PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2020

Taller 10

Momento de Inercia y 2da ley de Newton

Problema 1.

Determine el momento de inercia de las siguientes figuras con respecto al punto O.

a. Rueda de carreta, donde $L = 0{,}2\ m$. Asuma que todo el material tiene una densidad lineal $\lambda = 0{,}3\ kg/m$.

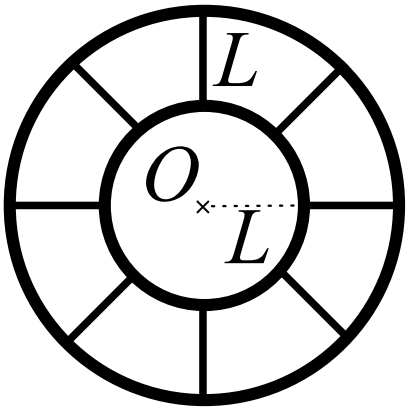


Figura 1: Rueda de carreta

b. Placa cuadrada con una perforación circular con punto de rotación O en esquina. Considere $a = 50\ cm$ y densidad $\rho = 400\ kg/m^2$.

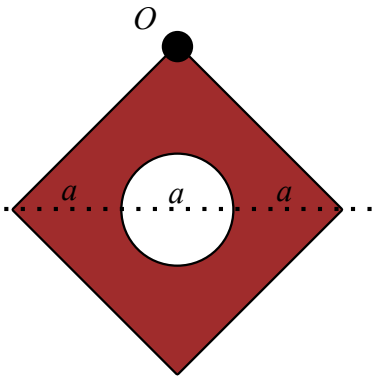


Figura 2: Placa con perforación

Solución

a. EL momento de inercia total será la suma de los momentos de inercia de los componentes con respecto a O. Éstos son:

- Un anillo de radio L y masa $M_{a1} = \lambda * 2\pi L\ kg = 0{,}38\ kg$ (a1)

$$I_{0a1} = M_{a1}L^2 = 0{,}015\ kg - m^2$$

- Un anillo de radio $2L$ y masa $M_{a2} = \lambda * 2\pi 2L\ kg = 0{,}75\ kg$ (a2)

$$I_{0a2} = M_{a2}(2L)^2 = 0{,}121\ kg - m^2$$

- 8 barras de largo L y cada una de masa $M_b = \lambda L\ kg = 0{,}06\ kg$

$$I_{0b} = I_{CM} + M_c d^2 = \frac{1}{12}M_b L^2 + M_b\left(L + \frac{L}{2}\right)^2 = 0{,}006\ kg - m^2$$

Por lo tanto el momento de inercia total de la rueda de carreta es

$$I_0 = I_{0a1} + I_{0a2} + 8I_{0b} = 0{,}181\ kg - m^2$$

b. EL momento de inercia de la placa de la figura será el momento de inercia de la placa cuadrada sin la perforación menos el de una placa circular con las dimensiones de la perforación. Por lo tanto, haciendo los cálculos paso a paso

- La placa sin perforación es de lado $b = \dfrac{3a}{\sqrt{2}}$, por lo tanto la masa de la placa es $M_c = \left(\dfrac{3a}{\sqrt{2}}\right)^2 \rho = 450\ kg$. Entonces la inercia de la placa cuadrada con respecto al punto O es

$$I_{cO} = I_{CM} + M_c d^2 = \frac{1}{12}M_c\left(\left(\frac{3a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3a}{\sqrt{2}}\right)^2\right) + M_c\left(\frac{3a}{2}\right)^2 = 337{,}5\ kg - m^2$$

- La placa circular de radio $a/2$ tiene una masa $M_p = \rho\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = 78{,}5\ kg - m^2$, por lo que su inercia será:

$$I_{pO} = I_{cm} + M_p d^2 = \frac{1}{2}M_p\left(\frac{a}{2}\right)^2 + M_p\left(\frac{3a}{2}\right)^2 = 46{,}6\ kg - m^2$$

Por lo tanto la inercia de la placa perforada sera

$$I_O = I_{cO} - I_{pO} = 290{,}9\ kg - m^2$$

Problema 2.

En la figura 3 la polea consiste de dos discos coaxiales pegados de radios R y $2R$, tal que $R = 3\ m$. Cada disco tiene masa $M = 15\ kg$ y las masas de los bloques son $m_1 = 40\ kg$ y $m_2 = 60\ kg$. Suponga que no hay deslizamiento entre las cuerdas y la polea.

a. Determine el momento de inercia total de la polea.

b. Plantee, para el sistema de referencia mostrado en la figura 3, las ecuaciones de ligadura. Considere como positivo el giro en el sentido del reloj.

c. Determine la aceleración de los bloques.

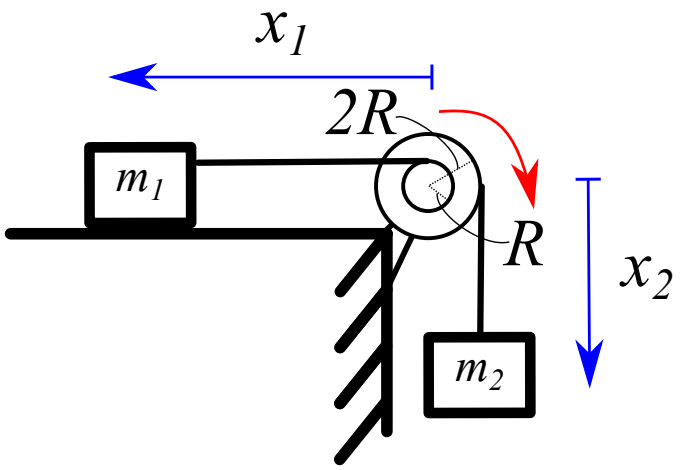


Figura 3: Sistema del problema 2 con sistema de referencia.

a. El momento de inercia para la polea es

$$I_O = \frac{1}{2}M\,(R)^2 + \frac{1}{2}M\,(2R)^2 = \frac{1}{2}M5R^2 = 337{,}5\ kg - m^2$$

b. Si se toman las largos de cuerda iniciales l_1 y l_2 mostrado en la figura 4

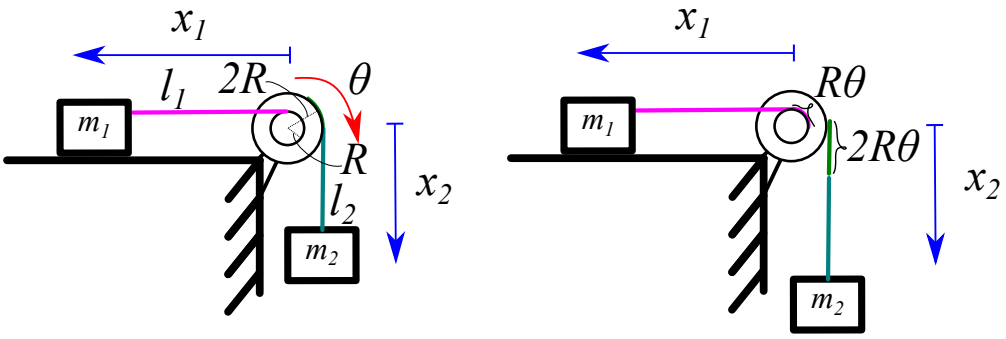


Figura 4: Ligadura

Y si la polea se le aplica un giro en θrad. Los largos de cuerda deberan cumplir.

$$x_1 = l_1 - R\theta \qquad x_2 = l_2 + 2R\theta$$

por lo tanto derivando 2 veces en el tiempo:

$$\ddot{x}_1 = -R\alpha \quad \ddot{x}_2 = 2R\alpha$$

c. Aplicando la 2da ecuación de newton para cada objeto:

- bloque m_1

$$\sum F_x = m_1\ddot{x}_1 \longrightarrow (\leftarrow^+) - T_1 = m_1\ddot{x}_1$$

- bloque m_2

$$\sum F_x = m_2\ddot{x}_2 \longrightarrow (\downarrow^+) m_2 g - T_2 = m_2 2\ddot{x}_2$$

- Polea

$$\sum \tau_O = I\alpha \longrightarrow (\circlearrowleft^+) T_2 2R - RT_1 = I\alpha$$

Por lo tanto el sistema de ecuaciones a resolver:

$$\begin{cases} (1) & T_1 = -m_1\ddot{x}_1 \\ (2) & m_2 g - T_2 = m_2\ddot{x}_2 \\ (3) & T_2 2R - RT_1 = I\alpha \\ (4) & \ddot{x}_1 = -R\alpha \\ (5) & \ddot{x}_2 = 2R\alpha \end{cases}$$

Despejando T_1 y T_2 de ecuaciones (1) y (2) respectivamente.

$$T_1 = m_1 R\alpha \quad m_2 g - 2m_2 R\alpha = T_2$$

Remplazando en ecuación (3).

$$2Rm_2 g - 4m_2 R^2\alpha - m_1 R^2\alpha = \alpha I$$

Por lo tanto:

$$\alpha = \frac{2Rm_2 g}{I + m_1 R^2 + 4m_2 R^2}$$

$$\ddot{x}_1 = -3{,}71\ m/s^2 \quad \ddot{x}_2 = 7{,}42\ m/s^2$$