bmatrix}0\\ -1\end{Bmatrix} + F_R\begin{Bmatrix}\cos(\alpha)\\ -\sin(\alpha)\end{Bmatrix} = m\begin{Bmatrix}a\\ 0\end{Bmatrix}$$

La aceleración cuando el bloque está a punto de deslizar está asociada a la fuerza de roce estático límite:

$$F_R = (F_R)_{\max} = \mu\,N$$

En este problema se tiene dos ecuaciones y dos incógnitas, N y a. Para determinar N se utiliza la ecuación de fuerzas en el eje z:

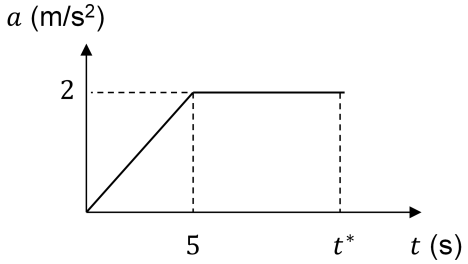
$$\begin{aligned} N\cos(\alpha) - mg - (F_R)_{\max}\sin(\alpha) &= 0\\ N\cos(\alpha) - mg - \mu\,N\,\sin(\alpha) &= 0\\ N\left[\cos(\alpha) - \mu\,\sin(\alpha)\right] &= mg\\ N &= \frac{mg}{\cos(\alpha)-\mu\,\sin(\alpha)} \end{aligned}$$

Reemplazando el valor de N en la ecuación de fuerzas del eje x se obtiene el módulo de la aceleración pedido:

$$\begin{aligned} N\sin(\alpha) + (F_R)_{\max}\cos(\alpha) &= m\,a\\ \frac{m\,g\,\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)-\mu\,\sin(\alpha)} + \frac{\mu\,m\,g\,\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)-\mu\,\sin(\alpha)} &= m\,a\\ \frac{g\,\sin(\alpha)+\mu\,g\,\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)-\mu\,\sin(\alpha)} &= a\\ g\left[\frac{\mu\,\cos(\alpha)+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)-\mu\,\sin(\alpha)}\right] &= a \end{aligned}$$

Problema 7 [0.5 puntos]

Una moto viaja con una velocidad constante de $30\,\mathrm{m/s}$. En el instante $t = 0$ la moto acelera como muestra la figura al costado. Determine el tiempo $t^\star$ en que la velocidad final de la moto es $50\,\mathrm{m/s}$.



a) $t^\star = 12{,}5\,\mathrm{s}$

b) $t^\star = 10{,}0\,\mathrm{s}$

c) $t^\star = 22{,}5\,\mathrm{s}$

d) $t^\star = 27{,}5\,\mathrm{s}$

e) $t^\star = 7{,}5\,\mathrm{s}$

Solución

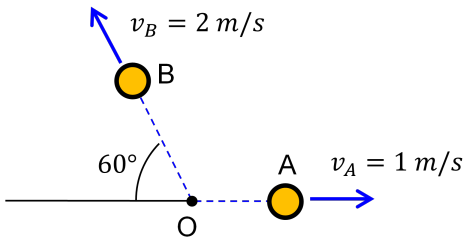
La velocidad y la aceleración de la moto se relaciona de la siguiente forma:

$$v(t^\star) = \int_{t_0}^{t^\star} a(t)\ \mathrm{d}t + v_0$$

, donde $t_0 = 0$, $v_0 = 30\,\mathrm{m/s}$, y $v(t^\star) = 50\,\mathrm{m/s}$. La integral es el área bajo la curva de la gráfica, i.e.: la área de un triángulo de base 5 y altura 2; y un rectángulo de base $(t^\star - 5)$ y altura 2. Es decir:

$$\begin{aligned} v(t^\star) &= \int_0^5 a(t)\ \mathrm{d}t + \int_5^{t^\star} a(t)\ \mathrm{d}t + v_0 \\ 50 &= \frac{(5)\,(2)}{2} + (t^\star - 5)\,(2) + 30 \\ 50 &= 25 - 2\,t^\star \\ 2\,t^\star &= 25 \\ t^\star &= \frac{25}{2} = 12{,}5\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Problema 8 [0.5 puntos]



Dos personas ubicadas en el mismo punto O comienzan a correr en $t = 0$ en direcciones diferentes como muestra la figura al costado. La persona A corre con una rapidez constante de $1\,\mathrm{m/s}$, mientras que la persona B lo hace a $2\,\mathrm{m/s}$. Determine el tiempo $t^\star$ en que la distancia entre las dos personas es $10\,\mathrm{m}$.

a) $t^\star = \dfrac{10}{\sqrt{7}}\,\mathrm{s}$

b) $t^\star = \dfrac{10}{3}\,\mathrm{s}$

c) $t^\star = \dfrac{10}{\sqrt{5}}\,\mathrm{s}$

d) $t^\star = \dfrac{10}{\sqrt{2}}\,\mathrm{s}$

e) $t^\star = \dfrac{10}{\sqrt{3}}\,\mathrm{s}$

Solución

Fijando el origen del sistema coordenado en O, la posición de la persona A es:

$$\mathbf{u}_A(t) = 1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} t\ \mathrm{m}$$

La posición de la persona B es:

$$\mathbf{u}_B(t) = 2 \begin{Bmatrix} -\cos(60°) \\ \sin(60°) \end{Bmatrix} t = \begin{Bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{Bmatrix} t\ \mathrm{m}$$

La posición de la persona A respecto de la persona B es:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{A/B}(t) &= \mathbf{u}_A(t) - \mathbf{u}_B(t) \\ &= \begin{Bmatrix} t \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -t \\ \sqrt{3}\,t \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 2\,t \\ -\sqrt{3}\,t \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

La distancia entre las dos personas es:

$$d(t) = \left|\mathbf{u}_{A/B}(t)\right| = \sqrt{4\,t^2 + 3\,t^2} = \sqrt{7\,t^2} = \sqrt{7}\,t\ \mathrm{m}$$

El tiempo necesario para que la distancia entre las dos personas sea $10\,\mathrm{m}$ es:

$$\begin{aligned} d(t) = \sqrt{7}\,t &= 10 \\ t &= \frac{10}{\sqrt{7}}\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Problema de Desarrollo [2 puntos]

Situación A [0.8 puntos]

Una esfera pequeña de hielo de masa m tiene roce despreciable con la superficie del un *bowl*; i.e. $\mu = 0$. La esfera gira al interior del bowl con un ángulo específico α medido desde el eje vertical con velocidad angular ω constante. Es decir, la esfera gira sin caer ni subir por la pared del bowl, como muestra la Figura 1(a). Determine el ángulo α en función de m, g, R_b, y ω.

Situación B [1.2 puntos]

Considere una nueva situación en que se tiene un cubo pequeño de madera de masa m. El cubo tiene un coeficiente de roce estático μ con la superficie del *bowl*. El bowl gira con una velocidad angular ω constante, y el cubo se mantiene adherido a la pared del mismo sin deslizar con un ángulo α, como muestra la Figura 1(b). Determine la rapidez angular mínima ω_{min} y máxima ω_{max} con que puede girar el *bowl* sin que el cubo caiga o suba por el mismo.

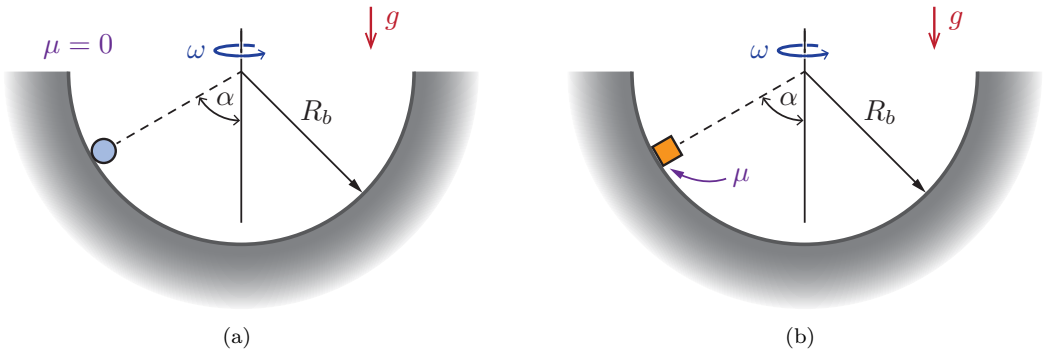
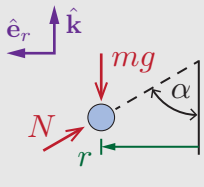


Figura 1: Bowl con partículas: **(a)** situación A, partícula gira sin roce; y **(b)** situación B, bowl y bloque giran (con roce).

Solución

Situación A



El DCL de la esfera en los ejes $\hat{\mathbf{e}}_r$–$\hat{\mathbf{k}}$ se muestra en la figura al costado. No hay fuerzas actuando en el eje $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ (fuera del plano), por lo que no es necesario considerarlo. El radio al cual la esfera gira es $r = R_b \sin\alpha$. Utilizando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton, se obtiene:

$$-mg\,\hat{\mathbf{k}} + N\left(-\sin\alpha\,\hat{\mathbf{e}}_r + \cos\alpha\,\hat{\mathbf{k}}\right) = m\left(-r\,\omega^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r$$

Utilizando la ecuación en el eje $\hat{\mathbf{k}}$, se tiene que:

$$-mg + N\,\cos\alpha = 0$$
$$N = \frac{mg}{\cos\alpha}$$

Reemplazando en la ecuación del eje $\hat{\mathbf{e}}_r$ y despejando el ángulo α, se tiene:

$$\left(\frac{mg}{\cos\alpha}\right)(-\sin\alpha) = -m\,R_b\,\sin\alpha\,\omega^2$$
$$\cos\alpha = \frac{g}{R_b\,\omega^2}$$
$$\alpha = \text{acos}\left(\frac{g}{R_b\,\omega^2}\right)$$

Situación B

El DCL del cubo en los ejes $\hat{\mathbf{e}}_r$–$\hat{\mathbf{k}}$ se muestra en la figura a continuación para los casos en que el bloque tiende a caer por el bowl, y luego el caso en que tiende a subir por el bowl.



En el caso que tiende a caer por el bowl, la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton resulta en:

$$-mg\,\hat{\mathbf{k}} + N\left(-\sin\alpha\,\hat{\mathbf{e}}_r + \cos\alpha\,\hat{\mathbf{k}}\right) + f_r\left(\cos\alpha\,\hat{\mathbf{e}}_r + \sin\alpha\,\hat{\mathbf{k}}\right) = m\left(-r\,\omega^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r$$

, donde además se tiene que $f_r = (f_r)_{\max} = \mu\,N$. Utilizando la ecuación en el eje $\hat{\mathbf{k}}$ se obtiene la fuerza normal:

$$-mg + N\,\cos\alpha + \mu\,N\,\sin\alpha = 0$$

$$N = \frac{mg}{\cos\alpha + \mu\,\sin\alpha}$$

Reemplazando en la ecuación del eje $\hat{\mathbf{e}}_r$ y despejando la velocidad angular ω, se tiene:

$$-N\,\sin\alpha + \mu\,N\,\cos\alpha = -m\,R_b\,\sin\alpha\,\omega^2$$

$$(\sin\alpha - \mu\,\cos\alpha)\,N = m\,R_b\,\sin\alpha\,\omega^2$$

$$(\sin\alpha - \mu\,\cos\alpha)\left(\frac{mg}{\cos\alpha + \mu\,\sin\alpha}\right) = m\,R_b\,\sin\alpha\,\omega^2$$

$$\omega_{\min} = \pm\sqrt{\left(\frac{g}{R_b\,\sin\alpha}\right)\left(\frac{\sin\alpha - \mu\,\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\,\sin\alpha}\right)}$$

En el caso que tiende a subir por el bowl, la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton resulta en:

$$-mg\,\hat{\mathbf{k}} + N\left(-\sin\alpha\,\hat{\mathbf{e}}_r + \cos\alpha\,\hat{\mathbf{k}}\right) + f_r\left(-\cos\alpha\,\hat{\mathbf{e}}_r - \sin\alpha\,\hat{\mathbf{k}}\right) = m\left(-r\,\omega^2\right)\hat{\mathbf{e}}_r$$

Nuevamente se tiene que $f_r = (f_r)_{\max} = \mu\,N$. Utilizando la ecuación en el eje $\hat{\mathbf{k}}$ se obtiene la fuerza normal:

$$-mg + N\,\cos\alpha - \mu\,N\,\sin\alpha = 0$$

$$N = \frac{mg}{\cos\alpha - \mu\,\sin\alpha}$$

Reemplazando en la ecuación del eje $\hat{\mathbf{e}}_r$ y despejando la velocidad angular ω, se tiene:

$$-N\,\sin\alpha - \mu\,N\,\cos\alpha = -m\,R_b\,\sin\alpha\,\omega^2$$

$$(\sin\alpha + \mu\,\cos\alpha)\,N = m\,R_b\,\sin\alpha\,\omega^2$$

$$(\sin\alpha + \mu\,\cos\alpha)\left(\frac{mg}{\cos\alpha - \mu\,\sin\alpha}\right) = m\,R_b\,\sin\alpha\,\omega^2$$

$$\omega_{\max} = \pm\sqrt{\left(\frac{g}{R_b\,\sin\alpha}\right)\left(\frac{\sin\alpha + \mu\,\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\,\sin\alpha}\right)}$$

Nota: La dirección en la que gira el bowl no es relevante, lo que explica los dos signos de la solución. Es decir, el bloque de madera se mantiene adherido a la pared del bowl giratorio para velocidad angular ω tal que:

$$\sqrt{\left(\frac{g}{R_b\,\sin\alpha}\right)\left(\frac{\sin\alpha - \mu\,\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\,\sin\alpha}\right)} \leq |\omega| \leq \sqrt{\left(\frac{g}{R_b\,\sin\alpha}\right)\left(\frac{\sin\alpha + \mu\,\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\,\sin\alpha}\right)}$$