PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
ICE1513 — Dinámica
Segundo Semestre 2018

Taller 11

Impulso & Momentum III — Sistemas de masa variable

Problema 1

Una persona de masa m_P está detenida en medio de una barcaza (también detenida) de masa m_B, como muestra la Figura 1. Desprecie las fuerzas del agua sobre la barcaza. Se pide:

a) Si la persona comienza a correr hacia la derecha con velocidad v_P (relativa al agua); ¿Cuál es la velocidad de la barcaza respecto al agua?

b) La persona se detiene cuando llega al extremo (derecho) de la barcaza; ¿Cuáles son las posiciones de la persona y barcaza medidas desde sus posiciones originales?

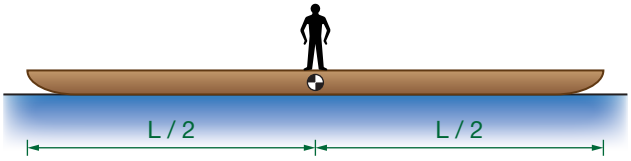


Figura 1: Configuración inicial de la persona sobre barcaza.

Problema 2

Dos anillas de masa $m = 4\,kg$ se deslizan sobre una barra horizontal como muestra la Figura 2. Se pide determinar sus velocidades después del impacto si:

a) Ambas anillas están imantadas y se quedan unidas.

b) El coeficiente de restitución del impacto es $e = 0{,}8$.

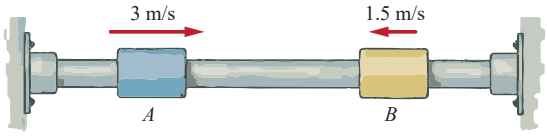


Figura 2: Anillas de masa $m = 4\,kg$ en rumbo de colisión.

Problema 3

Una pelota de tenis con masa $m = 0{,}09\,kg$ viaja a $15\,m/s$ hacia un jugador. El jugador golpea retorna la pelota a $20\,m/s$ luego de golpearla con su raqueta. El impacto tiene una duración de $0{,}032\,s$ y la magnitud de la fuerza sigue una parábola como muestra la Figura 3. Debido a la corta duración del impacto, se puede despreciar cualquier impulso generado por la fuerza de gravedad. Se pide determinar:

a) La fuerza máxima $F_{\max}$ de $F(t)$.

b) La fuerza promedio F_{ave} del impacto.

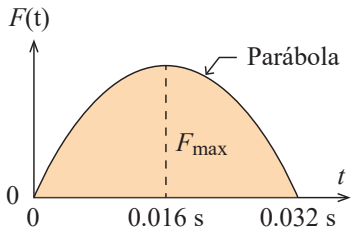


Figura 3: Gráfica de fuerza de impacto entre raqueta y pelota de tenis.

Hint: La razón entre las áreas de una parábola A_P y el rectángulo que la inscribe A_R es: $A_P = 2/3\,A_R$. Es decir, en el caso de la Figura 4: $A_P = (2/3)\,(bh)$.

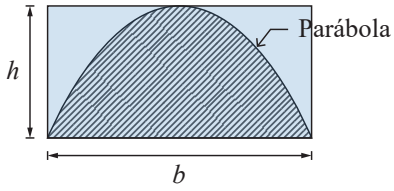


Figura 4: El área achurada (parábola) es 2/3 del área del rectángulo.

Problema 4

La fuerza P desenrolla una cadena de una pila a velocidad constante $\dot{x} = 1\,m/s$ como muestra la Figura 5. Desprecie la fricción de la cadena con el piso. Determine P si la cadena pesa $2\,N/m$.

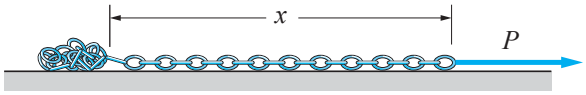
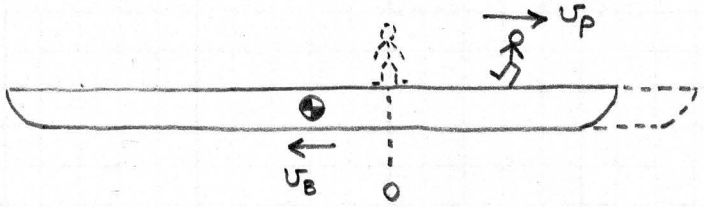


Figura 5: Cadena siendo desenrollada por una fuerza P a velocidad $\dot{x} = 1\,m/s$.

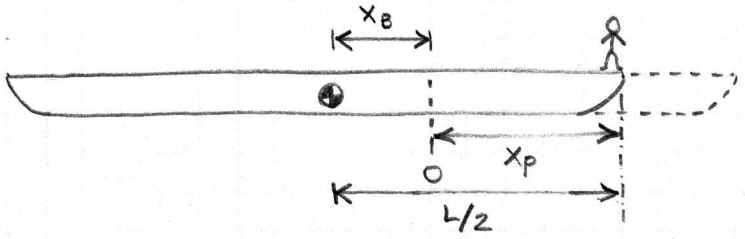
- **Problema 1**

Las fuerzas (que mutuamente) ejercen la persona y la barcaza son de tipo "interno" si consideramos a ambos juntos en nuestro sistema aislado: sus impulsos se cancelan y hay conservación de momentum.



$$m_B(0) + m_p(0) = m_B(-v_B) + m_p(v_p) \quad \leftarrow \text{en el eje "x"}$$

$$\longrightarrow v_B = \frac{m_p}{m_B} \cdot v_p \;//$$



De la geometría del problema sabemos que: $x_p + x_B = L/2$

, y además: $x_p = v_p \cdot \Delta t$ y $x_B = v_B \cdot \Delta t$

Es decir: $v_p \cdot \Delta t + v_B \cdot \Delta t = L/2$

Reemplazando v_B en términos de v_p:

$$\Delta t \left[1 + \frac{m_p}{m_B}\right] v_p = \frac{L}{2}$$

$$\Delta t = \left(\frac{m_B}{m_B + m_p}\right)\left(\frac{L}{2v_p}\right)$$

Las posiciones son: $x_p = v_p \left(\frac{m_B}{m_B + m_p}\right)\left(\frac{L}{2v_p}\right) = \left(\frac{m_B}{m_B + m_p}\right)\left(\frac{L}{2}\right)$ //

$$x_B = \left(\frac{v_B}{v_p}\right)\left(\frac{m_B}{m_B + m_p}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = \left(\frac{m_p}{m_B + m_p}\right)\left(\frac{L}{2}\right)$$ //

* Nota: En el futuro cercano será muy sencillo determinar x_p y x_B usando "centros de masa".

- **Problema 2**

La conservación de momentum dice:

$$m_A \cdot v_A + m_B \cdot v_B = m_A \cdot v_A' + m_B \cdot v_B'$$

Si ambos cuerpos quedan unidos, entonces $v_A' = v_B' = \bar{v}$, y con ello:

$$m_A \cdot v_A + m_B \cdot v_B = (m_A + m_B)\bar{v}$$

Alternativamente, se podría haber usado que $e = 0$:

$$e = 0 = \frac{v_B' - v_A'}{v_A - v_B}$$

$$0 = v_B' - v_A'$$

$$v_A' = v_B' \longrightarrow v_A' = v_B' = \bar{v}$$

Reemplazando valores:

$$(4\,kg)(3\,m/s) + (4\,kg)(-1.5\,m/s) = (8\,kg)\,\bar{v}$$

$$6 = 8\,\bar{v}$$

$$\bar{v} = \frac{3}{4}\,m/s \,//$$

Es decir, después del choque ambas masas se mueven juntas hacia la derecha.

Si ahora $e = 0.8$, entonces:

$$e = 0.8 = \frac{v_B' - v_A'}{v_A - v_B}$$

$$(0.8)(4.5) = 3.6\,m/s = v_B' - v_A'$$

La ecuación de conservación de momentum, con $m_A = m_B$:

$$\cancel{m_A} \cdot v_A + \cancel{m_B}\, v_B = \cancel{m_A} \cdot v_A' + \cancel{m_B} \cdot v_B'$$

$$3\,m/s - 1.5\,m/s = v_A' + (3.6\,m/s + v_A')$$

$$-2.1\,m/s = 2\,v_A'$$

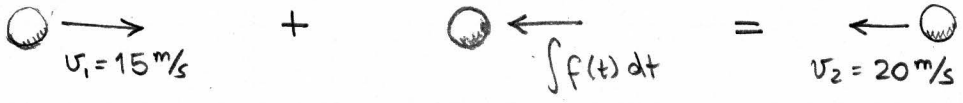
$$v_A' = -1.05\,m/s \,//$$

$$v_B' = 2.55\,m/s \,//$$

Ambas anillas se mueven hacia la derecha después del choque, pero a velocidades distintas.

- Problema 3

Haciéndo un diagrama de impulso - momentum:



$$m(15) + \int_0^{0.032} [-f(t)]\,dt = m(-20)$$

$$(0.09)(15) - \frac{2}{3}(0.032)(F_{max}) = (0.09)(-20)$$

$$3.15 = \frac{0.064}{3} F_{max}$$

$$F_{max} = 147.66\ N \,//$$

- **Problema 4**

Sabemos del enunciado que: $\dot{x} = v = 1\ [m/s]$

$$\rho = \frac{2}{g}\ [kg/m]$$

Como $v = cte$, entonces: $\dot{v} = 0$

La ecuación de un sistema de masa variable es:

$$\sum f = \cancel{m \cdot \dot{v}}^{\,0} + v_{c/p} \cdot \dot{m}$$

En nuestro caso: $\sum f = P$

Como la pila no se mueve: $v_{c/p} = v$

Es decir: $P = v \cdot \dot{m}$

La masa de la cadena en movimiento es: $m(x) = \rho \cdot x$

, y con ello: $\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = (\rho)(v)$

Reemplazando: $P = v \cdot (\rho \cdot v) = v^2 \cdot \rho = (1)\left(\frac{2}{g}\right)$

$$P = \frac{2}{g} \,//$$