PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2019

Taller 05

Trabajo y Energia

Problema 1.

Un bloque de masa $m = 30\,kg$ pasa por el punto A con velocidad $v_A = 10\,{}^{m}/_{s}$ moviéndose hacia la derecha como muestra la Figura 1. En el punto B choca con un resorte de constante $k = 1000\,{}^{N}/_{m}$ que se encontraba en su largo natural. La distancia entre A y B es $l = 50\,m$, y el roce es despreciable.

Se pide determinar:

a) La velocidad v_B cuando el bloque llega al punto B.

b) ¿Cuál es la máxima compresión $\delta_{\max}$ del resorte? (ubicación del punto C)

c) Repita los puntos anteriores pero con coeficiente de roce $\mu_k = 0{,}03$.

d) ¿Por qué los resultados son distintos? ¿Por qué uno los valores (velocidad y compresión) son mayores en un caso que en el otro?

e) Considerando el roce: ¿Hasta dónde se regresa el bloque medido desde el punto B?

f) Si no hay roce: ¿Se puede calcular hasta donde llega el bloque?

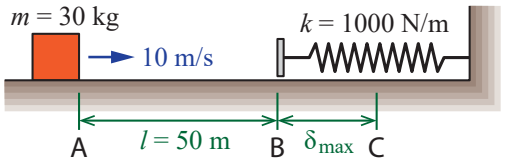


Figura 1: Caja en plano horizontal con resorte en un extremo.

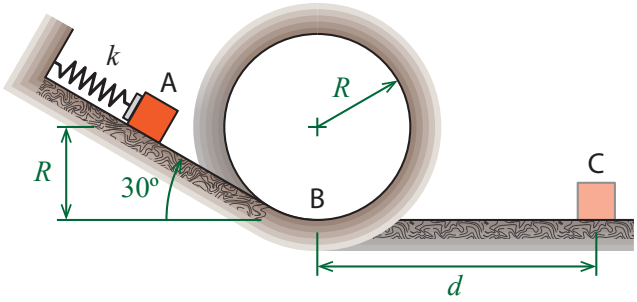


Figura 2: Montaña rusa para un bloque de masa m.

Problema 2.

Un bloque de masa m está inicialmente en el punto A, que esta a una altura R, y con un resorte de rigidez k desconocida comprimido en δ, como muestra la Figura 2. Cuando es liberado, el bloque desliza por el plano inclinado AB que tiene un coeficiente de roce cinético $\mu_{AB} = {}^{1}/\sqrt{3}$. Luego recorre un "loop" sin roce de radio R, para finalizar en un plano horizontal BC con un coeficiente de roce $\mu_{BC} = {}^{2}/_{3}$.

Se pide determinar:

a) La velocidad mínima que debe tener el bloque en el punto más alto del loop para no caer (no despegarse).

b) La rigidez del resorte k para que el bloque pase justo por el loop.

c) La distancia d que recorre el bloque desde el punto B antes de frenar.

Soluciones.

Problema 1.a
Como no hay fuerzas involucradas, entonces $V_A = v_B = 10\,m/s$.

Problema 1.b
Usando conservación de energía entre los puntos A y C (no hay necesidad de pasar por B):

$$\begin{aligned} T_A + (V_g)_A + (V_e)_A &= T_C + (V_g)_C + (V_e)_C \\ \frac{1}{2}mv_A^2 + 0 + 0 &= 0 + 0 + \frac{1}{2}k\delta_{\max}^2 \\ \delta_{\max}^2 &= \frac{m}{k}v_A^2 \\ \delta_{\max} &= \sqrt{\frac{m}{k}}v_A = \sqrt{\frac{30}{1000}}\,(10) = \sqrt{3} = 1{,}732\,m \end{aligned}$$

Problema 1.c
La velocidad en B se obtiene usando conservación de energía entre los puntos A y B, pero considerando el trabajo de las fuerzas no-conservativas que le sacan energía al sistema:

$$\begin{aligned} T_A + (V_g)_A + (V_e)_A + U_{AB}^{\star} &= T_B + (V_g)_B + (V_e)_B \\ \frac{1}{2}mv_A^2 + 0 + 0 + (-f_r)\,(50) &= \frac{1}{2}mv_B^2 + 0 + 0 \\ \frac{1}{2}mv_A^2 - \left(\frac{3}{100}\right)(m\cdot g)\,(50) &= \frac{1}{2}mv_B^2 + 0 + 0 \\ v_B^2 &= 100 - 3\,g \\ v_B &= \sqrt{100 - 3\,g} = 8{,}4\,m/s \end{aligned}$$

Repitiendo el análisis entre las posiciones A y C:

$$\begin{aligned} T_A + (V_g)_A + (V_e)_A + U_{AC}^{\star} &= T_C + (V_g)_C + (V_e)_C \\ \frac{1}{2}mv_A^2 + 0 + 0 + (-f_r)\,(50 + \delta_{\max}) &= 0 + 0 + \frac{1}{2}k\delta_{\max}^2 \\ (30)\,(100) - \left(\frac{9\,g}{5}\right)(50 + \delta_{\max}) &= (1000)\,\delta_{\max}^2 \\ (1000)\,\delta_{\max}^2 + \left(\frac{9\,g}{5}\right)\delta_{\max} + (90\,g - 3000) &= 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \qquad \delta_{\max} = \frac{-\left(\frac{9\,g}{5}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{81\,g}{25}\right) - (4000)\,(90\,g - 3000)}}{2000}$$

$$\delta_{\max} = \{-1{,}464\,,\ 1{,}446\}\ m$$

La solución que nos interesa es la raíz positiva; i.e. la compresión máxima del resorte es:

$$\delta_{\max} = 1{,}446\,m$$

Problema 1.d
La velocidad en B es menor en el caso con roce: $10\,m/s$ vs. $8{,}4\,m/s$
La compresión máxima del resorte es menor también: $1{,}732\,m$ vs. $1{,}446\,m$
Esto se debe a que la fuerza de roce disipa (extrae) energía del sistema. Como el bloque tiene menos energía; se mueve más lento y es capaz de comprimir el resorte menos. Es decir, la energía no se conserva.

Problema 1.e

Repitiendo el análisis entre los puntos C y D, donde D es el punto en que $v_D = 0$:

$$T_C + (V_g)_C + (V_e)_C + U^{\star}_{CD} = T_D + (V_g)_D + (V_e)_D$$
$$0 + 0 + \frac{1}{2} k \delta^2_{\max} + (-f_r)\,(l_{CD}) = 0 + 0 + 0$$

La distancia total recorrida desde C a D es: $l_{CD} = \delta_{\max} + l_{BD}$, y donde l_{BD} es la distancia pedida.

$$\frac{1}{2}\,(1000)\,(1{,}446)^2 - \left(\frac{3}{100}\right)(m \cdot g)\,(1{,}446 + l_{BD}) = 0$$
$$l_{BD} = 117\,m$$

Problema 1.f

Sin roce la energía no se pierde y el bloque regresa el punto A con velocidad $v_{A'} = -v_A = -10\,m/s$. Es decir, el bloque avanza con velocidad $10\,m/s$ hacia la izquierda hasta el infinito, i.e. no se detiene.

Problema 2.a

Llamaremos L al punto en que el bloque está en el punto más alto del *loop*. Haciéndo un DCL para dicho instante como muestra la Figura 3, y aplicando la 2^a ley de Newton:

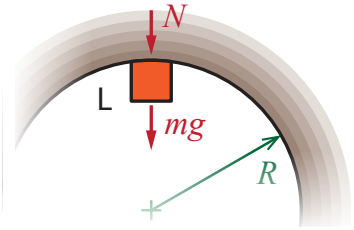


Figura 3: DCL del bloque cuando está en el punto más alto del *loop*; instante llamado "L".

$$\sum f_r = m\,a_r$$
$$-N - mg = m\left(-R\,\dot{\theta}^2\right) = m\left(-\frac{v_L^2}{R}\right)$$
$$N = m\left(\frac{v_L^2}{R} - g\right)$$

La normal N no puede ser negativa: eso indica que el bloque se despega de la pista. Con ello se tiene la condición:

$$0 \le N = m\left(\frac{v_L^2}{R} - g\right)$$
$$g\,R \le v_L^2$$
$$\sqrt{gR} \le v_L$$

Es decir, la velocidad en L debe ser mayor que $\sqrt{g\,R}$ para no caer (no despegarse).

Problema 2.b

La fuerza de roce en el primer tramo es:

$$[f_r]_{AB} = N\,\mu_{AB} = (mg\cos 30°)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{mg}{2}$$

La velocidad en L se obtiene usando conservación de energía entre los puntos A y L, pero considerando el trabajo de las fuerzas no-conservativas que le sacan energía al sistema:

$$T_A + (V_g)_A + (V_e)_A + U^{\star}_{AL} = T_L + (V_g)_L + (V_e)_L$$
$$0 + mgR + \frac{1}{2}k\delta^2 + (-[f_r]_{AB})\left(\frac{R}{\sin 30°}\right) = \frac{1}{2}mv_L^2 + mg\,(2R) + 0$$
$$v_L = \sqrt{\frac{k}{m}\,\delta^2 - 4gR}$$

Usando la condición de velocidad mínima para no caer, i.e. se requiere una velocidad $v_L \geq \sqrt{gR}$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{k}{m}\,\delta^2 - 4gR} &\geq \sqrt{gR} \\
\frac{k}{m}\,\delta^2 - 4gR &\geq gR \\
k &\geq \frac{5mgR}{\delta^2}
\end{aligned}$$

Problema 2.c
La fuerza de roce en el segundo tramo es:

$$[f_r]_{BC} = N\,\mu_{BC} = (mg)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2mg}{3}$$

El bloque se detendrá cuando la fuerza de roce haya disipado toda la energía del sistema (cuando $T_C + V_C = 0$). conservación de energía entre los puntos A y D, pero considerando el trabajo que el roce (fuerza no-conservativa que disipa energía del sistema):

$$\begin{aligned}
T_A + (V_g)_A + (V_e)_A + U^{\star}_{AC} &= T_C + (V_g)_C + (V_e)_C \\
0 + mgR + \frac{1}{2}k\delta^2 + (-[f_r]_{AB})\left(\frac{R}{\sin 30^\circ}\right) + (-[f_r]_{BC})\,(d) &= 0 + 0 + 0 \\
\frac{1}{2}k\delta^2 - \frac{2}{3}mgd &= 0 \\
d &= \frac{3k\delta^2}{4mg}
\end{aligned}$$

Es decir, el bloque avanza una distancia igual a $\frac{3k\delta^2}{4mg}$ medida desde el punto B.