# Capítulo 3

# Cinética

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

## 3.1. 2$^{\text{da}}$ ley de Newton

La 2$^{\text{da}}$ ley de Newton dice que una partícula acelera producto de fuerzas no-balanceadas (no en *equilibrio*). Cinética es la rama de la dinámica que estudia la relación entre los cambios en el movimiento de partículas y las fuerzas que lo causan.

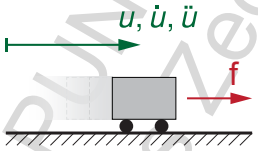



Figura 3.1: Carro de masa $m$ que experimenta una aceleración $a = \ddot{u}$ producto de una fuerza externa $f$.

Si a un cuerpo le aplicamos una fuerza $f_1$ (una dimensión, movimiento rectilíneo) y medimos la aceleración resultante $a_1$; veremos que la razón entre estás cantidades es la misma si aplicamos una fuerza $f_2$ obteniendo $a_2$. Es decir, en el experimento que ilustra la Figura 3.1 se cumple que:

$$\frac{f_1}{a_1} = \frac{f_2}{a_2} = \frac{f_3}{a_3} = \ldots = \frac{f}{a} = C \quad \text{(constante)}$$

La constante $C$ es una propiedad invariante del cuerpo, y es la "resistencia del objeto a cambiar su velocidad" y que llamamos *inercia*. La inercia (traslacional) de un objeto es proporcional a su masa:

$$\frac{f}{a} = C = \kappa\, m$$

, donde $\kappa$ es una constante que toma en cuenta las unidades. Es común tomar $\kappa = 1$, y con ello $^{\text{kg}\cdot\text{m}}/_{\text{s}^2}$ lo llamamos Newton (N). Como la fuerza y la aceleración son vectores, entonces:

$$\mathbf{f} = m\,\mathbf{a} = m\,\ddot{\mathbf{u}}$$

En realidad $\mathbf{f}$, también llamada *fuerza neta*, es el resultado de varias fuerzas $\mathbf{f}_i$:

$$\boxed{\sum_i \mathbf{f}_i = \mathbf{f} = m\,\ddot{\mathbf{u}}} \tag{3.1}$$

El resultado de la Ecuación (3.1) es cierto para cualquier sistema de referencia que no rota y que se mueve a velocidad constante (ver Sección 2.5). En esos casos, la medida que se obtiene para la aceleración es la misma. Es decir, para que se cumplan las leyes de Newton, específicamente $\mathbf{f} = m\,\mathbf{a}$, se requiere estar en un *sistema inercial*.

## 3.2. Fuerzas típicas

### 3.2.1. Fuerza gravitacional

Newton postuló la ley de atracción mutua entre dos partículas cualquiera, como muestra la Figura 3.2, resulta ser:

$$f = G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2} \tag{3.2}$$

, donde $G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ {}^{\mathrm{m}^3}/_{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}$ es la constante de gravitación universal.

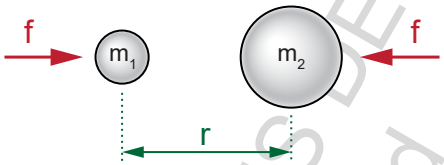



Figura 3.2: Fuerza de atracción mutua entre dos partículas (fuerza gravitacional).

La masa y radio promedio de la tierra son:

$$m_e = 5{,}9722 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \qquad\qquad r_e = 6{,}371 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m}$$

La fuerza con que la tierra atrae a un objeto de masa $m$ que se encuentra en su superificie es:

$$W = m\,g = m\left(G\,\frac{m_e}{r_e^2}\right) = (m)\,(9{,}8199\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2})$$

Es decir:

$$g = 9{,}8199\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2} \qquad \text{(se suele usar } g = 9{,}81\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}\text{)}$$

### 3.2.2. Fuerzas normal y de fricción (seca)

La manera más simplificada para modelas la fricción (o roce) es la *teoría de fricción seca de Coulomb*. Si dos cuerpos (relativamente rígidos) están en contacto, con dicho contacto: **(1)** puntual, **(2)** relativamente pequeño, o **(3)** finito pero de superficie plana; se puede definir un (único) plano tangente a ambos cuerpos en el punto de contacto, como muestra la Figura 3.3(a).

La 3$^{\mathrm{ra}}$ ley de Newton nos dice que cuando dos cuerpos interactúan, *las fuerzas de acción y reacción entre cuerpos que interactúan son iguales en magnitud, de igual dirección, pero sentido opuesto*. Separando ambos cuerpos (imaginariamente) y haciendo un *diagrama de cuerpo libre*[1] (DCL) de cada uno, podemos identificar las fuerzas que actúan en cada cuerpo por separado, como muestra la Figura 3.3(b). Las fuerzas son:

a) Una fuerza perpendicular al plano de contacto $N$ llamada *fuerza normal (de contacto)*.

b) Una fuerza de fricción $F_r$ en el plano mismo de contacto.

[1] Los diagramas de cuerpo libre se estudiarán en detalle más adelante.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

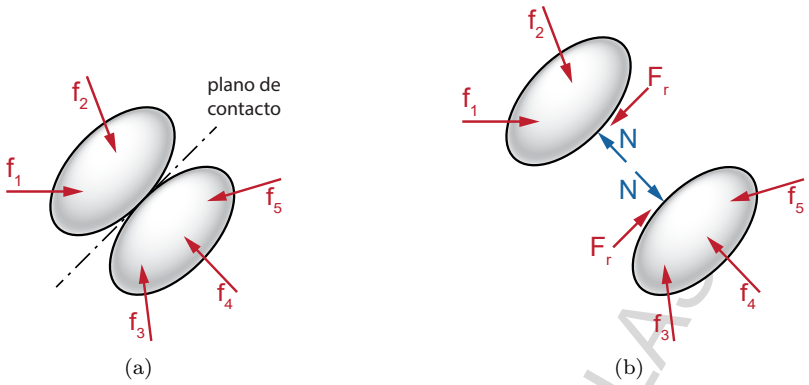



Figura 3.3: Fuerzas entre dos partículas que hacen contacto: **(a)** definición del *plano de contacto*; y **(b)** diagrama de cuerpo libre de las partículas, donde se muestra las fuerzas normal $N$ y de roce $F_r$ entre ambas en el plano de contacto.

> Los términos *fricción* y *roce* son sinónimos y se utilizan indistintamente en este texto.

Supongamos que se tiene un bloque de peso $W = m\,g$, sobre una superficie plana y horizontal. Al bloque se le aplica una fuerza externa, también horizontal $P$, la que aumenta crecientemente, como muestra la Figura 3.4(a). El diagrama de cuerpo libre del bloque se muestra en la Figura 3.4(b), donde se puede observar: **(a)** la fuerza normal que reacciona contra el peso $W$; y **(b)** la fuerza de roce $F_r$ que se opone a la fuerza externa $P$. Se sabe que la aceleración en el eje $\hat{\mathbf{j}}$ es $a_y = 0$, debido a que el bloque no se mueve en dicho eje, y con ello:

$$\sum_i (f_x)_i\,\hat{\mathbf{i}} + \sum_i (f_y)_i\,\hat{\mathbf{j}} = m\,a_x\,\hat{\mathbf{i}} + \overbrace{m\,a_y}^{0}\,\hat{\mathbf{j}} \quad \xrightarrow{\text{sólo eje } y} \quad (-W+N)\,\hat{\mathbf{j}} = 0\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$N = W$$

Es decir, la magnitud de la fuerza normal $N$ es igual al peso $W$ en este caso particular. Supongamos además que tenemos algún sistema para medir la fuerza de roce a medida que aumentamos la fuerza externa $P$. La Figura 3.4(c) muestra una gráfica esquemática de $P$ – $f_r$, donde es posible identificar 3 comportamientos:

**Caso estático** $F_r$ aumenta con $P$ a razón 1 : 1, resultando en una fuerza neta igual a cero lo que implica que $a_x = 0$. No hay movimiento relativo entre las dos superficies en contacto, y la fuerza de roce es menor que la máxima: $F_r \leq (F_r)_{\max} = \mu_s\,N$.

**Caso límite** Corresponde al caso en que la fricción estática está en su valor límite y máximo: $F_r = (F_r)_{\max} = \mu_s\,N$. La fuerza neta es igual a cero (no hay movimiento), pero un aumento en $P$ romperá ese equilibrio.

**Caso dinámico** La fuerza horizontal no se balancea con la fuerza de roce. Es decir, el bloque acelera lo que produce un deslizamiento relativo entre las dos superficies en contacto. La fuerza de roce puede ser menor a la máxima y es igual a: $F_r = F_k = \mu_k\,N$.

El significado de las fuerzas y coeficientes de la discusión anterior es el siguiente:

$(F_r)_{\max} =$ fuerza de roce máxima posible entre ambas superficies;
$\mu_s =$ *coeficiente de roce estático*. Depende de factores como la rugosidad de las superficies, materiales, temperatura, y posiblemente otros;
$F_k =$ fuerza de roce dinámico (con deslizamiento relativo entre las dos superficies);
$\mu_k =$ *coeficiente de roce dinámico*.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

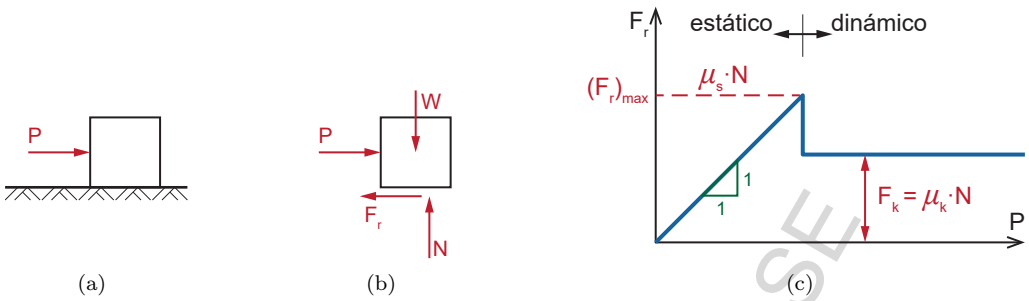



Figura 3.4: Evolución de la fuerza de roce con incrementos de una fuerza solicitante $P$: **(a)** bloque sometido a una fuerza externa $P$ en una superficie plana con roce; **(b)** diagrama de cuerpo libre del bloque; y **(c)** diagrama $P - f_r$, donde se puede identificar el caso estático, límite, y dinámico.

La fuerza de roce se opone al movimiento; o bien al intento de movimiento (caso estático). Además, típicamente $\mu_k < \mu_s$, aunque no es inusual considerar que $\mu_k = \mu_s$ para simplificar los problemas.

> Es muy importante comprender que la fuerza de roce estático puede ser cualquier valor menor a $(F_r)_{\max}$. Un error frecuente es considerar que $F_r = \mu_s N$ siempre, cuando esto es sólo cierto en el caso límite.

> La fuerza normal no puede ser negativa. Una excepción son las montañas rusas, donde hay ruedas especiales que son capaces de "tirar" del carro hacia el riel (hacia abajo) en caso que se quiera elevar.

### 3.2.3. Fuerza elástica

La fuerza elástica está gobernada por la *ley de Hooke*. Es decir, la magnitud de la fuerza ejercida por un resorte es directamente proporcional a la deformación en el mismo:

$$\mathbf{f}_e = -k\,\mathbf{x} \tag{3.3}$$

, donde $k$ = *rigidez* del resorte;
$\mathbf{x} = x\,\hat{\mathbf{x}}$ = deformación en el resorte medida desde la *posición de reposo* del mismo.

Es importante tener en cuenta que la deformación del resorte se mide desde su posición de reposo; posición en la cual el resorte tiene su *longitud natural*. La longitud natural es el largo del resorte cuando no hay fuerzas actuando sobre él. En la Figura 3.5, la deformación es $x = |\mathbf{x}| = |\ell - \ell_0|$, y la fuerza ejercida por el resorte es siempre en la dirección opuesta a $\mathbf{x}$. Es decir, si el resorte se estira la fuerza apuntará a contraer al resorte. Si el resorte se comprime la fuerza apuntará a estirar al resorte.

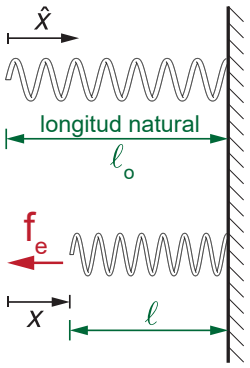



Figura 3.5: Resorte de longitud natural $\ell_0$ que ejerce una fuerza $f_e$ al ser comprimido a una nueva longitud $\ell$.

En este caso asumimos que los resortes son "ideales". Un *resorte ideal* tiene masa despreciable y responde a una deformación de forma instantánea con la fuerza $f_e$.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

### 3.2.4. Tensiones en cuerdas, cables, y cadenas

Se tiene una barra de longitud $\ell_0$ sin fuerzas externas aplicadas sobre ella, como muestra la Figura 3.6(a):

- Se aplica en los extremos de la barra fuerzas iguales pero contrarias que intentan "estirar" la barra. En este caso la barra tiene una fuerza de *tracción* $f_t$ que viaja a través de ella.
- Se aplica en los extremos de la barra fuerzas iguales pero contrarias que intentan "comprimir" la barra. En este caso la barra tiene una fuerza de *compresión* $f_c$ que viaja a través de ella.

La fuerza interna que viaja por el interior de la barra se denomina *tensión*, y puede ser se tracción o compresión.

Las cuerdas, cables, y cadenas, tienen la particularidad que sólo permiten una fuerza de tracción al interior de ellas. Como ejemplifica la Figura 3.6(b); una cuerda permite una fuerza de tracción, pero se pone flácida y permite el movimiento extremo cuando se aplica una fuerza de compresión.

Una cuerda lleva la misma tensión en toda su longitud si no hay roce (en las superficies de contacto o poleas) ni bifurcaciones en la misma, como ejemplifica el diagrama de la Figura 3.6(c). los sistemas de cuerdas y poleas se utilizan para "multiplicar" las fuerzas a costa de una reducción de velocidad. Este concepto se utiliza en: grúas, tecles, huinches, y otros.

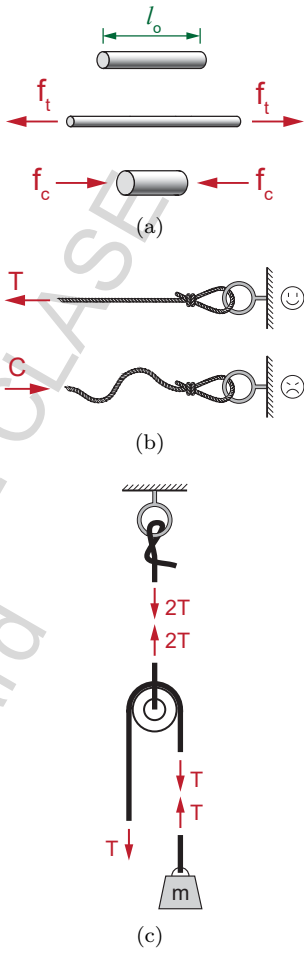



Figura 3.6: Tensión en cuerdas, cables, o cadenas: **(a)** barra sometida a fuerzas de tracción $f_t$ y de compresión $f_c$; **(b)** una cuerda sólo puede llevar una fuerza de tracción; y **(c)** sistema de dos cuerdas en equilibrio, donde cada cuerda lleva una sola tensión.

Un sistema polea–cuerda se puede llamar también *máquina de Atwood*. El matemático George Atwood experimentó con un sistema así para verificar algunas de las ecuaciones de la dinámica en 1784.

Es fácil confundir los términos tensión y tracción (yo mismo lo hago todo el tiempo). La razón se debe a un choque fonético entre dos términos que significan cosas diferentes en inglés y en español. La siguiente tabla resume la terminología en inglés y español (notar el choque tensión–tension):

| Descripción | Español | Inglés |
|---|---|---|
| Esfuerzo interno (fuerza/área) | Tensión / Esfuerzos | Stress |
| Fuerza que tiende a "estirar" | Tracción | Tension |
| Fuerza que tiende a "comprimir" | Compresión | Compression |

Es decir, la tracción y la compresión producen una tensión en el elemento; pero de signo contrario.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

## 3.3. Diagrama de cuerpo libre (DCL)

Cuando se aplica la ley de Newton (Ecuación (3.1)) se deben considerar todas las fuerzas que actúan sobre la partícula o cuerpo. Sólo se pueden ignorar las fuerzas cuya magnitud es despreciable respecto a las otras. Para considerar todas las fuerzas actuando sobre una partícula o cuerpo se debe: **(1)** aislar del resto del sistema; y **(2)** reemplazar los demás cuerpos y componentes por sus respectivas fuerzas actuando sobre la partícula o cuerpo de interés. A este proceso llamaremos hacer el *diagrama de cuerpo libre* (DCL) de la partícula o cuerpo de interés.

El sistema de la Figura 3.7(a) muestra un bloque en un plano inclinado sin roce[2] con ángulo $\alpha$ sobre la horizontal. El bloque se encuentra sujeto por un resorte de rigidez $k$ que lo mantiene inmóvil. La Figura 3.7(b) muestra el DCL del mismo bloque, donde:

1) Reemplazamos el suelo inclinado sin roce por una fuerza normal que ejerce sobre el bloque.

2) Reemplazamos el resorte por una fuerza elástica (de tracción) sobre el bloque.

3) Se incluye la fuerza gravitatoria actuando sobre el bloque.

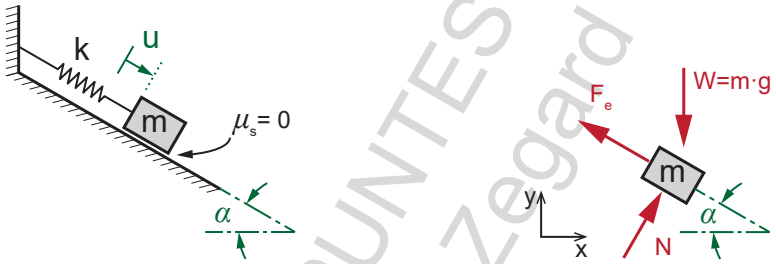



Figura 3.7: Ejemplo de elaboración de un diagrama de cuerpo libre: **(a)** bloque en un plano inclinado sin roce sujetado por un resorte en tracción; y **(b)** diagrama de cuerpo libre (DCL) del bloque.

Considerando todas las fuerzas sobre la partícula o cuerpo de interés, se pueden dar dos situaciones:

a) Si la fuerza neta es nula, que es lo mismo que decir $\sum \mathbf{f}_i = \mathbf{0}$, entonces el objeto está en *reposo*: no acelera. Si la aceleración es nula, entonces de la ecuación diferencial sabemos que la velocidad necesariamente es:

$$\mathbf{v} = \text{constante} \qquad \text{ó} \qquad \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

b) Si hay fuerzas no balanceadas, entonces el objeto acelera de acuerdo a la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton:

$$\sum \mathbf{f}_i = m\,\ddot{\mathbf{u}} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \sum (\mathbf{f}_i)_x = m\,\ddot{u}_x \\ \sum (\mathbf{f}_i)_y = m\,\ddot{u}_y \\ \sum (\mathbf{f}_i)_z = m\,\ddot{u}_z \end{cases}$$

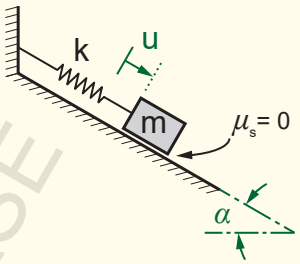
El DCL (o los múltiples DCLs) es el primer paso en la solución de problemas de cinética. Permite identificar todas las fuerzas que participan, definir el sistema de referencia, y elaborar un "plan de ataque" hacia la solución del problema.

[2] El roce siempre existe, pero en este caso es despreciable.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

**Ejemplo**

Se tiene un bloque de masa $m$ en un plano inclinado sin roce sujeto por un resorte de rigidez $k$, como muestra la Figura. Se pide:




a) Hacer el DCL del bloque.

b) Determinar la magnitud de la fuerza normal y elástica que actúan sobre el bloque si este se encuentra en reposo, i.e. $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

c) Determine la distancia $x$ que está estirado el resorte en la condición de reposo.

El DCL del bloque se muestra en la Figura 3.7(b). Sabemos que si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, y con ello:

$$m\,\mathbf{a} = \mathbf{0} = \sum_i \mathbf{f}_i \qquad \longleftarrow \qquad \text{equilibrio}$$

$$\mathbf{0} = W \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} + N \begin{Bmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{Bmatrix} + F_e \begin{Bmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix}$$

Se tienen dos ecuaciones y dos incógnitas ($N$ y $F_e$), cuya solución es:

$$N = W\,\cos\alpha = mg\,\cos\alpha \qquad\qquad F_e = W\,\sin\alpha = mg\,\sin\alpha$$

Conociendo la fuerza que ejerce el resorte, podemos determinar cuánto se ha estirado el mismo. Notar que la fuerza $F_e$ ya la habíamos considerado contraria a $x$ en la Figura 3.7(b), por lo que el signo de la Ecuación (3.3) ya estaba incluido en el DCL. Finalmente, el resorte se encuentra estirado una distancia:

$$F_e = mg\,\sin\alpha = k\,u$$
$$u = \frac{mg}{k}\,\sin\alpha$$

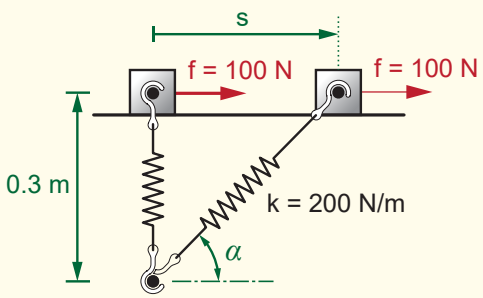
**Sugerido**

Pruebe resolviendo el problema anterior, pero con un sistema de ejes inclinado como el plano de deslizamiento. Las ecuaciones que se obtienen son diferentes, pero el resultado para $N$ y $F_e$ es el mismo: es sólo una rotación del sistema.

**Ejemplo**

Hibbeler 14$^{\text{th}}$ ed, Problem F13–5

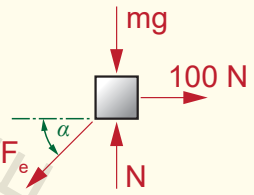
Un bloque de masa $m = 25\,\text{kg}$ está conectado a un resorte que está en reposo cuando $s = 0$, que es lo mismo que decir que $\ell_0 = 0{,}3\,\text{m}$. El resorte tiene rigidez $k = 200\,\text{N/m}$ y el roce entre el bloque y la superficie es despreciable. Sobre el bloque actúa una fuerza externa $\mathbf{f} = 100\,\hat{\mathbf{j}}\,\text{N}$. Determine la aceleración del bloque cuando $s = 0{,}4\,\text{m}$.




El primer paso consiste en hacer un DCL para el bloque, como muestra la Figura al costado. Adicionalmente, sabemos que en esa configuración el largo, estiramiento, y ángulo del resorte son:

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

$$\ell = 0{,}5\,\text{m}$$
$$u = |\ell - \ell_0| = 0{,}2\,\text{m}$$
$$\cos\alpha = \frac{4}{5} \qquad \sin\alpha = \frac{3}{5}$$




El bloque no acelera en $\hat{\mathbf{j}}$, lo que significa que $\ddot{u}_y = 0$. Postulando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton, se obtiene:

$$mg\begin{Bmatrix}0\\-1\end{Bmatrix} + N\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix} + F_e\begin{Bmatrix}-\cos\alpha\\-\sin\alpha\end{Bmatrix} + 100\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} = m\begin{Bmatrix}\ddot{u}_x\\0\end{Bmatrix}$$

Sabemos además que: $F_e = k\,x = (200\,\text{N/m})\,(0{,}2\,\text{m}) = 40\,\text{N}$. El signo (negativo) de la fuerza elástica se incluyó cuando en el DCL dibujamos la fuerza $F_e$ contraria al estiramiento del resorte. Utilizando la primera ecuación (ecuación en $\hat{\mathbf{i}}$) se tiene:

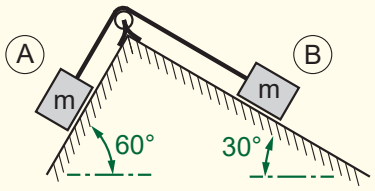
$$(40\,\text{N})\,(-\cos\alpha) + 100 = m\,\ddot{u}_x$$
$$\frac{-160 + 500}{5} = 25\,\ddot{u}_x$$
$$\ddot{u}_x = 2{,}72\,\text{m/s}^2$$

**Nota:** La segunda ecuación (ecuación en $\hat{\mathbf{j}}$) sirve para determinar la fuerza normal $N$ en función de $s$.

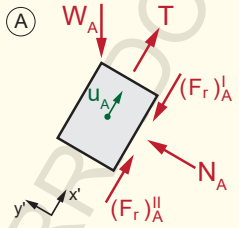
## Ejemplo

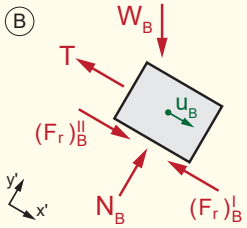
Basado en Hibbeler 13$^{\text{th}}$ ed, Problem 13–17

Un plano doblemente inclinado soporta dos bloques idénticos $A$ y $B$ de masa $m = 4\,\text{kg}$. El coeficiente de fricción dinámica es $\mu_k = 0{,}1$ (asuma que el sistema está en movimiento). Determine la aceleración de cada bloque.




El primer paso consiste en hacer un DCL de cada bloque.




La problemática que tenemos es que dependiendo del movimiento de los bloques, la fuerza de roce puede ser el par $(F_r)^I$, o el par $(F_r)^{II}$. La dirección de $\dot{u}$ (producida por $\ddot{u}$) gobierna la dirección de la fuerza de roce. El primer par supone un movimiento de ambos bloques hacia la izquierda, mientras que el segundo lo hace hacia la derecha.

Es importante entender que los cuerpos no son libres de moverse independientemente. Ambos bloques pueden ser analizados como *partículas con movimiento dependiente*. Es decir, a nivel de magnitudes y según la convención de signos de los DCL, se tiene que:

$$\ddot{u}_A = \ddot{u}_B \qquad\qquad \dot{u}_A = \dot{u}_B$$

**Opción 1**: $\ddot{u}_A > 0$ (con lo que $\ddot{u}_B > 0$, $\dot{u}_A > 0$, y $\dot{u}_B > 0$)

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Esto se traduce en asumir que el par $(F_r)^I$ es el correcto. Utilizando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton para ambos bloques:

$$\text{Bloque A} \qquad T\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} + (F_r)_A\begin{Bmatrix}-1\\0\end{Bmatrix} + W_A\begin{Bmatrix}-\sin 60°\\-\cos 60°\end{Bmatrix} + N_A\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix} = m\begin{Bmatrix}\ddot{u}_A\\0\end{Bmatrix}$$

$$\text{Bloque B} \qquad T\begin{Bmatrix}-1\\0\end{Bmatrix} + (F_r)_B\begin{Bmatrix}-1\\0\end{Bmatrix} + W_B\begin{Bmatrix}\sin 30°\\-\cos 30°\end{Bmatrix} + N_B\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix} = m\begin{Bmatrix}\ddot{u}_B\\0\end{Bmatrix}$$

Sabemos además que:

$$W_A = W_B = mg \qquad (F_r)_A = \mu_k N_A \qquad (F_r)_B = \mu_k N_B \qquad \ddot{u}_A = \ddot{u}_B$$

, que reemplazado en las ecuaciones de Newton anteriores:

$$\begin{aligned}
1^{\text{ra}}\text{ ecuación:} &\qquad T - \mu_k N_A - mg\left(\sqrt{3}/2\right) = m\,\ddot{u}_A \\
2^{\text{da}}\text{ ecuación:} &\qquad -mg\,(1/2) + N_A = 0 \quad\longrightarrow\quad N_A = 1/2\,mg \\
3^{\text{ra}}\text{ ecuación:} &\qquad -T - \mu_k N_B + mg\,(1/2) = m\,\ddot{u}_B \\
4^{\text{ta}}\text{ ecuación:} &\qquad -mg\left(\sqrt{3}/2\right) + N_B = 0 \quad\longrightarrow\quad N_B = \sqrt{3}/2\,mg
\end{aligned}$$

Reemplazando los valores de $N_A$ y $N_B$ en la 1$^{\text{ra}}$ y 3$^{\text{ra}}$ ecuación:

$$\begin{aligned}
T - \mu_k\,(1/2)\,mg - mg\left(\sqrt{3}/2\right) &= m\,\ddot{u}_A \\
-T - \mu_k\left(\sqrt{3}/2\right)mg + mg\,(1/2) &= m\,\ddot{u}_B
\end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones para eliminar la tensión $T$, y reemplazando $\ddot{u}_A = \ddot{u}_B$:

$$\begin{aligned}
-mg\left[\mu_k\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\right] &= 2\,m\,\ddot{u}_A \\
g\left(\frac{9-11\sqrt{3}}{40}\right) &= \ddot{u}_A
\end{aligned}$$

Obtuvimos $\ddot{u}_A < 0$, lo que es contrario a nuestro supuesto en el DCL. Es decir, la fuerza de roce que utilizamos no era la correcta.

**Opción 2**: $\ddot{u}_A < 0$ (con lo que $\ddot{u}_B < 0$, $\dot{u}_A < 0$, y $\dot{u}_B < 0$)

Esto se traduce en asumir que el par $(F_r)^{II}$ es el correcto. Repitiendo el análisis con las nuevas direcciones para la fuerza de roce, se llega a las siguientes dos ecuaciones (luego de todos los reemplazos correspondientes):

$$\begin{aligned}
T + \mu_k\,(1/2)\,mg - mg\left(\sqrt{3}/2\right) &= m\,\ddot{u}_A \\
-T + \mu_k\left(\sqrt{3}/2\right)mg + mg\,(1/2) &= m\,\ddot{u}_B
\end{aligned}$$

, con lo que se obtiene:

$$\ddot{u}_A = g\left(\frac{11-9\sqrt{3}}{40}\right) = -0{,}1147\,g = -1{,}1253\,\text{m/s}^2$$

Esta aceleración es la correcta (con $\ddot{u}_A = \ddot{u}_B$) ya que satisface nuestro supuesto.

**Nota 1:** Es importante ver que la solución correcta (DCL con opción 2) no es simplemente cambiarle el signo a la solución errada (DCL con opción 1). Es necesario volver a hacer el análisis.

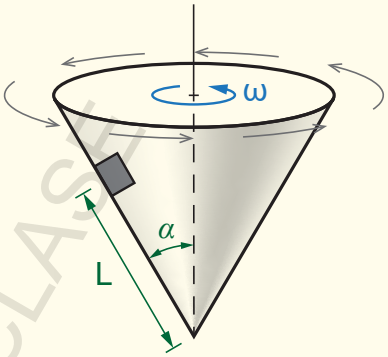
**Nota 2:** En este problema, los movimientos de ambos bloques están ligados, i.e. $\dot{u}_A = \dot{u}_B$ según la orientación de los ejes. Las ligaduras con poleas requieren de un estudio más cuidadoso y se estudiarán prontamente.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

**Ejemplo**

Basado en compilado S. Urrutia, Problemas 2.6 & 2.7

un bloque de masa $m$ se apoya sobre la superficie interna de un cono de ángulo $\alpha$ que gira con rapidez angular $\omega$ constante. La masa se encuentra a una distancia $L$ del ápice del cono y no desliza gracias a un coeficiente de roce $\mu$. Asuma que la fuerza de roce apunta "hacia arriba" por la superficie del cono, i.e. el bloque quiere deslizar hacia abajo. Se pide determinar:

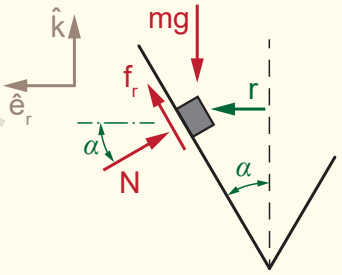



a) La resultante de fuerzas $\mathbf{f}$ que actúa sobre la masa (fuerza neta).

b) La magnitud de la fuerza normal.

c) El coeficiente de roce mínimo $\mu_{\min}$

El primer paso consiste en hacer un DCL del bloque. Para ello, se toma una sección axisimétrica, i.e. en el plano $\hat{\mathbf{e}}_r - \hat{\mathbf{k}}$, como muestra la Figura al costado. Se debe tener especial cuidado en identificar correctamente el sentido positivo de $\hat{\mathbf{e}}_r$ en la Figura (dirección en la que $r$ aumenta).




La fuerza neta se calcula sumando todas las fuerzas en sus respectivas componentes $\hat{\mathbf{e}}_r - \hat{\mathbf{k}}$ (no hay fuerzas actuando en $\hat{\mathbf{e}}_\theta$):

$$\mathbf{f} = (f_r \sin\alpha - N\cos\alpha)\,\hat{\mathbf{e}}_r + (f_r\cos\alpha + N\sin\alpha - mg)\,\hat{\mathbf{k}}$$

En la dirección radial se tiene la aceleración centrípeta; necesaria para que el bloque gire con el cono en trayectoria circular. Mientras que en el eje $\hat{\mathbf{k}}$, la aceleración es nula ya que el bloque no desliza (no cambia su coordenada $z$). Postulando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_z = 0 \quad &\longrightarrow \quad f_r\cos\alpha + N\sin\alpha - mg = 0 \\ \mathbf{f}_r = m\,a_c \quad &\longrightarrow \quad f_r\sin\alpha - N\cos\alpha = m\left(-r\,\omega^2\right) \end{aligned}$$

Utilizando la geometría del problema, podemos relacionar el radio con la distancia al ápice:

$$L\sin\alpha = r$$

, que reemplazado en el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_r\cos\alpha + N\sin\alpha - mg &= 0 \\ f_r\sin\alpha - N\cos\alpha &= -m\,L\,\omega^2\sin\alpha \end{aligned}$$

Multiplicando la 1$^{\text{ra}}$ ecuación por $\cos\alpha$ y la 2$^{\text{da}}$ por $\sin\alpha$, y luego sumando ambas se obtiene:

$$f_r = m\left(g\cos\alpha - L\,\omega^2\sin^2\alpha\right)$$

Del mismo modo, si multiplicamos la 1$^{\text{ra}}$ ecuación por $\sin\alpha$ y la 2$^{\text{da}}$ por $\cos\alpha$, y restando ambas se obtiene:

$$N = m\sin\alpha\left(g + L\,\omega^2\cos\alpha\right)$$

El coeficiente de roce mínimo se calcula con la condición de que $f_r \le (f_r)_{\max} = \mu N$. Se debe recordar que $f_r$ puede ser cualquier valor hasta el máximo $(f_r)_{\max}$, y no necesariamente siempre

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

igual a este valor. Finalmente, el bloque no deslizará por el cono si se cumple:

$$\begin{aligned} f_r &\leq \mu N \\ m\left(g\,\cos\alpha - L\,\omega^2\,\sin^2\alpha\right) &\leq \mu\, m\,\sin\alpha\left(g + L\,\omega^2\,\cos\alpha\right) \\ \frac{1}{\sin\alpha}\left[\frac{g\,\cos\alpha - L\,\omega^2\,\sin^2\alpha}{g + L\,\omega^2\,\cos\alpha}\right] &= \frac{g\,\cot\alpha - L\,\omega^2\,\sin\alpha}{g + L\,\omega^2\,\cos\alpha} \leq \mu \end{aligned}$$

Es decir, el coeficiente de roce mínimo es:

$$\mu_{\min} = \frac{g\,\cot\alpha - L\,\omega^2\,\sin\alpha}{g + L\,\omega^2\,\cos\alpha}$$

**Nota:** Mientras más rápido gira el cono (mayor $\omega$), el valor de $\mu_{\min}$ decrece. Es decir, necesitamos menos roce para mantener el bloque quieto. Si $\omega$ aumenta demasiado se podría dar vuelta $f_r$ para evitar que el bloque salga volando hacia "arriba" (dirección $+z$). Para analizar ese caso se debe hacer un DCL nuevo.

## 3.4. Poleas y ligaduras

### 3.4.1. Movimiento dependiente

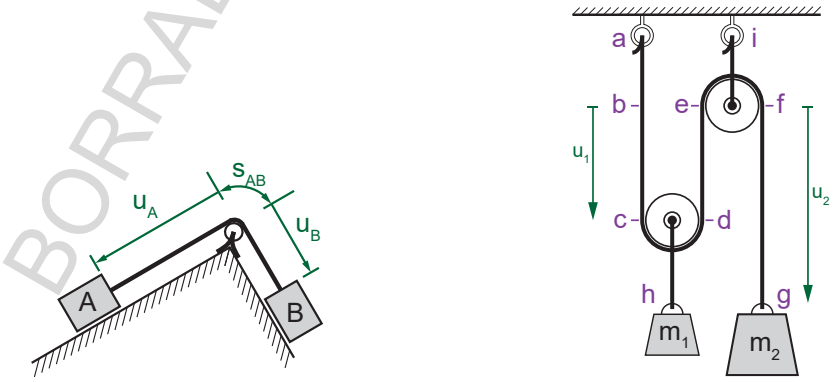
En ciertos casos, los movimientos de partículas están vinculados (ligados o conectados). En el caso de la Figura 3.8(a), si el largo total de la cuerda es $\ell_T$, entonces:

$$u_A + s_{AB} + u_B = \ell_T$$

, donde $s_{AB}$ es la longitud de arco donde la cuerda hace contacto con la polea. Derivando respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \dot{u}_A + \dot{u}_B = 0 \quad \longrightarrow \quad & \dot{u}_A = -\dot{u}_B \\ & \ddot{u}_A = -\ddot{u}_B \end{aligned}$$

Es decir, si un bloque sube, el otro tiene que bajar porque $\dot{u}_A = -\dot{u}_B$. Análogamente, si un bloque acelera cuesta arriba, el otro lo hace cuesta abajo ($\ddot{u}_A = -\ddot{u}_B$).




(a) (b)

Figura 3.8: Ejemplos de movimiento dependiente (*ligaduras*): **(a)** bloques conectados por una cuerda simple; y **(b)** masas conectadas por un sistema de cuerda y poleas.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

En este estudio, se asume que la cuerda y polea son "ideales". Una *cuerda ideal* es una cuerda cuya masa es despreciable y no se estira debido a la fuerza de tracción en ella. Una *polea ideal* tiene masa despreciable (inercia despreciable) y la cuerda puede girar sobre ella sin roce.

Cuando el sistema de poleas es más complejo, se debe:

1) Identificar las cuerdas cuyas longitudes no deben variar.

2) Definir las posiciones de las partículas o cuerpos móviles en función de los segmentos de cuerda variables.

3) Derivar las expresiones obtenidas.

En la Figura 3.8(b), son constantes los segmentos de cuerda:

$$\ell_{ab}\,,\ s_{cd}\,,\ s_{ef}\,,\ \ell_{ch}\,,\ \ell_{ie}$$

, mientras que son variables:

$$\ell_{bc}\,,\ \ell_{de}\,,\ \ell_{fg}$$

Como la cuerda principal no se estira, el largo total es igual a la suma de sus segmentos fijos y variables. Los segmentos fijos no son de interés, y con ello:

$$\ell_{bc} + \ell_{de} + \ell_{gf} = 2\,\ell_{bc} + \ell_{gf} = \ell_T \quad \text{(constante)}$$

Relacionando los segmentos con las posiciones de las masas:

$$2\,u_1 + u_2 = \ell_T$$

, y tomado derivadas temporales:

$$2\,\dot{u}_1 = -\dot{u}_2 \qquad\qquad 2\,\ddot{u}_1 = -\ddot{u}_2$$

¿Por qué en la Figura 3.8(b) se mide $u_1$ desde el punto $b$ y no desde $a$?

Es importante notar que pese a tener dos posiciones ($u_1$ y $u_2$), en realidad hay sólo 1 *grado–de–libertad*[a]. Es decir, una posición es la verdadera variable y la otra es una variable dependiente.

Se puede medir desde $a$ u otro punto fijo (e.g. el techo), e igual resultarán las mismas ecuaciones de ligadura:

$$2\,\dot{u}_1 = -\dot{u}_2 \qquad\qquad 2\,\ddot{u}_1 = -\ddot{u}_2$$

[a] GDL o DOF, del inglés *degree–of–freedom*.

El largo de las cuerdas $\ell_T$ podría no ser constante. Esto ocurre cuando se tienen máquinas que recuperan o entregan cuerda. Si en el ejemplo anterior se tuviera una máquina en el punto $a$ que recupera cuerda con velocidad constante $\overline{v}$, entonces se tendrá:

$$\begin{aligned} \ell_T\,(t) = \ell_0 - \overline{v}\,t &= 2\,u_1 + u_2 \\ \rightarrow \qquad -\overline{v} &= 2\,\dot{u}_1 + \dot{u}_2 \\ \rightarrow \qquad 0 &= 2\,\ddot{u}_1 + \ddot{u}_2 \end{aligned}$$

En el caso de que la velocidad de recuperación o entrega de cuerda sea diferente, es simplemente cosa de introducir la cinemática de la cuerda en $\ell_T\,(t)$.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

### 3.4.2. Múltiples grados–de–libertad

En los casos anteriores, las posiciones de todas las partículas del sistema quedan determinadas al conocer la posición de una de ellas: sistema de 1 GDL. En cambio, el sistema de la Figura 3.9 tiene 2 GDL pese a tener 3 posiciones de interés: $z_1$, $z_2$, y $z_3$. En este caso específico, podemos mover independientemente las masas 1 y 3; mientras que la posición de la masa 2 depende de las anteriores. Podemos identificar 2 cuerdas que participan en el sistema:

$$\ell_A = z_3 + 2\,z_B + \text{cte}$$
$$\ell_B = z_1 + z_A + (z_A - z_B) + \text{cte}$$

> La posición de la polea $B$ es una variable auxiliar. Si la polea $B$ tuviera masa entonces participaría en la dinámica del problema al ser un cuerpo más. Es decir, si la polea no fuera *ideal*, su posición sería una variable más del sistema.

Derivando temporalmente las expresiones anteriores:

$$\dot{z}_3 + 2\,\dot{z}_B = 0 \qquad \dot{z}_1 + 2\,\dot{z}_A - \dot{z}_B = 0$$
$$\ddot{z}_3 + 2\,\ddot{z}_B = 0 \qquad \ddot{z}_1 + 2\,\ddot{z}_A - \ddot{z}_B = 0$$

> En la ecuación anterior es imposible que todos los valores sean positivos: cuando algunos cuerpos suben, otros deben bajar.

La posición $z_B$ es una variable auxiliar. Debido a que no es de interés, despejaremos $\dot{z}_B$ y $\ddot{z}_B$ en ambas ecuaciones e igualaremos ambas:

$$\dot{z}_B = -\frac{1}{2}\dot{z}_3 \qquad \dot{z}_B = \dot{z}_1 + 2\,\dot{z}_A$$

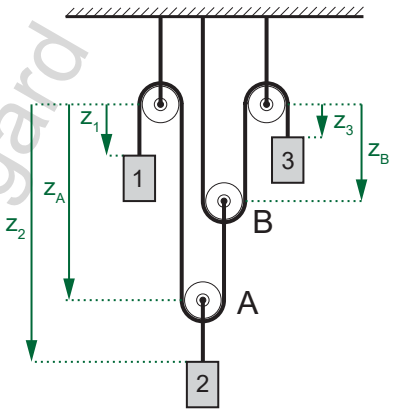



Figura 3.9: Sistema de poleas con 3 masas y 2 grados–de–libertad.

Notar que la posición de la masa 2 es $z_2 = z_A + \text{cte}$, donde las constantes no son de interés. Es decir:

$$\dot{z}_A = \dot{z}_2 \qquad \ddot{z}_A = \ddot{z}_2$$

Reemplazando en las ecuaciones anteriores, se obtiene una única ecuación que define la ligadura del sistema (movimiento dependiente):

$$\dot{z}_3 + 2\,\dot{z}_1 + 4\,\dot{z}_2 = 0$$
$$\ddot{z}_3 + 2\,\ddot{z}_1 + 4\,\ddot{z}_2 = 0$$

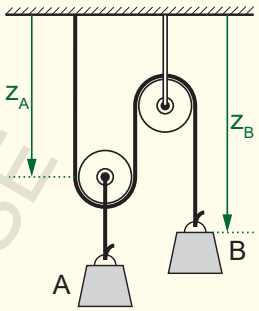
Con la ecuación anterior, es importante notar que hay 2 movimientos independientes y uno dependiente.

Las ecuaciones de ligadura se deben utilizan en conjunto con la $2^{\text{da}}$ ley de Newton para resolver problemas de múltiples partículas o cuerpos conectados.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

**Ejemplo**

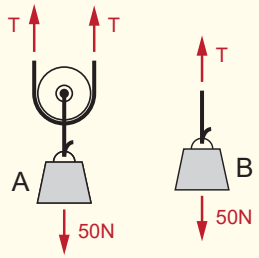
En el sistema de la Figura, ambos pesos son iguales con $W = 50\,\text{N}$. Desprecie la masa de las cuerdas y poleas, extensión de las cuerdas y roce de estas. Determine las aceleraciones de las masas.




El primer paso consiste en hacer los DCL de las masas. En el caso de la masa $A$ se ha incluido la polea: la polea no tiene masa y permite visualizar de mejor manera las fuerzas sobre la masa. Se debe notar también que por comodidad se ha definido el eje $+z$ apuntando hacia abajo.

Aplicando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton con ambos bloques, se tiene:

$$\begin{aligned} 50 - 2\,T &= m\,\ddot{z}_A \\ 50 - T &= m\,\ddot{z}_B \end{aligned}$$




La ligadura, vinculación, o movimiento dependiente; entrega la ecuación faltante:

$$\ddot{z}_B = -2\,\ddot{z}_A$$

Ahora tenemos tres ecuaciones y tres incógnitas: es posible resolver para las aceleraciones y tensión en la cuerda.

$$\left.\begin{aligned} 50 - 2\,T &= m\,\ddot{z}_A \\ 50 - T &= m\,\ddot{z}_B \\ \ddot{z}_B &= -2\,\ddot{z}_A \end{aligned}\right\} \quad \longrightarrow \quad T = 30\,\text{N}\,,\ \ddot{z}_A = -\frac{1}{5}g\,,\ \ddot{z}_B = \frac{2}{5}g$$

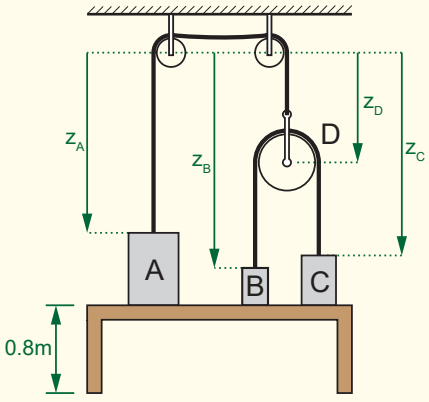
Es decir, el peso $A$ sube con aceleración $-\frac{g}{5}$, mientras que el peso $B$ baja con aceleración $\frac{2g}{5}$.

**Nota:** El signo de la tensión $T$ es un buen indicador de errores. Algo estaría mal si hubiera dado negativa.

**Ejemplo**

Basado en McGill & King 4$^{\text{th}}$ ed, Problem 2.57

Se tiene un sistema de 3 masas que se encuentra en reposo sobre una mesa, como muestra la Figura. Desprecie el peso de la cuerda, polea, el roce con la polea, y el estiramiento de la cuerda. Las masas son $m_A = 50\,\text{kg}$, $m_B = 20\,\text{kg}$, y $m_C = 30\,\text{kg}$. Se pide determinar:




a) Las aceleraciones de las masas luego que se retira la mesa.

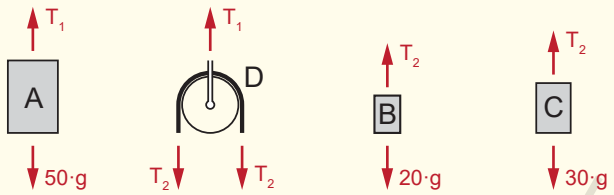
b) ¿Cuál bloque toca el piso primero?

c) ¿Cuánto tiempo tarda en hacerlo?

**Nota:** Los problemas de varias masas son poco frecuentes debido al gran número de ecuaciones que deben ser resueltas de forma simultánea.

El primer paso consiste en hacer DCLs para cada componente del sistema.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard




Aplicando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton para cada DCL en su dirección vertical se obtienen las siguientes 4 ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned} 50\,g - T_1 &= m_A\,\ddot{z}_A && \text{ecuación (a)} \\ 2\,T_2 - T_1 &= 0 \quad \longrightarrow \quad T_1 = 2\,T_2 \\ 20\,g - T_2 &= m_B\,\ddot{z}_B && \text{ecuación (b)} \\ 30\,g - T_2 &= m_C\,\ddot{z}_C && \text{ecuación (c)} \end{aligned}$$

**Nota:** Un error frecuente consiste en creer que la polea no acelera. La verdad es que sí lo hace, pero debido a que su masa es despreciable (según el enunciado), entonces $m\,\ddot{y}_D = 0$ y gracias a ello sabemos que $T_1 = 2\,T_2$. Si la polea tuviera masa, participaría en la dinámica del problema.

El sistema tiene dos cuerdas:

$$\begin{aligned} z_A + z_D + \text{const} &= \ell_1 && \longrightarrow && \dot{z}_A + \dot{z}_D = 0 \\ (z_C - z_D) + (z_B - z_D) + \text{const} &= \ell_2 && \longrightarrow && \dot{z}_C + \dot{z}_B - 2\,\dot{z}_D = 0 \end{aligned}$$

Usando ambas ecuaciones eliminamos $\dot{z}_D$ ya que no es de interés, con lo que se obtienen las siguientes ecuaciones de ligadura:

$$\begin{aligned} 2\,\dot{z}_a + \dot{z}_B + \dot{z}_C &= 0 \\ 2\,\ddot{z}_a + \ddot{z}_B + \ddot{z}_C &= 0 && \text{ecuación (d)} \end{aligned}$$

Tenemos 4 ecuaciones (ecuaciones a→d) y 4 incógnitas (luego de reemplazar $T_1 = 2\,T_2$). Usar matrices suele ser mejor para resolver 4 o más ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 20 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 30 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_A \\ \ddot{z}_B \\ \ddot{z}_C \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 50\,g \\ 20\,g \\ 30\,g \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/25 \\ 0 & 1 & 0 & 1/20 \\ 0 & 0 & 1 & 1/30 \\ 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{2}{25} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_A \\ \ddot{z}_B \\ \ddot{z}_C \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g \\ g \\ g \\ -4\,g \end{Bmatrix}$$

Con la última ecuación se puede obtener la tensión $T_2$:

$$-\frac{1}{5}\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) T_2 = -4\,g$$

$$T_2 = \frac{1200}{49}\,g$$

**Nota:** La tensión resultó positiva lo que es un buen indicador.
En el sistema de la matriz, las aceleraciones de las masas están todas en términos de la tensión $T_2$:

$$\ddot{z}_A = \frac{1}{49}g\ \downarrow \qquad \ddot{z}_B = -\frac{11}{49}g\ \uparrow \qquad \ddot{z}_C = \frac{9}{49}g\ \downarrow$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Tanto la masa $A$ como la $C$ caen, pero la masa $C$ será la primera en tocar el piso. El instante $t^\star$ en que hace contacto con el suelo se obtiene de:

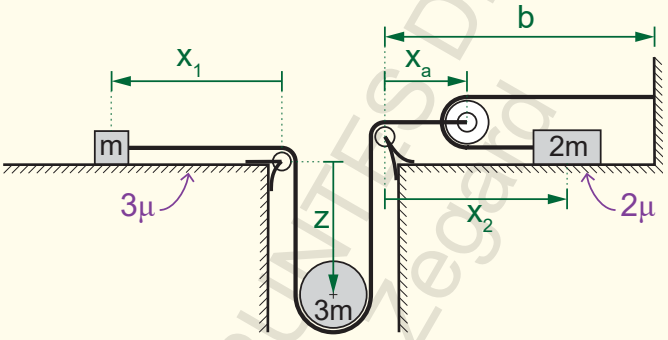
$$z_C\left(t^\star\right) = \ddot{z}_C \frac{\left(t^\star\right)^2}{2} = \left(\frac{9}{49}g\right)\frac{\left(t^\star\right)^2}{2} = 0{,}8\,\text{m} \qquad +z \text{ es positivo hacia } \downarrow$$

$$t^\star = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{49}{9}\right)\left(\frac{2}{g}\right)} = \frac{14}{3}\sqrt{\frac{2}{5\,g}} = 0{,}9423\,\text{s}$$

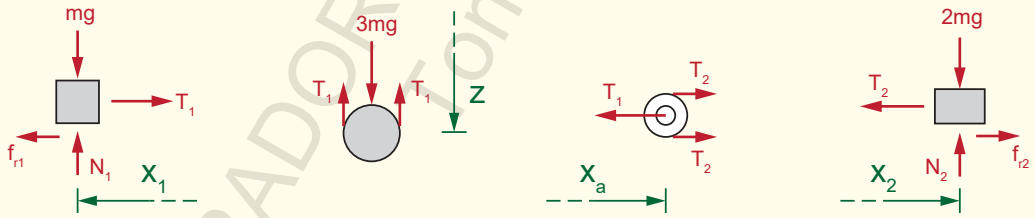
**Ejemplo**

Ayudantía de P. Ochoa del 2018. Probablemente modificado de Urrutia, Problema 2.2

En el sistema de 3 masas de la Figura, se tienen dos superficies con coeficientes de roce $3\mu$ y $2\mu$, respectivamente. Las cuerdas y poleas son ideales: masa despreciable, no hay roce entre ellas, y no se estiran. Determine el $\mu$ mínimo para que el sistema no se mueva.




El sistema se moverá si hay un desplazamiento de la masa $m$ o de la masa $2m$. Es decir, no es necesario que ambas se muevan para que el sistema entre en movimiento, sino que basta con una de ellas. Comenzando por hacer un DCL de los cuerpos involucrados:




Se tiene equilibrio de fuerzas en todos los cuerpos debido a que la aceleración en todos ellos es cero, i.e., $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \ddot{x}_a = \ddot{z} = 0$. En el caso de la polea (cuya masa también es despreciable), se tiene:

$$-T_1 + 2\,T_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad T_1 = 2\,T_2$$

El equilibrio de la masa circular resulta en:

$$3\,mg - 2\,T_1 = 0 \quad \longrightarrow \quad T_1 = \frac{3}{2}mg$$

$$T_2 = \frac{3}{4}mg$$

Equilibrio horizontal en la masa $m$ resulta en:

$$f_{r1} - T_1 = 0 \quad \longrightarrow \quad f_{r1} = \frac{3}{2}mg$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Equilibrio horizontal en la masa $2m$ resulta en:

$$f_{r2} - T_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad f_{r2} = \frac{3}{4}mg$$

Sabemos que la fuerza de roce estático puede tomar un valor máximo igual a:

$$(f_r)_{\max} = \mu_{\text{superficie}}\, N$$

Es decir, debemos garantizar que $(f_{r1} \leq 3\mu\, N_1)$ y que $(f_{r2} \leq 2\mu\, N_2)$:

$$f_{r1} = \frac{3}{2}mg \leq 3\mu\, N_1 = 3\mu\, mg \qquad f_{r2} = \frac{3}{4}mg \leq 2\mu\, N_2 = 4\mu\, mg$$
$$\frac{1}{2} \leq \mu \qquad \frac{3}{16} \leq \mu$$

Controla el lado izquierdo (masa $m$): si el coeficiente de roce es $\mu = \frac{1}{2}$ y el sistema se encuentra en reposo; se mantendrá en reposo.

## 3.5. Roce viscoso (amortiguación)

Hemos visto fuerzas que son invariantes con la posición (e.g. la gravedad), y fuerzas que varían con la posición (e.g. resortes). El roce viscoso, o amortiguamiento, es una fuerza que depende de la velocidad.

$$\text{fuerza de gravedad:} \quad \mathbf{f}_g = -mg\,\hat{\mathbf{k}}$$
$$\text{fuerza elástica:} \quad \mathbf{f}_e = -k\,u\,\hat{\mathbf{u}}$$
$$\text{fuerza viscosa:} \quad \mathbf{f}_v = -c\,\dot{u}\,\hat{\dot{\mathbf{u}}}$$

Ejemplos de roce viscoso: roce de un automóvil con el aire, paracaídas, torpedo en el agua, y amortiguador de cierre de puertas.

El roce viscoso podría no necesariamente depender de forma lineal con la velocidad. Por ejemplo, es frecuente encontrar casos en que varía según el cuadrado de la velocidad:

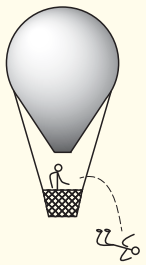
$$f_v = -c\,\dot{u}^2\,\hat{\dot{\mathbf{u}}}$$

La dependencia podría incluso ser diferente, e.g. $f_v = -c\,\dot{u}^{1,5}\,\hat{\dot{\mathbf{u}}}$ u otra; pero lo relevante de esta fuerza es que está asociada a la velocidad.

> La solución de EDOs cuya aceleración dependía de la velocidad será de utilidad ahora.

**Ejemplo**

Un paracaidista se lanza desde un globo a gran altura. Inicialmente su velocidad es nula, y su roce con el aire (viscoso) es igual a $b$. Se pide determinar:



a) La aceleración al inicio de su caída $\ddot{u}_0$.

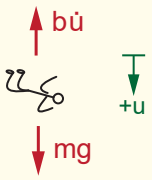
b) La velocidad límite $\dot{u}_{\text{límite}}$ que puede alcanzar (velocidad máxima).

c) Una expresión para su velocidad de caída en el tiempo.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Comenzamos haciendo un DCL del paracaidista, y aplicando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton:

$$m\,\ddot{u} = mg - b\,\dot{u}$$




Al momento de lanzarse, el paracaidista tiene $v_0 = \dot{u}_0 = 0$, con lo que:

$$m\,\ddot{u} = mg - \underbrace{b\,\dot{u}}_{0}$$

$$\ddot{u}_0 = g$$

Es decir, el paracaidista inicialmente acelera con $g$ hacia abajo.

Cuando el paracaidista alcanza su velocidad límite (velocidad máxima) es porque deja de acelerar:

$$\underbrace{m\,\ddot{u}}_{0} = mg - b\,\dot{u}$$

$$\dot{u}_{\text{límite}} = \frac{mg}{b}$$

Es decir, la velocidad límite del paracaidista es $\frac{mg}{b}$.

La expresión para la velocidad en el tiempo se obtiene de resolver la EDO. Sabemos que $\ddot{u} = \frac{\mathrm{d}\dot{u}}{\mathrm{d}t}$, con lo que:

$$m\,\frac{\mathrm{d}\dot{u}}{\mathrm{d}t} = mg - b\,\dot{u}$$

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{g - \frac{b}{m}\,\dot{u}}\,\mathrm{d}\dot{u}$$

, con lo que integrando a ambos lados:

$$t = -\frac{m}{b}\,\log\left(g - \frac{b}{m}\,\dot{u}\right) + C_1$$

$$A\,e^{-\frac{b\,t}{m}} = g - \frac{b}{m}\,\dot{u}$$

$$\dot{u} = \frac{mg}{b}\left[1 - \frac{A}{g}\,e^{-\frac{b\,t}{m}}\right]$$

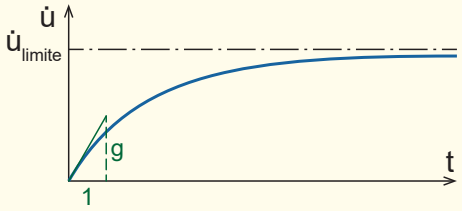
Sabemos que $\dot{u}_0 = \dot{u}\,(0) = 0$, con lo que podemos obtener el valor de $A$:

$$0 = \frac{mg}{b}\left[1 - \frac{A}{g}\,e^{0}\right] \qquad \longrightarrow \qquad A = g$$

Finalmente, la expresión de la velocidad en el tiempo es:

$$\dot{u}\,(t) = \frac{mg}{b}\left[1 - e^{-\frac{b\,t}{m}}\right]$$

La gráfica al costado muestra la evolución de la velocidad del paracaidista en el tiempo, cuya pendiente inicial es igual a $g$, y acelera asintóticamente a $\dot{u}_{\text{límite}}$.



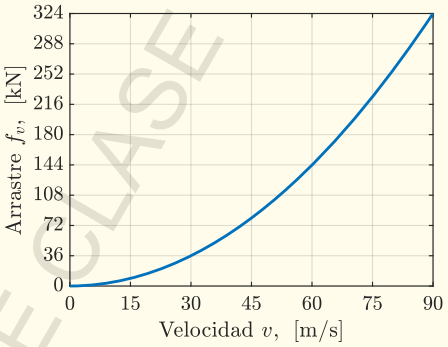

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

**Ejemplo**




Basado en Meriam 9th ed, Problem 3/25

Un avión jet de masa $m = 9\,\text{ton}$ aterriza tocando la pista con velocidad $v_0 = 90\,\text{m/s}$, instante en el cual despliega un paracaídas y apaga sus motores. El arrastre total sobre el avión varía con la velocidad como muestra la gráfica y se puede aproximar con $f_v = c\,v^2$, donde $c$ es una constante. Determine la distancia requerida para que el avión reduzca su velocidad a $v = 45\,\text{m/s}$.




La gráfica $f_v$—$v$ permite determinar la constante de roce viscoso $c$. Cualquier par de valores sirve para ello, y en este caso se toma el valor máximo $f_v = 324000\,\text{N}$ cuando la velocidad es $v = 90\,\text{m/s}$:

$$c\,v^2 = f_v \quad \longrightarrow \quad c\,(90^2) = 324000$$
$$c = 40\ \text{N s}^2/\text{m}^2$$

El DCL del avión entrega como única fuerza actuando $f_v$. Postulando la 2da ley de Newton y considerando como positivo el sentido en que el avión se mueve:

$$\sum \mathbf{f} = m\,\ddot{\mathbf{u}} \quad \longrightarrow \quad -c\,v^2 = m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$
$$-\frac{c}{m}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{v^2}\,\mathrm{d}v$$
$$-\frac{c}{m}\,t + C_1 = -\frac{1}{v}$$
$$v = \frac{m}{c\,t - m\,C_1}$$
$$v = \frac{m}{c\,t + C_1} \qquad (\text{redefiniendo } -m\,C_1 \to C_1)$$

Sabemos que la velocidad inicial es $v_0 = 90\,\text{m/s}$, con lo que se puede obtener $C_1$:

$$v\,(0) = 90\,\text{m/s} \quad \longrightarrow \quad 90 = \frac{m}{0 + C_1}$$
$$C_1 = \frac{m}{90}$$

Integrando una vez más para obtener la posición:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = v = \frac{m}{c\,t + \frac{m}{90}} = \frac{90}{90\,\frac{c}{m}\,t + 1}$$
$$u = \frac{m}{c}\,\log\,(m + 90\,c\,t) + C_2$$

Si fijamos el origen $u = 0$ en el punto donde el avión toca el piso, entonces $u_0 = 0$ y con ello:

$$u\,(0) = 0 \quad \longrightarrow \quad 0 = \frac{m}{c}\,\log\,(m) + C_2$$
$$C_2 = -\frac{m}{c}\,\log\,(m)$$

Finalmente, las ecuaciones que describen el movimiento del avión son:

$$v\,(t) = \frac{90}{90\,\frac{c}{m}\,t + 1} \qquad ; \qquad u\,(t) = \frac{m}{c}\,\log\left(1 + 90\,\frac{c}{m}\,t\right)$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

El instante en que el avión en redujo su velocidad a $45\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$ es:

$$v\left(t^{\star}\right) = 45 = \frac{90}{\frac{2}{5}\,t^{\star} + 1} \qquad \longrightarrow \qquad t^{\star} = \frac{5}{2}\ \mathrm{s}$$

Su posición medida desde el origen, el punto donde hace contacto con el suelo, es:

$$\Delta u = u\left(t^{\star}\right) - u_0 = u\left(t^{\star}\right) - 0 = 225\,\log\left(1 + \frac{2}{5}\,t^{\star}\right)$$

$$\Delta u = 225\,\log\left(2\right) = 155{,}96\ \mathrm{m}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard