Capítulo 4

Trabajo & Energía

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

La 2$^{\text{da}}$ ley de Newton establece la relación entre la resultante de fuerzas actuando sobre una partícula y la aceleración que experimenta la misma. Por otro lado, podemos integrar la aceleración para obtener la variación de velocidad y de desplazamiento. Extensiones de la relación fuerza–aceleración consisten en:

a) Integrar las fuerzas en función del desplazamiento de la partícula[1]: principio de **trabajo y energía**.

b) Integrar las fuerzas en función del tiempo de aplicación: principio de **impulso y momentum**.

En ambos casos, la integral se podría hacer en función del tiempo: en el primer caso de la fuerza con un diferencial desplazamiento (resultado es escalar), y en el segundo caso es la fuerza en el tiempo (resultado es vectorial). En esta sección, nuestro estudio estará enfocado al primer caso: trabajo y energía.

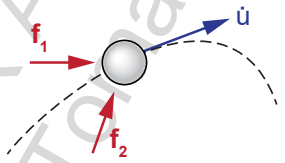


Figura 4.1: Partícula de masa m que se mueve con velocidad $\dot{\mathbf{u}}$, y sobre la cual actúa una fuerza neta $\mathbf{f} = \sum \mathbf{f}_i$.

La Figura 4.1 muestra una partícula de masa m sobre la cual actúan fuerzas. La 2$^{\text{da}}$ ley de Newton establece que (Ecuación (3.1)):

$$\sum \mathbf{f}_i = \mathbf{f} = m\,\ddot{\mathbf{u}}$$

Esta es una ecuación vectorial; tiene componentes asociados a cada eje del sistema de coordenadas. Tomando el producto punto con la velocidad a ambos lados de la ecuación:

$$\mathbf{f}\cdot\dot{\mathbf{u}} = m\,\ddot{\mathbf{u}}\cdot\dot{\mathbf{u}}$$

$$\mathbf{f}\cdot\dot{\mathbf{u}} = m\,\frac{\mathrm{d}\dot{\mathbf{u}}}{\mathrm{d}t}\cdot\dot{\mathbf{u}} = \frac{m}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\mathbf{u}}\cdot\dot{\mathbf{u}}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}\,\dot{\mathbf{u}}\cdot\dot{\mathbf{u}}\right)$$

$$\mathbf{f}\cdot\dot{\mathbf{u}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}\,|\dot{\mathbf{u}}|^2\right)$$

[1]En realidad, el producto de las fuerzas por el desplazamiento será la integral de la fuerza por la velocidad. La integral de la velocidad es la variación de la posición; es decir, el desplazamiento.

Integrando en función del tiempo entre instantes t_1 y t_2:

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, \mathrm{d}t = \frac{m}{2}\left[|\dot{\mathbf{u}}(t_2)|^2 - |\dot{\mathbf{u}}(t_1)|^2\right]} \tag{4.1}$$

, donde $U_{1\to 2} = U_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, \mathrm{d}t$ = es el *trabajo* ejercido por la resultante de las fuerzas externas sobre la partícula en $t_1 \to t_2$;
$T = \frac{m}{2}|\dot{\mathbf{u}}|^2$ = es la *energía cinética de la partícula*. Con ello, la variación de energía cinética de la partícula es $\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{m}{2}\left[|\dot{\mathbf{u}}(t_2)|^2 - |\dot{\mathbf{u}}(t_1)|^2\right]$.

Las unidades de trabajo (U) y de energía (T) deben ser iguales: $\mathrm{N}\cdot\mathrm{m} = 1\,\mathrm{J}$, donde J es *Joule*. Lo obtenido es una ecuación escalar (a diferencia de una ecuación para cada eje):

$$\text{trabajo sobre la partícula} \;\rightarrow\; U_{12} = \Delta T \;\leftarrow\; \text{variación de energía cinética de la partícula}$$

Una notación alternativa y equivalente a la anterior es:

$$\boxed{T_1 + U_{12} = T_2} \tag{4.2}$$

En esta última queda claro el principio de trabajo y energía: si a un sistema con energía cinética T_1 se le aplica el trabajo U_{12}, terminará con energía cinética T_2.

> En algunos textos, se utilizan las nomenclaturas W y K para trabajo y energía cinética, respectivamente. La explicación que algunos dan es que así se evita confundir: el trabajo con la posición $\mathbf{u}$; y la energía cinética con la tensión en una cuerda T. La verdad es que el problema persiste porque: W se puede confundir con peso W; y la energía cinética K con la rigidez de un resorte k. La diferenciación la suele dar el contexto en que se usan y si son escalares o vectores.

4.1. Trabajo hecho por fuerzas típicas

4.1.1. Trabajo hecho por una fuerza constante

Cuando la fuerza $\mathbf{f}$ es constante en el tiempo, se puede sacar de la integral de trabajo:

$$U_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, \mathrm{d}t = \mathbf{f} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{u}} \, \mathrm{d}t = \mathbf{f} \cdot [\mathbf{u}(t_2) - \mathbf{u}(t_1)]$$

$$U_{12} = \mathbf{f} \cdot \Delta\mathbf{u} \tag{4.3}$$

Es decir, el trabajo es el producto punto de la fuerza por el desplazamiento de la partícula.

El producto punto de la fuerza por el desplazamiento puede ser interpretado de dos formas, como muestra la Figura 4.2:

- como la magnitud de la fuerza multiplicada por la componente del desplazamiento en la dirección de la fuerza.
- como la magnitud del desplazamiento por la componente de fuerza en la dirección del desplazamiento.

Lo que fue previamente explicado en la Sección 1.3.4 pero sin un contexto aplicado.

> La Ecuación (4.3) es comúnmente estudiada en la educación escolar, pero sólo para movimiento rectilíneo (1D). Es decir, en versión escalar, donde el producto punto se transforma en una simple

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

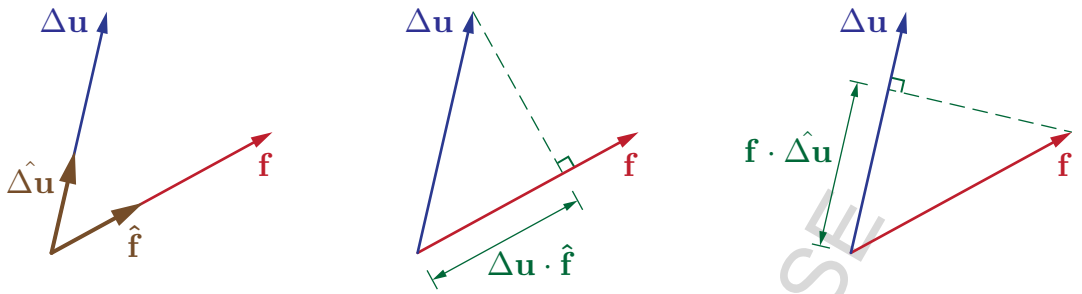


Figura 4.2: Trabajo hecho por una fuerza constante: **(a)** vectores de fuerza $\mathbf{f}$ y de desplazamiento $\Delta\mathbf{u}$, y sus respectivos directores; **(b)** proyección de $\Delta\mathbf{u}$ sobre la dirección $\hat{\mathbf{f}}$; y **(c)** proyección de $\mathbf{f}$ sobre la dirección $\hat{\Delta\mathbf{u}}$.

multiplicación. Olvidar que se trata de un producto punto es un error frecuente en estos problemas.

Otro error común en estos problemas consiste en aplicar la Ecuación (4.3) a casos en que la fuerza no es constante.

4.1.2. Trabajo hecho por una fuerza central

Cuando la fuerza sobre una partícula tiene:

a) una dirección que siempre pasa por un mismo punto fijo central,

b) magnitud que sólo depende de la distancia r entre la partícula y ese punto central;

se tiene entonces una *fuerza central*. En ese caso es conveniente utilizar coordenadas polares[2], donde la velocidad está definida por (Ecuación (2.11)):

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\,\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

La Figura 4.3 ilustra una fuerza central, la que actúa en la dirección $-\hat{\mathbf{e}}_r$ para así siempre pasar por un mismo punto fijo central. Los vectores base son ortogonales entre sí, por lo que se cumple que:

$$\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_r = |\hat{\mathbf{e}}_r|^2 = 1 \qquad \text{y} \qquad \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta = 0$$

El producto punto de la fuerza con la velocidad resulta:

$$\mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} = [-f(r)\ \hat{\mathbf{e}}_r] \cdot \left[\dot{r}\,\hat{\mathbf{e}}_r + r\,\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta\right] = -\dot{r}\ f(r)$$

El trabajo de una fuerza central entre $t_1 \to t_2$ es:

$$U_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}}\ \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} -\dot{r}\ f(r)\ \mathrm{d}t = -\int_{t_1}^{t_2} f(r)\ \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\ \mathrm{d}t$$

Con un cambio de variable de integración, resulta:

$$U_{12} = -\int_{r(t_1)}^{r(t_2)} f(r)\ \mathrm{d}r = -\int_{r_1}^{r_2} f(r)\ \mathrm{d}r$$

Si tenemos una función $\phi(r)$ que es la *antiderivada* de $f(r)$ tal que $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} = f$, entonces el trabajo es:

$$U_{12} = -\phi(r_2) + \phi(r_1) \tag{4.4}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

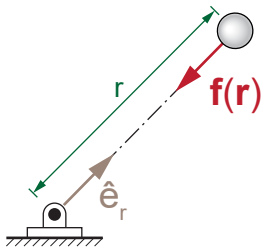


Figura 4.3: Fuerza central: la fuerza $f(r)$ actúa siempre en la dirección $-\hat{\mathbf{e}}_r$, donde el punto central está siempre en la trayectoria de la fuerza.

, donde las constantes en la función $\phi(r)$ no son de importancia ya que se eliminan al calcular el trabajo (lo que realmente nos interesa).

La función $\phi(r)$ recibe el nombre de *potencial*. Es relevante notar que el trabajo hecho es igual a la diferencia de potencial con distinto signo. Es decir:

$$U_{12} = -\left[\phi(r_2) - \phi(r_1)\right] = -\Delta\phi \tag{4.5}$$

Esto nos será de utilidad en las secciones siguientes cuando estudiemos la relación entre trabajo y energía potencial. Algunos potenciales de uso frecuente utilizan la nomenclatura V en vez de ϕ, como se verá en las siguientes secciones.

> La derivación del trabajo hecho por una fuerza central parece muy teórico, pero la realidad es que es una fuerza bastante común. Las dos fuerzas centrales que estudiaremos son: resortes y gravedad a escala planetaria. La gravedad a escala planetaria no actúa en el sentido $-\hat{\mathbf{k}}$, sino que lo hace hacia el centro de los astros; en el sentido $-\hat{\mathbf{e}}_r$.

4.1.3. Trabajo hecho por un resorte lineal (fuerza central)

Un resorte *ideal* que tiene uno de sus extremos fijos, aplica una fuerza central sobre su extremo libre con $f(r)$ conocido:

$$f(r) = k\,(r - \ell_0)$$

, como ilustra la Figura 4.4. El signo es positivo ya que en la derivación anterior se asumió que $f(r)$ apunta en el sentido $-\hat{\mathbf{e}}_r$ (ver Figura 4.3). En este caso, la función $\phi(r)$ es:

$$\phi(r) = \int f(r)\ \mathrm{d}r = \frac{k}{2}\,(r - \ell_0)^2$$

Si definimos el estiramiento del resorte como $\delta = r - \ell_0$, entonces:

$$\phi(r) = \frac{k}{2}\,(r - \ell_0)^2 = \frac{k}{2}\,\delta^2$$

Finalmente, el trabajo hecho por un resorte es:

$$U_{12} = -\frac{k}{2}\left[\delta^2(t_2) - \delta^2(t_1)\right] \tag{4.6}$$

Debido a que un resorte (fuerza elástica) es también una fuerza central, se puede escribir en términos de su *potencial*:

$$U_{12} = -\left[\frac{k}{2}\,\delta_2^2 - \frac{k}{2}\,\delta_1^2\right] = -\Delta V_e \tag{4.7}$$

[2] En el caso 3D correspondería utilizar coordenadas esféricas.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

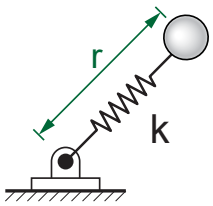


Figura 4.4: Resorte fijo en un extremo que actúa como una fuerza central.

, donde $V_e = \frac{k}{2}\delta^2$ es el *potencial de energía elástica*. Esto nos será de utilidad en las secciones siguientes cuando estudiemos la relación entre trabajo y energía potencial.

> Anteriormente utilizamos ϕ en vez para hablar de la antiderivada de cualquier $f(r)$. En el caso de la fuerza elástica, conocemos su potencial y se suele utilizar la nomenclatura V_e.

4.1.4. Trabajo hecho por la fuerza de gravedad

La fuerza de gravedad es $\mathbf{f}_g = -mg\,\hat{\mathbf{k}}$, y con ello:

$$U_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_g \cdot \dot{\mathbf{u}}\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_g \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbf{u}(t_1)}^{\mathbf{u}(t_2)} \mathbf{f}_g \cdot \mathrm{d}\mathbf{u}$$

, donde se hizo un cambio de variable de integración. El diferencial $\mathrm{d}\mathbf{u}$ se puede descomponer como:

$$U_{12} = \int_{\mathbf{u}(t_1)}^{\mathbf{u}(t_2)} \mathbf{f}_g \cdot \mathrm{d}\mathbf{u} = \int_{\mathbf{u}(t_1)}^{\mathbf{u}(t_2)} -mg\,\hat{\mathbf{k}} \cdot \left(\hat{\mathbf{i}}\,\mathrm{d}x + \hat{\mathbf{j}}\,\mathrm{d}y + \hat{\mathbf{k}}\,\mathrm{d}z\right) = \int_{\mathbf{u}(t_1)}^{\mathbf{u}(t_2)} -mg\,\mathrm{d}z$$

Finalmente, el trabajo hecho por la fuerza de gravedad es:

$$U_{12} = -mg\left[u_z\left(t_2\right) - u_z\left(t_1\right)\right] = -mg\,\Delta z \tag{4.8}$$

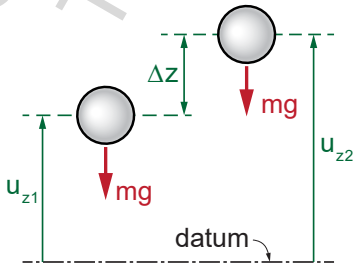


Figura 4.5: Trabajo de la fuerza de gravedad, donde $U_{12} < 0$ si la partícula gana altitud $\Delta z > 0$.

El trabajo hecho por la fuerza de gravedad se puede escribir en términos de un *potencial*:

$$U_{12} = -mg\left[z_2 - z_1\right] = -\Delta V_g \tag{4.9}$$

, donde $V_g = mgz$ es el *potencial de energía gravitatoria*. Esto nos será de utilidad en las secciones siguientes cuando estudiemos la relación entre trabajo y energía potencial.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

El signo del trabajo hecho por la gravedad se puede interpretar fácilmente: una partícula que sube tiene un desplazamiento $\Delta z > 0$ que es contrario a $\downarrow mg$, y por ende el trabajo es negativo.

Cuando la partícula desciende, el trabajo de la gravedad es positivo.

4.2. Fuerzas conservativas y no-conservativas

Cuando el trabajo hecho sólo depende de las posiciones iniciales y finales de la partícula sobre la cual actúan las fuerzas, entonces el trabajo es independiente del trayecto entre el inicio y final. Esto es siempre cierto para las *fuerzas conservativas*.

Cuando el trabajo hecho por una fuerza actuando sobre una partícula depende del trayecto (e.g. distancia recorrida), se trata de una *fuerza no-conservativa*. El roce (o fricción) es un ejemplo de fuerza no-conservativa; mientras más largo sea el camino recorrido, más trabajo hace la fuerza de roce.

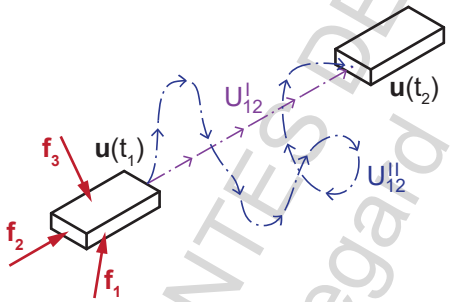


Figura 4.6: Objeto (o partícula) que se desplaza por dos trayectos diferentes entre $\mathbf{u}(t_1) \rightarrow \mathbf{u}(t_2)$: si todas las fuerzas son conservativas se cumple que $U_{12}^I = U_{12}^{II}$; mientras que basta una de ellas no-conservativas para que el trayecto importe y se tenga $U_{12}^I \neq U_{12}^{II}$.

En el ejemplo de la Figura 4.6, se cumple que:

- $U_{12}^I = U_{12}^{II}$ si todas las fuerzas $\mathbf{f}_i$ son conservativas.
- $U_{12}^I \neq U_{12}^{II}$ si una (o más) de las fuerzas $\mathbf{f}_i$ es no-conservativa.

4.2.1. Trabajo hecho por la fuerza de roce (fricción seca)

La fuerza de roce $\mathbf{f}_r$ siempre actúa en contra del movimiento (en el sentido $-\hat{\mathbf{u}}$), como muestra la Figura 4.7(a). Es decir, produce trabajo negativo (ver Ecuación (4.1)), y es igual a:

$$U_{12} = -f_r \, s_{12}$$

Aquí llamamos s_{12} a la distancia recorrida entre $\mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{u}_2$, y que no es igual al desplazamiento $\Delta\mathbf{u} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$, como ejemplifica la Figura 4.7(b).

4.3. Conservación de energía

4.3.1. Relación trabajo y energía potencial

En el caso de las Ecuaciones (4.7) y (4.9), notamos que existe un potencial V tal que:

$$U_{12} = -\Delta V \tag{4.10}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard



(a) (b)

Figura 4.7: Trabajo hecho por la fuerza de roce: **(a)** la fuerza $\mathbf{f}_r$ se opone al movimiento, por lo que produce trabajo negativo; y **(b)** el trabajo de la fuerza de roce es a lo largo del trayecto s_{12}, y no del desplazamiento Δu_{12} (i.e. el camino recorrido sí importa).

Es decir, el trabajo hecho por la fuerza es igual a su *variación de energía potencial*. Cuando se tienen fuerzas de este tipo se puede calcular el trabajo U_{12} usando sus potenciales: V_e para la fuerza elástica, y V_g para la fuerza gravitatoria.

> No hemos llamado al trabajo entre $t_1 \to t_2$ como ΔU, ya que esto último implica que se puede siempre calcular como una diferencia de valores.
>
> Se puede calcular el trabajo como una diferencia de valores, pero sólo para fuerzas con potenciales. En los potenciales para el resorte y gravedad (Ecuaciones (4.6) y (4.8)), notamos que ambos tienen un signo negativo que los antecede. Además, la derivación general de trabajo escrito por un potencial (Ecuación (4.5)) también lo tiene. El signo negativo explica que $U_{12} = -\Delta V$: el trabajo es el opuesto a la diferencia de energía potencial.

4.3.2. Ecuación de energía utilizando potenciales

Utilizando la energía potencial elástica V_e y gravitatoria V_g para representar el trabajo de estas fuerzas, podemos expandir la expresión del trabajo de la Ecuación 4.2:

$$T_1 + \overbrace{U_{12}}^{-\Delta V + U^\star_{12}} = T_2$$

$$T_1 - (V_2 - V_1) + U^\star_{12} = T_2 \tag{4.11}$$

$$\boxed{V_1 + T_1 + U^\star_{12} = V_2 + T_2} \tag{4.12}$$

, donde $V_1 = V_{g1} + V_{e1}$ = energía potencial total en el instante t_1;
T_1 = energía cinética en el instante t_1;
$U^\star_{12}$ = trabajo hecho por las fuerzas que no tienen potenciales entre $t_1 \to t_2$. En nuestro caso, eso corresponde a fuerzas externas y fuerzas no-conservativas.

4.3.3. Energía mecánica total

Cuando todas las fuerzas que actúan son conservativas y pueden ser descritas por sus respectivos potenciales, entonces de la Ecuación (4.2) se tiene que:

$$U_{12} = \Delta T$$

$$-\Delta V = \Delta T \tag{4.13}$$

$$V_1 - V_2 = T_2 - T_1 \tag{4.14}$$

$$V(t_1) + T(t_1) = V(t_2) + T(t_2) \tag{4.15}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Es decir, cuando todas las fuerzas son conservativas se cumple:

$$V(t) + T(t) = \text{constante} \tag{4.16}$$

, donde $V(t) + T(t)$ es la *energía (mecánica) total*. Las fuerzas conservativas de uso común y para las cuales tenemos expresiones de su energía potencial son: el resorte y la gravedad (elástica y gravitatoria).

4.4. Resumen: trabajo y energía

Hay dos formas equivalentes de aplicar la ecuación de trabajo y energía; las Ecuaciones (4.2) y (4.12) que se muestran a continuación:

$$T_1 + U_{12} = T_2 \qquad\qquad V_1 + T_1 + U^{\star}_{12} = V_2 + T_2$$

, donde T_1 , T_2 = energía cinética en los instantes t_1 y t_2, respectivamente, e igual a $T = \frac{m}{2}\left|\dot{\mathbf{u}}\right|^2$;
U_{12} = trabajo hecho por las fuerzas entre $t_1 \to t_2$;
V_1 , V_2 = energía potencial de las fuerzas para las cuales conocemos su potencial (también llamado ϕ) en los instantes t_1 y t_2, respectivamente;
$U^{\star}_{12}$ = trabajo hecho por las fuerzas que no tienen potenciales entre $t_1 \to t_2$, i.e., fuerzas externas y fuerzas no-conservativas.

Las fuerzas constante, elástica, gravitatoria, y de roce, tienen expresiones de trabajo conocidas:

$$\begin{aligned}
\text{constante:} \quad & U_{12} = \mathbf{f} \cdot \Delta\mathbf{u} \\
\text{elástica:} \quad & U_{12} = \frac{k}{2}\left(\delta_1^2 - \delta_2^2\right) \\
\text{gravitatoria:} \quad & U_{12} = -mg\,\Delta z \\
\text{roce:} \quad & U_{12} = -f_r\; s_{12}
\end{aligned}$$

El trabajo hecho por otro tipo de fuerzas, debe calcularse con la expresión general:

$$U_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}}\, \mathrm{d}t$$

Las fuerzas que tienen potenciales, relacionan su trabajo con la energía potencial según:

$$U_{12} = -\Delta V$$

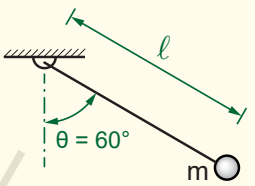
Los potenciales de las fuerzas elástica y gravitatoria son:

$$\begin{aligned}
\text{elástica:} \quad & V_e = \frac{k}{2}\delta^2 \\
\text{gravitatoria:} \quad & V_g = mgz
\end{aligned}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Ejemplo

Un péndulo de masa m se suelta en $\theta = 60°$ desde el reposo ($\dot{\theta}_0 = 0$) como muestra la Figura. Determine la tensión en la cuerda en función de θ.

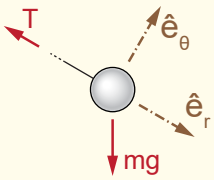


El primer paso consiste en hacer un DCL del péndulo, el que se muestra en la Figura al costado. Aplicando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton:

$$-T\,\hat{\mathbf{e}}_r + mg\,(\cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_r - \sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta) = m\left(-\ell\,\dot{\theta}^2\,\hat{\mathbf{e}}_r + \ell\,\ddot{\theta}\,\hat{\mathbf{e}}_\theta\right)$$

La ecuación en $\hat{\mathbf{e}}_r$ entrega la tensión:

$$T = mg\,\cos\theta + m\,\ell\,\dot{\theta}^2$$



Llamando t_1 al instante en que se suelta la masa; las condiciones iniciales son:

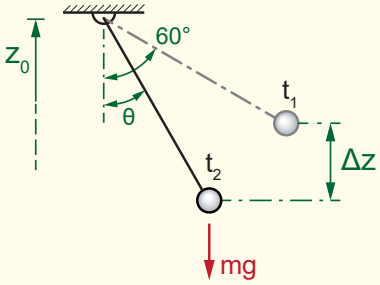
$$\theta\,(t_1) = 60° \qquad\qquad |v\,(t_1)| = 0$$

Por otro lado, para cualquier instante t_2, se tiene que:

$$|v\,(t_2)|^2 = \ell^2\,\dot{\theta}^2$$

La tensión en la cuerda no hace trabajo. Esto es porque la tensión apunta en la dirección $-\hat{\mathbf{e}}_r$, mientras que el vector de velocidad es tangente a la trayectoria y perpendicular a $\hat{\mathbf{e}}_r$, con lo que:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{T}\cdot\dot{\mathbf{u}}\,\mathrm{d}t = 0$$



Es decir, sólo la fuerza de gravedad hace trabajo, y es igual a:

$$\begin{aligned} U_{12} &= -mg\,\Delta z = -mg\,(z_2 - z_1) \\ U_{12} &= -mg\,[(z_0 - \ell\,\cos\theta) - (z_0 - \ell\cos 60°)] \\ U_{12} &= mg\,\ell\,(\cos\theta - \cos 60°) \end{aligned}$$

Utilizando el principio de trabajo y energía:

$$\begin{aligned} U_{12} &= \Delta T \\ mg\,\ell\left(\cos\theta - \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2}m\left(\ell^2\,\dot{\theta}^2 - 0\right) \\ m\,\ell\,\dot{\theta}^2 &= 2mg\left(\cos\theta - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Reemplazando este valor en la ecuación de la tensión:

$$T = mg\,\cos\theta + 2mg\left(\cos\theta - \frac{1}{2}\right) = mg\,(3\cos\theta - 1)$$

El valor máximo de tensión en la cuerda es $T_{\max} = 2mg$ ocurre cuando $\theta = 0$.

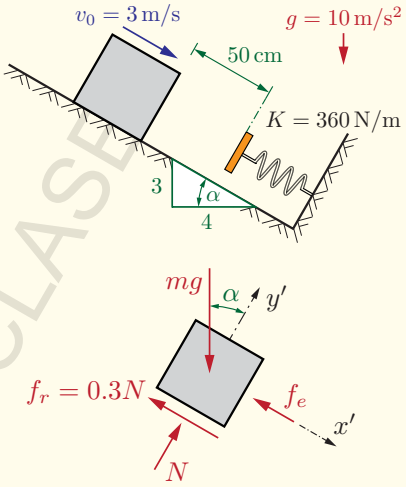
Nota: La ecuación en el sentido $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ es igual a $(-g\,\sin\theta = \ell\,\ddot{\theta})$, y sirve para obtener la posición del péndulo en el tiempo $\theta\,(t)$. Esto se estudiará en detalle en futuras secciones.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Ejemplo

Basado en McGill & King 4th ed, Example 2.11

Un bloque de peso $W = mg = 100\,\text{N}$ desliza por una superficie con coeficiente de roce (estático y dinámico) $\mu = 0{,}3$ y velocidad inicial $v_0 = 3\,\text{m/s}$. El resorte es ideal y se encuentra inicialmente en reposo. Considere que $g = 10\,\text{m/s}^2$. Determine la fuerza máxima que se produce en el resorte.



El primer paso consiste en hacer un DCL del bloque mientras desciende por la rampa, el que se muestra en la Figura al costado. Aplicando la 2da ley de Newton en el sentido y' se tiene:

$$\sum f_y = m\,\ddot{u}_y$$
$$N - mg\,\cos\alpha = (m)\,(0)$$
$$N = mg\,\cos\alpha = (100)\,(4/5) = 80\,\text{N}$$

Con ello, la fuerza de roce es:

$$f_r = 0{,}3\,N = (0{,}3)\,(80) = 24\,\text{N}$$

La fuerza máxima en el resorte ocurre cuando está en el punto máximo de compresión. Es decir, cuando el bloque tiene velocidad cero y el resorte se ha comprimido en δ. Con ello, las velocidades inicial y final son:

$$|v\,(t_1)| = v_0 \qquad\qquad |v\,(t_2)| = 0$$

La variación de energía cinética es:

$$\Delta T = \frac{1}{2}\,m\left[|v\,(t_2)|^2 - |v\,(t_1)|^2\right] = -\frac{1}{2}\,m\,v_0^2$$

El cálculo del trabajo U_{12} se hace analizando cada fuerza por separado:

a) fuerza normal N: no hace trabajo porque el movimiento es perpendicular a ella.

b) fuerza de roce f_r: hace trabajo negativo por una distancia igual a $50\,\text{cm} + \delta$. Es decir, el trabajo de la fuerza de roce es $U_{12} = -\,(24\,\text{N})\,(0{,}5 + \delta)$.

c) peso W: hace trabajo positivo e igual a $U_{12} = -100\,\Delta z$, con $\Delta z = -\frac{3}{5}\,(0{,}5 + \delta)$.

d) resorte f_e: inicialmente se encuentra con $\delta = 0$ hasta el momento de contacto. Luego se comprime hasta llegar a δ en el instante t_2. El trabajo es $U_{12} = -\frac{k}{2}\left[(-\delta)^2 - (0)^2\right] = -\frac{k}{2}\delta^2$.

Utilizando el principio de trabajo y energía para determinar el valor de δ:

$$U_{12} = \Delta T$$
$$-\,(24)\,(0{,}5 + \delta) + (100)\left(\frac{3}{5}\right)(0{,}5 + \delta) - \frac{360}{2}\delta^2 = -\frac{1}{2}\,(10)\,(3^2)$$
$$-180\,\delta^2 + 36\,\delta + 63 = 0$$
$$20\,\delta^2 - 4\,\delta - 7 = 0$$
$$\rightarrow \qquad \delta = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 560}}{40} = \frac{1 \pm 6}{10}$$

En nuestro caso, sólo la raíz positiva tiene significado físico: el resorte se comprime a $\delta = 0{,}7\,\text{m}$. La fuerza máxima que ejerce el resorte es:

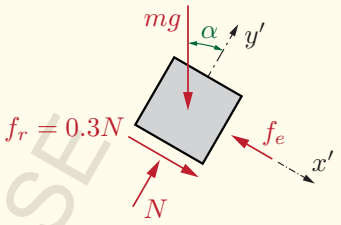
$$(f_e)_{\text{max}} = k\,\delta = (360)\,(0{,}7) = 252\,\text{N}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Ejemplo

Basado en McGill & King 4th ed, Example 2.12

Continuando el ejemplo anterior, encuentre la siguiente posición en que el bloque se encuentra detenido.



El primer paso consiste en hacer un DCL del bloque. El resorte se encuentra en su estado de compresión máxima y el bloque se moverá hacia arriba por el plano inclinado. Debido a ello, la fuerza de roce actúa en el sentido opuesto (siempre se opone al movimiento o al intento de movimiento).

La sumatoria de fuerzas en el sentido del plano inclinado, considerando como positivo hacia abajo del plano, es:

$$\sum f_{x'} = W \sin\alpha - f_e + f_r = (100)\left(\frac{3}{5}\right) - 252 + 24 = -168\,\mathrm{N}$$

El signo negativo indica que hay un desbalance hacia arriba del plano inclinado. Es decir, el bloque no está en equilibrio y comenzará a subir por el plano inclinado.

Las velocidades inicial (máxima compresión del resorte) y final (nuevamente detenido) son cero: la variación de energía cinética es $\Delta T = 0$.

Supuesto 1: El bloque regresa una distancia s menor a δ por lo que el resorte quedará comprimido $\delta - s$. En ese caso, los trabajos de las fuerzas son:

a) fuerza normal N: no hace trabajo.

b) fuerza de roce f_r: hace trabajo negativo por una distancia igual a s, y con ello $U_{12} = -24\,s$.

c) peso W: hace trabajo negativo $U_{12} = -100\,\Delta z$, con $\Delta z = \frac{3}{5}s$.

d) resorte f_e: reduce su compresión desde δ a $\delta - s$. El trabajo es $U_{12} = -\frac{k}{2}\left[(-\delta + s)^2 - (-\delta)^2\right]$.

Utilizando el principio de trabajo y energía para determinar el valor de s:

$$\begin{aligned} U_{12} &= \Delta T \\ -(24)(s) + (100)\left(\frac{3}{5}\right)(-s) - \frac{360}{2}\left[(-\delta + s)^2 - (-\delta)^2\right] &= 0 \\ 180\,s^2 - 168\,s &= 0 \\ 15\,s^2 - 14\,s &= 0 \end{aligned}$$

La primera solución es $s_1 = 0$; condición con el resorte en compresión máxima. La segunda solución es $s_2 = \frac{14}{15}$ y es el segundo punto en que se detiene el bloque. El problema es que como $s_2 > \delta$, el bloque en realidad se despega del resorte: el supuesto está errado.

Supuesto 2: El bloque regresa una distancia s mayor a δ por lo que el resorte quedará en reposo y el bloque se despegará del mismo. En ese caso, los trabajos serán iguales al caso anterior excepto por el resorte, el cual terminará con $\delta = 0$ (condición de reposo). Utilizando el principio de trabajo y energía para determinar el valor de s:

$$\begin{aligned} U_{12} &= \Delta T \\ -(24)(s) + (100)\left(\frac{3}{5}\right)(-s) - \frac{360}{2}\left[(0)^2 - (-\delta)^2\right] &= 0 \\ 84\,s - \frac{441}{5} &= 0 \\ 20\,s - 21 &= 0 \end{aligned}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Finalmente, el bloque sube desde la posición de máxima compresión $s = \frac{21}{20}$ m, que medido desde la posición de reposo del resorte es:

$$s - \delta = \frac{21}{20} - \frac{7}{10} = \frac{7}{20} = 0{,}35\,\text{m}$$

Es decir, el bloque que inicialmente comenzó a 0,5 m del resorte y con velocidad inicial $v_0 = 3\,\text{m/s}$, choca con el resorte y vuelve a subir hasta detenerse a una distancia de 0,35 m del mismo.

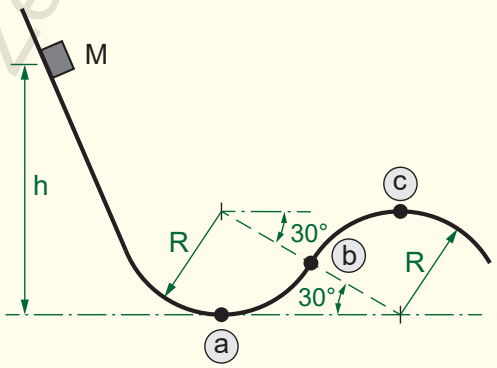
Sugerido

Resuelva los dos problemas anteriores usando potenciales V_g y V_e para la fuerza de gravedad y resorte, respectivamente. Notar que para el cálculo de V_g, puede fijar $z = 0$ en cualquier altura.

Ejemplo

Lim Yung-Kuo *Problems and Solutions on Mechanics*, Problem 1007

Un bloque de masa M desliza por un tobogán sin roce desde una altura h, comenzando su carrera desde el reposo ($v_0 = 0$). Las secciones curvas del tobogán tienen radio R. Para cierta altura h, la masa dejará de estar en contacto con el tobogán. Determine el punto en el tobogán donde la masa deja de hacer contacto, y la altura mínima $h_{\min}$ para que ocurra.



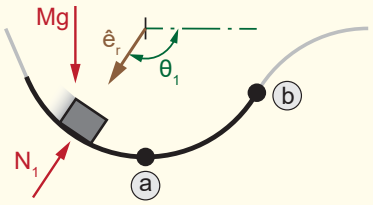
Haremos dos DCL, uno para cada tramo curso, para así comprender mejor lo que ocurre. En cada tramo curvo definimos θ_1 y θ_2, respectivamente, para indicar la posición del bloque dentro de la curva. Para describir una trayectoria circular, es necesario tener una aceleración radial igual a $\ddot{u}_r = -R\,\dot{\theta}^2 = -v_\theta^2/R$.

En el primer tramo curvo, utilizando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton en la dirección radial $\hat{\mathbf{e}}_r$:

$$\sum f_r = m\,\ddot{u}_r$$

$$Mg\,\sin\theta_1 - N_1 = M\left(-\frac{v_\theta^2}{R}\right)$$

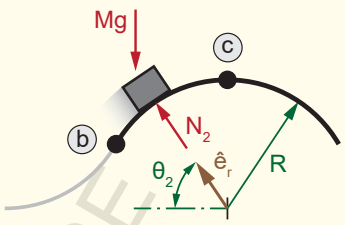
$$N_1 = M\left(g\,\sin\theta_1 + \frac{v_\theta^2}{R}\right)$$



La normal es positiva para todo θ_1 posible (notar que $30° < \theta_1 < 180°$) y para cualquier velocidad mayor a cero. Debido a ello, la masa se mantiene pegada a la pista en todo el primer tramo.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

En el segundo tramo curvo, utilizando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton en la dirección radial $\hat{\mathbf{e}}_r$:



$$\sum f_r = m\,\ddot{u}_r$$
$$-Mg\,\sin\theta_2 + N_2 = M\left(-\frac{v_\theta^2}{R}\right)$$
$$N_2 = M\left(g\,\sin\theta_2 - \frac{v_\theta^2}{R}\right)$$

Si la rapidez v_θ es considerablemente grande, la normal deberá ser negativa. Es decir, la pista debe "tirar" o "jalar" del bloque para que se mantenga en la pista: ¡imposible!

La contribución del peso, el término positivo de N_2, será mínimo en el punto **(b)**; i.e. cuando $\theta_2 = 30°$. Intuitivamente, se puede deducir que la rapidez v_θ es máxima para ese tramo curvo en ese punto (algo que se confirmará a continuación). Es decir, la masa perderá contacto con la pista (i.e. $N_2 < 0$) en el punto **(b)**.

La rapidez en el punto **(b)** depende de la altura inicial del bloque. Utilizando el principio de trabajo y energía para una posición cualquiera del segundo tramo curvo, se tiene que:

$$U_{12} = \Delta T$$
$$-Mg\,\Delta z = \frac{1}{2}M\left(v^2 - \underbrace{v_0^2}_{0}\right)$$

Tomando como datum ($z = 0$) el punto más bajo del tobogán, entonces $\Delta z = R\,\sin\theta_2 - h$, y con ello:

$$-Mg\,(R\,\sin\theta_2 - h) = -\frac{1}{2}M\,v^2$$
$$v = \sqrt{2g\,(h - R\,\sin\theta_2)}$$

El resultado anterior confirma que el punto de máxima velocidad del segundo tramo curvo coincide con el punto **(b)**, donde $\theta_2 = 30°$. Es decir:

$$(v_\theta)_{\text{b}} = v\,(\theta_2 = 30°) = \sqrt{g\,(2h - R)}$$

La altura mínima $h_{\min}$ es la que resulta en una fuerza normal $N_2 = 0$:

$$N_2 = M\left[g\,\frac{1}{2} - \frac{g\,(2h - R)}{R}\right] = Mg\left(\frac{1}{2} - 2\frac{h}{R} + 1\right)$$
$$N_2 = \frac{Mg}{2}\left(3 - 4\frac{h}{R}\right)$$

Es decir, la masa se despega de la pista si es liberado desde una altura h tal que:

$$h > h_{\min} = \frac{3}{4}R$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

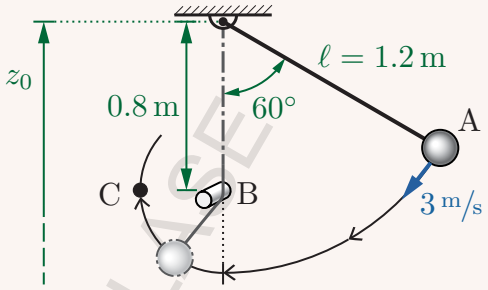
Sugerido

Basado en Meriam 7th ed, Problem 3/129

Una bola de masa m se suelta desde la posición A con velocidad $3\,\mathrm{m/s}$. En el punto más bajo de su trayectoria, la cuerda que lo sujeta golpea un *pin* (o clavija) que se encuentra en B. La bola continua su trayectoria pasando luego por el punto C. Se pide determinar:

a) La rapidez v_c de la bola cuando pasa por el punto C.

b) La razón entre las velocidades angulares ω_C/ω_A.

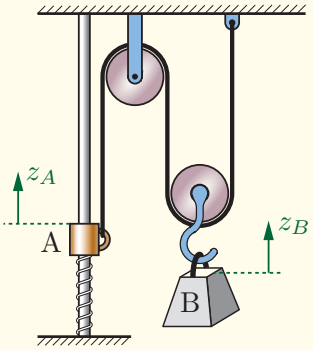


Nota: Trate de resolver el problema utilizando conservación de energía, i.e. $V_1 + T_1 = V_2 + T_2$.

La velocidad en C es $v_C = \sqrt{0{,}4g + 9} = 3{,}595\,\mathrm{m/s}$.
Las velocidades angulares en los puntos A y C son $\omega_A = \frac{3}{1{,}2} = 2{,}5\,\mathrm{rad/s}$ y $\omega_C = \frac{3{,}595}{0{,}4} = 8{,}988\,\mathrm{rad/s}$, respectivamente.
Es decir, la razón entre las velocidades angulares es $\omega_C/\omega_A = 3{,}595$.

Ejemplo

En el sistema de la Figura, el resorte tiene una rigidez $k = 200\,\mathrm{N/m}$ y se encuentra unido al collarín. Las masas del collarín y contrapeso son $m_A = 60\,\mathrm{kg}$ y $m_B = 1100\,\mathrm{kg}$, respectivamente. Considere la aceleración de la gravedad como $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Inicialmente, el sistema del resorte y collarín se encuentran en equilibrio y reposo (sin la masa B). El sistema comienza a moverse tras colgar la masa B. Determine las velocidades de A y B una vez que B ha caído 1 m.



Inicialmente, el resorte se encuentra comprimido una distancia:

$$\delta_1 = \frac{W_A}{k} = \frac{m_A\, g}{k}$$

Para los cuerpos A y B, consideraremos como datum ($z = 0$) las posiciones iniciales, i.e., $z_A = z_B = 0$ en el instante en que se cuelga la masa B. Es decir, el collarín tiene comprimido el resorte δ_1 cuando $z_A = 0$. Como no hay fuerzas adicionales actuando sobre el sistema y ambas fuerzas tienen potenciales: se conservará la energía total del sistema. Evaluando cada fuerza en los estados inicial t_1 y de interés t_2, se tiene:

1. Energía potencial elástica (resorte):

$$\text{Inicial:} \quad (V_e)_1 = \frac{k}{2}\,\delta_1^2 = \frac{k}{2}\left(\frac{m_A\, g}{k}\right)^2$$
$$\text{Interés:} \quad (V_e)_2 = \frac{k}{2}\,(z_A - \delta_1)^2 = \frac{k}{2}\left(z_A - \frac{m_A\, g}{k}\right)^2$$

2. Energía potencial gravitatoria:

$$\text{Inicial:} \quad (V_g)_1 = (V_g)_{A1} + (V_g)_{B1} = 0$$
$$\text{Interés:} \quad (V_g)_2 = (V_g)_{A2} + (V_g)_{B2} = m_A\, g\, z_A + m_B\, g\, z_B$$

BORRADOR NOTAS DE CLASE
Tomás Zegard

3. Energía cinética:

$$\begin{aligned}\text{Inicial:}\quad & T_1 = (T_1)_A + (T_1)_B = 0\\ \text{Interés:}\quad & T_2 = (T_2)_A + (T_2)_B = \frac{1}{2}\,m_A\,(v_A)^2 + \frac{1}{2}\,m_B\,(v_B)^2\end{aligned}$$

Luego, por conservación de energía, se tiene que:

$$\begin{aligned}V_1 + T_1 &= V_2 + T_2\\ \frac{k}{2}\left(\frac{m_A\,g}{k}\right)^2 &= \frac{1}{2}\,m_A\,(v_A)^2 + \frac{1}{2}\,m_B\,(v_B)^2 + m_A\,g\,z_A + m_B\,g\,z_B + \frac{k}{2}\left(z_A - \frac{m_A\,g}{k}\right)^2\end{aligned}$$

Utilizando la ligadura del sistema de poleas, se obtienen las siguientes relaciones:

$$z_A = -2\,z_B \qquad\qquad v_A = -2\,v_B$$

Se puede resolver para la velocidad v_B si reemplazamos $z_B = -1\,\text{m}$, $z_A = 2\,\text{m}$, y $v_A = -2\,v_B$, en la ecuación de conservación de energía:

$$\begin{aligned}\frac{200}{2}\left(\frac{60\cdot 10}{200}\right)^2 &= \frac{60}{2}\,(-2\,v_B)^2 + \frac{110}{2}\,(v_B)^2 + (60)\,(10)\,(2) + (110)\,(10)\,(2) + \frac{200}{2}\left(2 - \frac{60\cdot 10}{200}\right)^2\\ 900 &= 120\,v_B^2 + 55\,v_B^2 + 1200 - 1100 + 100\\ 4 &= v_B^2\end{aligned}$$

Se tienen dos soluciones $v_B = \pm 2\,\text{m/s}$, pero como sabemos que B baja (mientras que A sube), la velocidad negativa es la de interés. Es decir, cuando $z_B = -1\,\text{m}$, las velocidades de la masa y collarín son:

$$v_B = -2\,\text{m/s} \qquad\qquad v_A = 4\,\text{m/s}$$

Nota: La masa B continuará descendiendo pero el resorte hará que desacelere hasta detenerla y hacerla regresar. La solución $v_B = 2\,\text{m/s}$ es válida: será la velocidad que tendrá la masa B en $z_B = -1\,\text{m}$ luego de llegar a su punto más bajo y comenzar a subir. El sistema oscilará infinitamente ya que la energía se conserva. Los osciladores serán estudiados en detalle en las próximas secciones.

4.5. Potencia

Un motor pequeño puede hacer mucho trabajo si tiene el tiempo suficiente. Un motor poderoso puede hacer el mismo trabajo en menor tiempo. La capacidad de una máquina de hacer trabajo (o entregar energía) en un periodo de tiempo es *potencia*:

$$P = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int \mathbf{f}\cdot\dot{\mathbf{u}}\,\mathrm{d}t\right)$$

Es decir, la potencia es un escalar definido como:

$$\boxed{P = \mathbf{f}\cdot\dot{\mathbf{u}}} \tag{4.17}$$

La unidad de potencia más común es el Watt:

$$\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W}$$

En el área de motores, se usa también la unidad de *caballo de fuerza*, cuya nomenclatura es hp:

$$746\,\text{W} = 1\,\text{hp}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Adquirido el concepto de potencia, la relación inversa cobra sentido físico: el trabajo es toda la potencia entregada entre $t_1 \to t_2$:

$$U_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} P\,(t) \; \mathrm{d}t$$

4.5.1. Eficiencia

La razón entre la potencia que entrega una máquina y la potencia que se le suministra es la *eficiencia mecánica*:

$$e_m = \frac{P_{\text{output}}}{P_{\text{input}}}$$

, donde P_{output} = es la potencia de salida;
P_{input} = es la potencia de entrada (suministrada).

Toda máquina con partes móviles va a tener pérdidas de energía producto del roce, el cual disipa energía por medio de calor y sonido. Como la energía no se puede crear, menos aún en el interior de una máquina, la eficiencia es siempre menor a 1. Es decir:

$$e_m = \frac{P_{\text{output}}}{P_{\text{input}}} < 1 \tag{4.18}$$

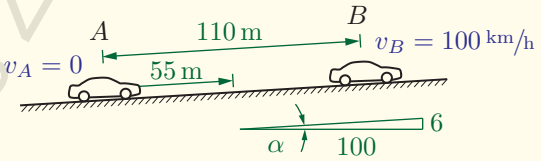
Además de la eficiencia mecánica (e_m); existe la *eficiencia eléctrica* (e_e), y la *eficiencia térmica* (e_t). Con ello, la *eficiencia total* (e) es:

$$e = e_m \, e_e \, e_t \tag{4.19}$$

Ejemplo

Meriam 7th ed, Problem 3/119

Un automóvil de 1700 kg de masa comienza desde el reposo en A y acelera uniformemente cuesta arriba alcanzando 100 km/h en el punto B. Se pide determinar:

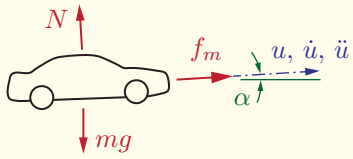


a) La fuerza requerida f_m.

b) La potencia requerida en el punto B.

c) La potencia requerida en el punto C (punto medio entre A y B).

El primer paso consiste en hacer un DCL del automóvil.



Luego, la velocidad en el punto B es:

$$v_B = 100\,\text{km/h} = \frac{250}{9}\,\text{m/s} = 27{,}778\,\text{m/s}$$

Con el DCL se puede ver que si la aceleración del vehículo es constante, es porque f_m es constante. La diferencia de altura entre los puntos A y B es:

$$\Delta z = 110 \sin\alpha = (110)\left(\frac{6}{\sqrt{100^2+6^2}}\right) = 6{,}5882\,\text{m}$$

Luego, utilizando el principio de trabajo y energía:

$$U_{AB} = \Delta T$$

$$-mg\,\Delta z + f_m\,110 = \frac{1}{2}\,m\left(27{,}778^2 - 0\right)$$

$$f_m = 6961{,}2\,\text{N}$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

, donde la fuerza normal no hizo trabajo porque es ortogonal al vector de velocidad. Con ello, la potencia en el punto B es:

$$P_B = v_B\, f_m = (27{,}778)\,(6961{,}2) = 193367\,\text{W}$$
$$P_B = 193{,}37\,\text{kW} \quad (259\,\text{hp})$$

Habiéndo calculado f_m, es sencillo determinar la velocidad en C utilizando el principio de trabajo y energía. La diferencia de altura entre los puntos A y C es:

$$\Delta z = 55\,\sin\alpha = (55)\left(\frac{6}{\sqrt{100^2+6^2}}\right) = 3{,}2941\,\text{m}$$

Con ello, la velocidad en el punto C se obtiene de:

$$\begin{aligned} U_{AC} &= \Delta T \\ -mg\,\Delta z + f_m\,55 &= \frac{1}{2}\,m\,(v_C^2 - 0) \\ 327932{,}1 &= \frac{1}{2}\,m\,v_C^2 \\ v_C &= 19{,}64\,\text{m/s} \end{aligned}$$

Finalmente, la potencia en C es:

$$P_C = v_C\, f_m = (19{,}64)\,(6961{,}2) = 136718\,\text{W}$$
$$P_C = 136{,}72\,\text{kW} \quad (183\,\text{hp})$$

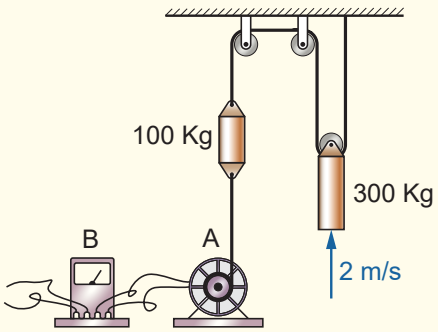
Nota: Alternativamente, para determinar la fuerza f_m se podría haber buscado la aceleración necesaria para tener $v_B = 100\,\text{km/h}$; obteniéndose $a = 3{,}5073\,\text{m/s}^2$. Este procedimiento es igualmente válido, pero requiere un desarrollo más extenso, y probablemente requiere calcular los tiempos $t_A = 7{,}92\,\text{s}$ y $t_B = 5{,}6\,\text{s}$.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

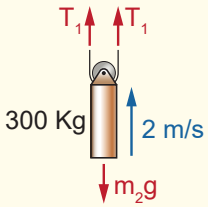
Ejemplo

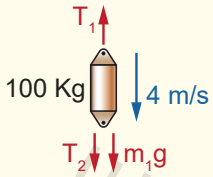
Meriam 9th ed, Problem 3/96

Un motor en A eleva un cilindro de masa $m_2 = 300\,\text{kg}$ de la Figura a velocidad constante e igual a $2\,\text{m/s}$. El multímetro en B registra una entrada de $2{,}2\,\text{kW}$ al motor. Determine la eficiencia combinada e (eléctrica y mecánica) del sistema.



El primer paso consiste en hacer DCLs para cada uno de los cilindros del sistema. Si el cilindro mayor de 300 kg se mueve a velocidad constante, entonces el cilindro menor de 100 kg también lo hará. El sistema de poleas introduce una ligadura entre los cilindros: si el cilindro mayor de 300 kg sube a $2\,\text{m/s}$, entonces el cilindro menor de 100 kg bajará a $4\,\text{m/s}$. La velocidad con que el cilindro menor desciende es la misma velocidad con la que el motor enrolla su cuerda (o *consume* cuerda).





Utilizando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton con el cilindro mayor de 300 kg, y ya que la aceleración es nula (velocidad constate):

$$2\,T_1 - \underbrace{300\,g}_{mg} = \underbrace{m\,\ddot{z}}_{0}$$
$$T_1 = 150\,g$$

Formulando la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton para el cilindro menor:

$$T_1 - T_2 - \underbrace{100\,g}_{mg} = \underbrace{m\,\ddot{z}}_{0}$$
$$T_2 = 50\,g$$

Es decir, el motor tira de la cuerda con tensión (fuerza) igual a $T_2 = 50\,g$, y a una velocidad de $4\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}}$. Es decir, la potencia que entrega el motor es:

$$P = \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} = (50\,g)\,(4) = 200\,g = 1962\,\text{W}$$

Finalmente, la eficiencia (combinada) del motor es:

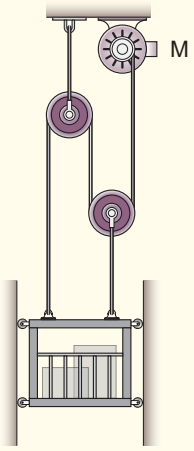
$$e = \frac{P_{\text{output}}}{P_{\text{input}}} = \frac{200\,g}{2200} = \frac{1962}{2200} = 0{,}8918$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Ejemplo

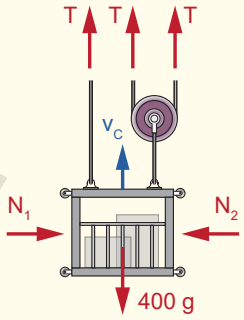
Basado en Hibbeler 14$^{\text{th}}$ ed, Problem 14–51

El motor en M sube una caja de elevador la cual tiene masa $m_c = 400\,\text{kg}$. El motor ejerce una fuerza constante de 2000 N en el cable. La eficiencia total del motor es $e = 0{,}65$. Los cables y poleas son ideales, y no hay roce en las poleas ni apoyos laterales del elevador. El motor pone en movimiento al elevador el cual se encontraba inicialmente en reposo. Determine la potencia que se debe suministrar al motor cuando el elevador ha subido 5 m. Exprese su resultado en caballos de fuerza.



El primer paso consiste en hacer un DCL de la caja del elevador. El DCL incluye la polea para así determinar que la fuerza sobre la caja del elevador es igual a $3\,T_1$ (si se hace un DCL de la polea aislada se obtiene el mismo resultado).

Las fuerzas normales (N_1 y N_2) ejercidas por las paredes laterales no producen trabajo al ser ortogonales al movimiento. Las fuerzas T_1 y de gravedad $m\,g = 400\,g$ son ambas constantes, y su trabajo es sencillo de calcular. Utilizando el principio de trabajo y energía para un desplazamiento de 5 m hacia arriba:



$$\begin{aligned} U_{12} &= \Delta T \\ (3\,T - mg)\,(\Delta u) &= \frac{1}{2}\,m\,(v_c^2 - 0) \\ 10380 &= 200\,v_c^2 \\ v_c &= 7{,}204\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

La potencia que requiere el motor se puede determinar de dos maneras: **(a)** en la caja del elevador; y **(b)** en la salida del motor.

Método 1: potencia en la caja del elevador.

El motor ejerce sobre la caja del elevador una fuerza total de $3\,T = 6000\,\mathrm{N}$, al mismo tiempo que la eleva a $v_c = 7{,}204\,\mathrm{m/s}$. Es decir, la potencia que ejerce el motor es:

$$P_{\text{output}} = 3\,T\,v_c = 43{,}225\,\mathrm{kW} = 57{,}94\,\mathrm{hp}$$

Método 2: potencia en la salida del motor.

El motor sobre el cable una fuerza $T = 2000\,\mathrm{N}$, al mismo tiempo que recoge (o consume) el cable con velocidad $v_m = 3\,v_c = 21{,}612\,\mathrm{m/s}$. Es decir, la potencia que ejerce el motor es:

$$P_{\text{output}} = T\,v_m = 43{,}225\,\mathrm{kW} = 57{,}94\,\mathrm{hp}$$

Finalmente, si la eficiencia del motor es $e = 0{,}65$, la potencia que se requiere suministrar es:

$$\begin{aligned} e &= \frac{P_{\text{output}}}{P_{\text{input}}} \\ P_{\text{input}} &= \frac{57{,}94}{0{,}65} = 89{,}14\,\mathrm{hp} \end{aligned}$$

Nota: En el cálculo de la potencia no se considera el peso mg ya que esa fuerza no la ejerce el motor.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard