PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1514 — Dinámica
Segundo semestre 2020

Taller 11

Traslación y rotación

Problema 1.

Un *hula-hula* de masa $M = 2\ kg$ y radio $R = 50\ cm$ se desplaza a una velocidad $v_o = 5\ m/s$ en una superficie lisa (sin roce) y luego entra en una superficie con roce, como se ve en la figura 1. Para los casos (b) y (c) asuma que desde el punto B el *hula-hula* rueda sin deslizar.

a. Suponga que al *hula-hula* se le imprime una velocidad angular con el sentido mostrado en la figura. Determine entonces la velocidad ω para que el *hula - hula* se mantenga en reposo.

b. Si ahora el *hula-hula* avanza sólo con la velocidad v_o, determine la velocidad v_i y ω_i en que comienza a rodar sin dezlizar. Además, determine la altura máxima que alcanza el *hula-hula* al subir una cuesta.

c. Si ahora se tiene el mismo caso anterior, pero en vez de la cuesta hay una rampla que permite que el *hula-hula* salga disparado hacia arriba, determine la nueva altura máxima ΔH_2. Asuma que el objeto sale disparado con la velocidad angular que tenía justo antes de llegar a la rampla, y desprecie el roce con el aire.

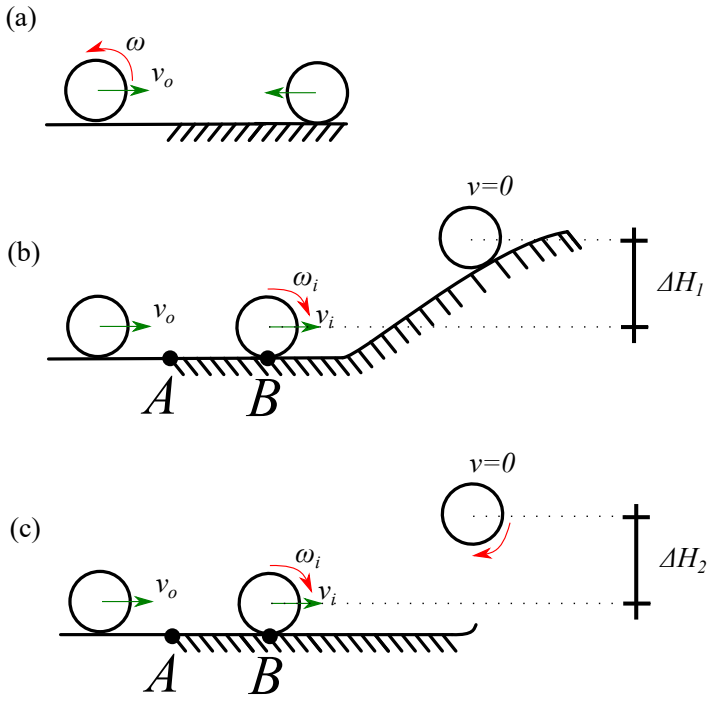


Figura 1: *hula-hula* con (a) velocidad angular inicial (b) subiendo una cuesta (c) levantado por una rampa

Solución

a. La única fuerza que actúa en este proceso en la fuerza de roce, ya que el peso del *hula-hula* no produce momento. Por lo tanto, tomando como punto de rotación un punto sobre el suelo se tiene que no hay torques externos y entonces el momentum angular se conserva. Además, si queremos que en el punto final el hula hula quede en reposo, se debe cumplir que tanto su velocidad traslacional como rotacional sean cero. Entonces:

$$H_1 = H_2 = 0$$

Además, la inercia del *hula-hula* conrecpecto al centro de masa es $I = MR^2 = 0{,}5kg - m^2$, por lo que en el punto inicial se tiene

$$H_1^{tras} + H_1^{rot} = 0 \longrightarrow (\circlearrowleft^+) \;\; Mv_oR - I\omega = 0 \longrightarrow \omega = \frac{v_o}{R} = 10\,\frac{1}{s}$$

b. Haciendo conservación del momentum angular sobre el punto A:

$$H_1 = H_i \longrightarrow H_1^{tras} + \underbrace{H_1^{rot}}_{=0} = H_i^{tras} + H_i^{rot}$$

$$Mv_oR = Mv_iR + I\omega_i$$

Y ya que en el punto B rueda sin deslizar $v_i = R\omega_i$. Por lo tanto

$$Mv_oR = Mv_iR + MR^2\frac{v_i}{R} \longrightarrow v_i = \frac{v_o}{2} = 2{,}5\ m/s \qquad \omega_i = \frac{v_o}{2R}$$

Ya que la fuerza de roce no hace trabajo cuando un objeto rueda sin deslizar, es posible hacer conservación de energía entre el punto B y la altura max:

$$E_B = E_max \longrightarrow \frac{1}{2}I\omega_i^2 + \frac{1}{2}mv_i^2 = \Delta H_1 Mg$$

$$\Delta H_1 Mg = \frac{1}{2}M\frac{v_o^2}{4} + \frac{1}{2}MR^2\frac{v_o^2}{4R^2} \longrightarrow$$

$$\Delta H_1 = \frac{v_o^2}{4g} = 0{,}64\ m$$

c. Para este caso es hay que hacer el mismo análisis anterior pero debido a que el *hula-hula* sigue girando con ω_i en ΔH_2:

$$E_B = E_max \longrightarrow \frac{1}{2}I\omega_i^2 + \frac{1}{2}mv_i^2 = \Delta H_2 Mg + \frac{1}{2}I\omega_i^2 \longrightarrow \Delta H_2 = \frac{v_o^2}{8g} = 0{,}32\ m$$

Problema 2.

En este problema se deberá resolver la **CARRERA DE LOS SÓLIDOS RÍGIDOS**. Suponga que tiene una rampla de altura H, y en la parte superior ubica cuatro elementos sólidos rígidos, como se muestra en la figura. Se tiene un cilindro macizo de masa M y radio R, un cilindro hueco de masa M y radio R, una esfera maciza de masa M y radio R y una esfera hueca de masa M y radio R. Entonces, se ubican los cuatro elementos a la misma altura en la parte superior y se sueltan al mismo tiempo, comenzando a rodar sin deslizar por la rampla. ¿Cuál es el orden de llegada de los elementos?

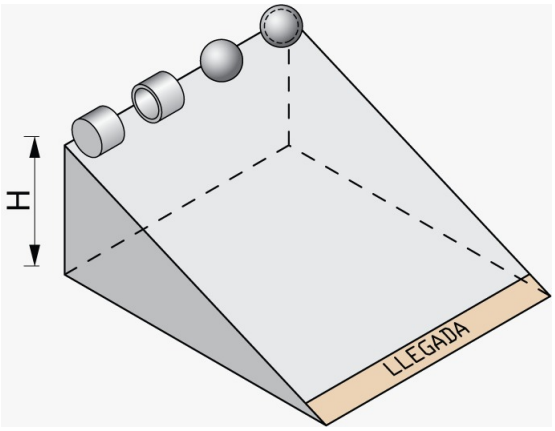


Figura 2: Carrera Sólidos Rígidos

Solución
Dado que no se tienen fuerzas externas no conservativas actuando, la energía se conserva entre el punto inicial y el punto final. Por tanto, de manera genérica para cualquier cuerpo, se tiene:

$$MgH = \frac{1}{2}Mv_f^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2$$

Considerando que los objetos ruedan sin deslizar se tiene que:

$$\omega_f = \frac{v_f}{R}$$

Por tanto, reemplazando:

$$MgH = \frac{1}{2}Mv_f^2 + \frac{1}{2}I\frac{v_f^2}{R^2}$$

Luego, es fácil notar que el cuerpo que llegue primero a la meta será aquel que adquiera una mayor velocidad. Considerando que todos los cuerpos tienen la misma masa y radio, entonces el cuerpo que tenga el menor momento de inercia I será el que gane la carrera. Los momentos de inercia son:

$$I_{cilindromacizo} = \frac{1}{2}MR^2$$

$$I_{cilindrohueco} = MR^2$$

$$I_{esferamaciza} = \frac{2}{5}MR^2$$

$$I_{esferahueca} = \frac{2}{3}MR^2$$

Con esto, el orden de llegada será:

1. Esfera maciza
2. Cilindro macizo
3. Esfera hueca
4. Cilindro hueco