ICE1514 – Dinámica

Apuntes de clase para un curso universitario de *Dinámica para Ingenieros*.

Autor
Tomás Zegard

Pontificia Universidad Católica de Chile
Santiago, Chile

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Version: **2021.01–beta1**

15 de agosto de 2021

Preámbulo

Este es un curso introductorio de *dinámica* (rama de la física) para estudiantes de ingeniería. El estudio de la *dinámica* considera varios tópicos pero este curso se centra en: cinemática, cinética, trabajo–energía, e impulso–momentum; todos estos inicialmente para partículas, pero luego también para cuerpos rígidos.

El estudio de estos apuntes requiere ciertos conocimientos previos de cálculo básico, geometría, y ecuaciones diferenciales. No se espera un dominio absoluto de estos y se hace un breve repaso de ellos al comienzo.

El contenido tiene reputación de ser difícil. La frustración con el contenido hace cuestionarse si este guarda relación con el desempeño profesional del ingeniero. Lo cierto es que la ingeniería resuelve problemas a través de la *ciencia aplicada*. Es decir, la ingeniería hace uso de la física, química, matemática, biología, y otras, para resolver problemas relevantes para la sociedad. Aquí es donde radica el primer problema del estudiante: la educación primaria y secundaria se basan en reconocer *patrones de problemas*. La mecánica frecuentemente observada en la educación escolar es: (1) en clase se presenta un nuevo tipo de problema al estudiante; (2) se ejercita con problemas idénticos pero cuyos números han sido cambiados; y finalmente (3) la evaluación es nuevamente el mismo problema, pero con otros números. Es decir, la solución en la educación escolar consiste en: (a) reconocer el patrón del problema, y (b) aplicar la mecánica de solución... algo que algunos llaman *mecanizar los problemas*. En la educación superior (universidad) esto deja de ser válido ya que los problemas de la práctica profesional (problemas reales) no siguen patrones.

El contenido del curso resultará difícil para aquellos que buscarán mecanizar el contenido. Es fácil caer en la tentación de leer cientos de problemas como *forma de estudio*, con la esperanza de que en la evaluación sepan reconocer un patrón conocido. En cambio, el alumno que "comprende el contenido" tendrá mejor desempeño cuando se le presente un problema que nunca ha visto antes. Esto será también cierto en los problemas que en el futuro encontrará en su desempeño profesional. Es decir, se recomienda **privilegiar la comprensión de pocos problemas por sobre la lectura de muchos**.

El alumno que comprende el contenido considerará el curso fácil y hasta quizás entretenido. Lamentablemente, este cambio de paradigma en el aprendizaje se ve obstaculizado por la porfía del estudiante hacia mecanizar. Comportamiento que es esperable: esta metodología de estudio les ha funcionado por muchos años. Por la misma razón se evita entregar un *formulario*; e.g., tener un formulario con las ecuaciones de relatividad especial no significa que sepa cómo usarlas. Este documento explica el origen de las ecuaciones de la dinámica, haciendo hincapié en los supuestos y restricciones. Se espera entonces desarrollar el pensamiento crítico para **resolver un problema teniendo conciencia de los alcances y limitaciones de su solución**.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Historia del Curso

El curso ICE1514 *Dinámica* es el fruto de cambios curriculares recientes en el plan de formación de los ingenieros dentro de la *Pontificia Universidad Católica de Chile* (PUC). Los cambios buscan dar la mayor flexibilidad posible, y al mismo tiempo acortar la duración del plan de estudio. La historia es relevante porque explica el contenido actual del curso, y algunas dificultades que presenta para los alumnos.

Mi versión de la historia comienza en 1998. El curso introductorio de "física para ingenieros" era un *curso de servicio* dictado por la facultad de física llamado FIS1512 *Física Clásica*. Paralelamente existía un curso equivalente del *Departamento de Ingeniería Estructural & Geotécnica* (DIEG) llamado ICE1013 *Dinámica*. En ese entonces una generación de ingeniería tenía sólo 400 alumnos (hoy tiene 800). Aproximadamente 350 de los 400 tomaban el camino de FIS1512, y sólo un reducido grupo de valientes lo hacía con ICE1013. ICE1013 tenía reputación de ser más difícil, pero también de lograr mayor encanto y aprendizaje en aquellos que lo hacían[1].

El cambio curricular de 2009 introdujo grandes cambios en la formación de los ingenieros de la PUC. Se hicieron esfuerzos para acortar el plan de formación, lo que impactó FIS1512 e ICE1003. Para continuar el relato, es necesario comprender que hay dos disciplinas complementarias pero diferentes: la *estática* (física de cuerpos que no se mueven) y la *dinámica* (física de cuerpos en movimiento). Se decidió que 1 sólo curso combinaría ambas disciplinas y producto de ello nacen FIS1513 e ICE1513, ambos llamados *Estática y Dinámica*. Casi paralelamente, el curso ICE1513 permanecería inactivo por años por razones varias, dejando FIS1513 como la única alternativa para avanzar por la malla curricular. Con este cambio, el curso donante de contenido ICE1003 *Estática*, se esperaba quedara redundante dentro del plan de estudios para así ser eliminado.

La debilidad del nuevo plan era evidente: comprime dos cursos en uno, cada uno difícil por sí solo. Era imposible lograr la profundidad necesaria en los temas. Algunos pocos lograban el nivel de dominio deseado, pero eso sería la excepción y no la regla, y dependedía fuertemente de la voluntad y motivación propia del estudiante. Las especialidades (*majors* en jerga actual) que necesitan dominio de la estática no tardaron en notar el problema *aguas abajo*. Los alumnos no manejaban las competencias esperadas al llegar a cursos más avanzados. En una jugada de marketing, ICE1003 se transforma en ICE2005 *Mecánica Estructural*, e introduce algunos cambios en el programa. El curso ICE2005 se transformó en el nuevo bastión donde se enseñaba la estática, pero a costa de no reducir el número de cursos de la malla curricular.

Regresé como profesor a la misma casa de estudios donde hice mi pregrado[2], donde me tocó dictar ICE2005 el año 2017. Me explicaron que ya no era necesario comenzar de cero porque los principios básicos de la estática se estudiaban en el curso previo. La idea era prometedora; podríamos lograr mayor profundidad y tocar temas avanzados de estática, lo que contribuirá a la formación de estos nuevos ingenieros civiles[3]. La verdad es que de estática comprendían poco o nada. Esto se reflejaba también en el "examen de licenciatura" (*fundamentals exam* en jerga actual), cuyos resultados mostraban un dominio pobre de las competencias asociadas.

Al mismo tiempo que yo dictaba ICE2005 se decidió reactivar ICE1513. Nuevamente aparecía la opción de adquirir las competencias por dos caminos paralelos en la malla curricular. La esperanza era que los interesados en las especialidades civiles escogerían ICE1513 porque los prepararía mejor para lo que venía (similar a ICE1013 en el pasado). La respuesta del alumnado fue poco cálida: habiendo combinado dos cursos en un semestre, el curso ya era lo suficientemente difícil.

El semestre siguiente se me pidió dictar ICE1513. Además, se solicitó que ICE y FIS trabajaran conjuntamente para que contribuyendo ambas facultades el curso resulte mejor y contribuya eficazmente a la formación de los estudiantes. Habiendo experimentado el problema aguas abajo (en

[1] Yo cursé FIS1512: no era un alumno muy destacado en mis primeros años.

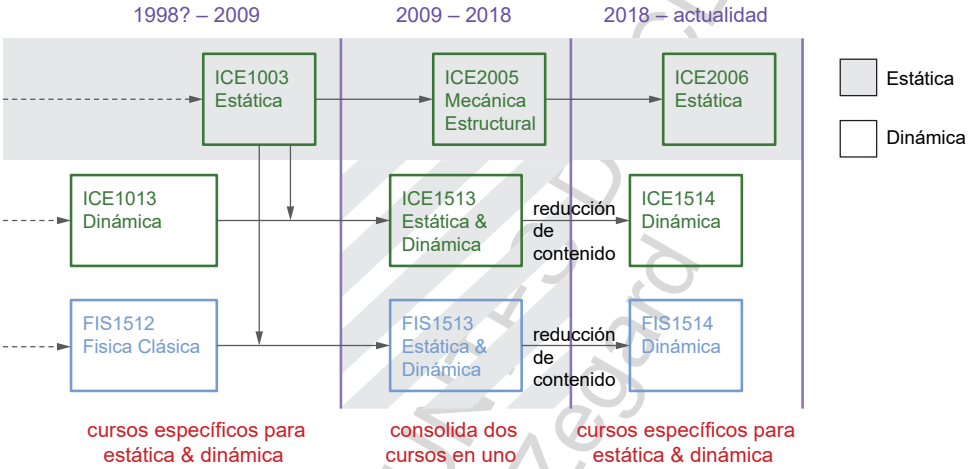
[2] Luego de unos desastrosos primeros años en la PUC, mejoré mucho mi rendimiento académico. Una cosa llevó a la otra, y luego de hacer estudios de postgrado regresé como docente al mismo lugar donde todo comenzó.

[3] Notar que previamente sólo hice referencia a "ingeniero" y sólo ahora hice uso de "ingeniero civil". Esto se debe a que no todas las especialidades son internacionalmente reconocidas como civiles. Internacionalmente, las ingenierías reconocidas como civiles son: hidráulica, ambiental, construcción, transporte, estructural, y geotécnica.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

ICE2005), esto me daba una oportunidad de ver lo que estaba ocurriendo aguas arriba. Además, esta sería la primera de muchas ocasiones en que FIS1513 e ICE1513 se coordinarían[4]. Habiéndo hecho ICE1513 e ICE2005 pude emitir un juicio informado de lo que estaba ocurriendo: ICE/FIS1513 está sobrecargado de contenido. Conclusión a la que otros profesores también llegarían (incluso mucho antes de mi aparición en el curso).

La solución sería elaborada por un equipo de trabajo conjunto entre FIS e ICE; equipo al cual tuve el privilegio de ser invitado. Se determinó que para lograr un mejor aprendizaje era necesario descomprimir el contenido. Esto significaba sacar estática del curso, con lo que se daba más tiempo a los alumnos para madurar los conceptos y contenido. Estática se abordaría en detalle en ICE2005, lo que constituía un retorno a las condiciones pre–2009. Esto da origen a los cursos FIS1514 e ICE1514 *Dinámica*; mientras que ICE2005 pasa a ser ICE2006 *Estática*.



La nueva propuesta no es realmente "nueva"; es el esquema que se utiliza en la gran mayoría de universidades: 1 curso para estática, y 1 curso para dinámica. Además, la condición es muy similar a pre–2009, al punto que uno de los libros frecuentemente utilizados es aquel que se tenía para FIS1512. Los resultados del cambio tardarán años en ser visibles, pero algunos de los profesores que han participado en el (nuevo) curso miran positivamente la reducción de contenidos.

Otro problema que introduciría los cambios de 2009 es que ahora se recomendaba tomar el curso ICE2313 *Mecánica de Solidos* antes que ICE2006 *Estática*. Estudiar la mecánica de sólidos (o la mecánica de fluidos) antes de dominar la estática es *poner la carreta delante de los bueyes*... pero esa es historia para otro día.

Tomás Zegard (2020)

BORRADOR PUNTO DE CLASE Tomás Zegard

[4]No hay ninguna obligación de coordinar entre ICE y FIS debido a que pertenecen a facultades diferentes y tienen distinta sigla. La coordinación se decide al comienzo de cada edición (pocos días antes del comienzo) y significa un esfuerzo adicional que deben hacer los profesores. Este esfuerzo adicional se hace con miras a una mejor calidad de docencia y también porque el alumnado así lo prefiere.

Índice general

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

1. Introducción y Repaso **6**
1.1. Notación y Definiciones . . . 6
1.1.1. Notación . . . 6
1.1.2. Definiciones . . . 6
1.2. Vectores . . . 7
1.3. Operaciones vectoriales básicas . . . 8
1.3.1. Producto escalar . . . 8
1.3.2. Suma . . . 8
1.3.3. Resta . . . 8
1.3.4. Producto Punto . . . 8
1.4. Propiedades de los vectores base y directores . . . 9
1.4.1. Vectores ortogonales . . . 9
1.4.2. Cosenos directores . . . 9
1.5. Derivadas e integrales temporales . . . 12
1.5.1. Derivada temporal . . . 12
1.5.2. Integrales y la variable muda . . . 12
1.6. EDO: separación de variables . . . 12
1.6.1. Solución de EDOs: integrales indefinidas . . . 13
1.6.2. Solución de EDOs: integrales definidas . . . 14
1.7. Leyes de Newton . . . 15

2. Cinemática **16**
2.1. Cinemática de una partícula . . . 16
2.2. Movimiento rectilíneo (movimiento 1D) . . . 17
2.2.1. Movimiento con aceleración constante . . . 18
2.2.2. Movimiento con aceleración errática . . . 22
2.2.3. Gráficas $\ddot{u}$–t, $\dot{u}$–t, y u–t . . . 24
2.3. Movimiento rectangular cartesiano (movimiento 2D/3D) . . . 26
2.4. Movimiento en coordenadas polares y cilíndricas . . . 30
2.4.1. Notación: velocidad y aceleración angular . . . 32
2.4.2. Movimiento circular . . . 34
2.5. Movimiento relativo . . . 39

Capítulo 1

Introducción y Repaso

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

1.1. Notación y Definiciones

1.1.1. Notación

No existe un acuerdo universal para la notación de escalares, vectores, y matrices. No obstante, el siguiente recuadro resume la mayoría de las convenciones y donde típicamente se utilizan:

	Publicaciones Científicas	Textos Pregrado	Álgebra Tensorial
escalar	a, A		
vector	$\mathbf{a}$	$\{\mathbf{a}\}$, $\overrightarrow{a}$	$\underset{\sim}{a}$
matriz	$\mathbf{A}$	$[\mathbf{A}]$	$\underset{\approx}{A}$

Debido a que es difícil hacer letras "en negrita" en la pizarra, se suele usar la convención de *textos de pregrado* o bien la de *álgebra tensorial*[1].

Existe un tipo de vector especial llamado *vector director*, cuya notación es: $\hat{a}$ o $\hat{\mathbf{a}}$.

1.1.2. Definiciones

Escalar
Es una cuantificación física que sólo requiere una magnitud para quedar definida, e.g.: tiempo, volumen, densidad, rapidez...

Vector
Es una cuantificación física que requiere magnitud y dirección para quedar definida, e.g.: posición, fuerza, momento (también llamado torque)...

Vector Director
Es en vector cuya magnitud es igual a 1. Especifica una dirección, pero no una magnitud.

Vectores Base (cartesianos)
Fijando un sistema de referencia (sistema de ejes), los vectores unitarios en la dirección positiva de los ejes "x", "y", y "z" llamados $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, y $\hat{\mathbf{k}}$, respectivamente[2][3]. Estos vectores base son también vectores directores debido a que son unitarios.

[1] En la pizarra yo, Tomás Zegard, suelo usar: a, A para escalares; $\underset{\sim}{a}$ para vectores; y $\underset{\approx}{A}$ para matrices.
[2] Muchos matemáticos suelen usar la notación $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$, y $\hat{\mathbf{e}}_3$ en vez para referirse a los vectores base cartesianos.
[3] Situación similar ocurre en otros sistemas coordenados (e.g. cilíndrico o esférico).

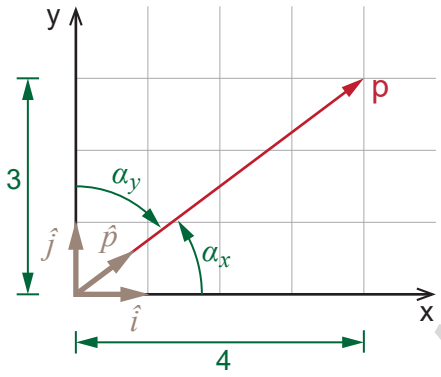


Figura 1.1: Ejemplo de un vector $\mathbf{p}$ en un sistema de ejes definido por $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$.

1.2. Vectores

Representación de un vector

Un vector $\mathbf{p}$ se puede representar como magnitudes (escalares) asociadas a cada vector base:

$$\mathbf{p} = p_x\,\hat{\mathbf{i}} + p_y\,\hat{\mathbf{j}} + p_z\,\hat{\mathbf{k}} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} \tag{1.1}$$

, que para el ejemplo bidimensional de la Figura 1.1, resulta:

$$\mathbf{p} = (4)\,\hat{\mathbf{i}} + (3)\,\hat{\mathbf{j}} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

Magnitud de un vector

La magnitud (o longitud) del vector se escribe $|\mathbf{p}|$ o bien $\|\mathbf{p}\|$:

$$|\mathbf{p}| = \sqrt{\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}} = \sqrt{(p_x)^2 + (p_y)^2 + (p_z)^2} \tag{1.2}$$

, que para el ejemplo bidimensional de la Figura 1.1, resulta:

$$|\mathbf{p}| = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Normalización de un vector

El proceso de normalizar un vector consiste en escalarlo proporcionalmente para que su longitud sea igual a 1; obteniendo así su vector director (que indicia la dirección del mismo). Es decir, el vector director $\hat{\mathbf{p}}$ asociado al vector $\mathbf{p}$ es igual a:

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = \left(\frac{p_x}{\sqrt{(p_x)^2 + (p_y)^2 + (p_z)^2}}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{p_y}{\sqrt{(p_x)^2 + (p_y)^2 + (p_z)^2}}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{p_z}{\sqrt{(p_x)^2 + (p_y)^2 + (p_z)^2}}\right)\hat{\mathbf{k}} \tag{1.3}$$

En el ejemplo bidimensional de la Figura 1.1, resulta:

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = \frac{\{4\,,\,3\}^T}{5} = \left(\frac{4}{5}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{3}{5}\right)\hat{\mathbf{j}} = \begin{Bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{Bmatrix}$$

Es sencillo probar que $\hat{\mathbf{p}}$ es, en efecto, un *vector unitario*:

$$|\hat{\mathbf{p}}| = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16+9}{25}} = \sqrt{1} = 1$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Vector representado como magnitud + dirección

Todo vector puede (convenientemente) representarse como su magnitud (escalar) y una dirección (definida por su director):

$$\mathbf{p} = |\mathbf{p}|\,\hat{\mathbf{p}} \tag{1.4}$$

Esta representación es de gran utilidad cuando se conoce la magnitud de un vector y se quiere determinar su dirección, o viceversa.

1.3. Operaciones vectoriales básicas

1.3.1. Producto escalar

El producto escalar (como su nombre indica) sirve para modificar la escala de un vector, i.e. aumentar o disminuir su magnitud pero no cambia su sentido[4]:

$$\lambda\mathbf{p} = (\lambda\,p_x)\,\hat{\mathbf{i}} + (\lambda\,p_y)\,\hat{\mathbf{j}} + (\lambda\,p_z)\,\hat{\mathbf{k}} = \begin{Bmatrix} \lambda\,p_x \\ \lambda\,p_y \\ \lambda\,p_z \end{Bmatrix} \tag{1.5}$$

Se cumple también que $|\lambda\mathbf{p}| = |\lambda\,p|\;\hat{\mathbf{p}}$ para un escalar $\lambda \geq 0$ (un escalar negativo cambiará el sentido de $\hat{\mathbf{p}}$).wait..

Vector opuesto

Dado un vector $\mathbf{p}$, su opuesto es:

$$-\,\mathbf{p} = (-1)\,\mathbf{p} = (-p_x)\,\hat{\mathbf{i}} + (-p_y)\,\hat{\mathbf{j}} + (-p_z)\,\hat{\mathbf{k}} = \begin{Bmatrix} -p_x \\ -p_y \\ -p_z \end{Bmatrix} \tag{1.6}$$

El vector conserva su magnitud y dirección; pero cambia su sentido.

1.3.2. Suma

La suma de vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x)\,\hat{\mathbf{i}} + (a_y + b_y)\,\hat{\mathbf{j}} + (a_z + b_z)\,\hat{\mathbf{k}} = \begin{Bmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{Bmatrix} \tag{1.7}$$

1.3.3. Resta

La resta de vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = (a_x - b_x)\,\hat{\mathbf{i}} + (a_y - b_y)\,\hat{\mathbf{j}} + (a_z - b_z)\,\hat{\mathbf{k}} = \begin{Bmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{Bmatrix} \tag{1.8}$$

1.3.4. Producto Punto

El *producto punto* es una operación entre vectores cuyo resultado es un escalar:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x\,b_x + a_y\,b_y + a_z\,b_z \tag{1.9}$$

Además, se cumple que:

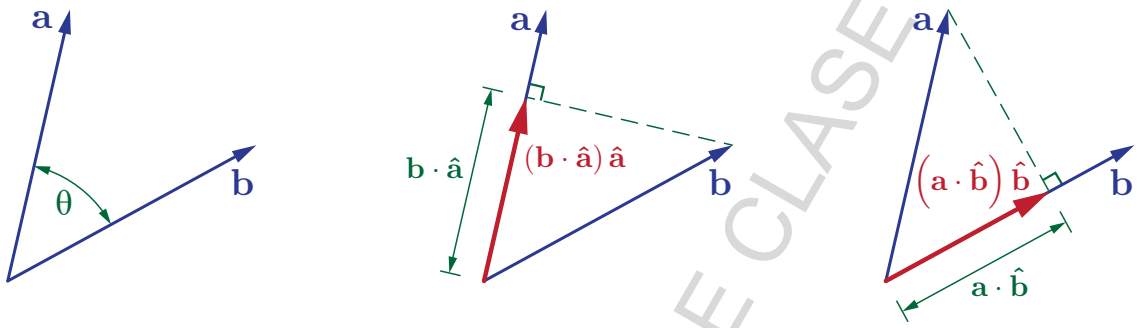
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\;|\mathbf{b}|\,\cos(\theta) \tag{1.10}$$

[4] Escalar un vector por un valor negativo sí cambiará su sentido.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

, donde θ es el ángulo que forman los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, como muestra la Figura 1.2(a).

El producto punto de un vector $\mathbf{b}$ por el director $\hat{\mathbf{a}}$ retorna la magnitud (escalar) de la proyección de $\mathbf{b}$ sobre $\mathbf{a}$, como muestra la Figura 1.2(b). Análogamente, el producto punto entre $\mathbf{a}$ y el director $\hat{\mathbf{b}}$ retorna la magnitud de la proyección de $\mathbf{a}$ sobre $\mathbf{b}$, como muestra la Figura 1.2(c). En caso de querer el vector proyectado, es necesario multiplicar estas magnitudes por los directores correspondientes.



(a) (b) (c)

Figura 1.2: Producto punto entre dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$: **(a)** ángulo θ entre los vectores; **(b)** proyección de $\mathbf{b}$ sobre $\mathbf{a}$; y **(c)** proyección de $\mathbf{a}$ sobre $\mathbf{b}$.

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

1.4. Propiedades de los vectores base y directores

1.4.1. Vectores ortogonales

Si los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son ortogonales (forman un ángulo recto), entonces:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \text{si } \mathbf{a} \perp \mathbf{b} \tag{1.11}$$

Una propiedad relevante de los vectores base cartesianos es: $\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0$; mientras que $\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1$.

1.4.2. Cosenos directores

Llamando α_x al ángulo que forma un vector $\mathbf{p}$ con el eje "x", entonces:

$$\cos(\alpha_x) = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{i}}}{|\mathbf{p}|\,\left|\hat{\mathbf{i}}\right|} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{i}}$$

$$\cos(\alpha_x) = \begin{Bmatrix} \hat{p}_x \\ \hat{p}_y \\ \hat{p}_z \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \hat{p}_x$$

Es decir, la componente "x" de un vector director es igual al coseno que forma el vector con el eje "x". Se puede repetir el proceso para ver que el ángulo que forma el vector $\mathbf{p}$ con el eje "y" es igual a $\cos(\alpha_y) = \hat{p}_y$. Lo mismo ocurre con el eje "z", i.e. $\cos(\alpha_z) = \hat{p}_z$. Es decir, las componentes de un vector director son sus respectivos *cosenos directores*:

$$\hat{\mathbf{p}} = \left(\frac{p_x}{\sqrt{(p_x)^2 + (p_y)^2 + (p_z)^2}}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{p_y}{\sqrt{(p_x)^2 + (p_y)^2 + (p_z)^2}}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{p_z}{\sqrt{(p_x)^2 + (p_y)^2 + (p_z)^2}}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

$$\hat{\mathbf{p}} = \cos(\alpha_x)\,\hat{\mathbf{i}} + \cos(\alpha_y)\,\hat{\mathbf{j}} + \cos(\alpha_z)\,\hat{\mathbf{k}} \tag{1.12}$$

La utilidad radica en que si conocemos los ángulos que forma un vector bidimensional $\mathbf{p}$ con los ejes "x" e "y", podemos conocer su director, y viceversa. En el ejemplo de la Figura 1.1:

$$\alpha_x = \text{acos}\left(\hat{p}_x\right) = \text{acos}\left(\frac{4}{5}\right) = 36{,}87° \qquad \alpha_y = \text{acos}\left(\hat{p}_y\right) = \text{acos}\left(\frac{3}{5}\right) = 53{,}13°$$

En el caso tridimensional, los ángulos son como muestra la Figura 1.3. Es un error común pensar que existe una relación con la suma de dichos ángulos (i.e. $\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z \neq \pi$ u otro valor): la relación que sí es cierta es que $\cos^2(\alpha_x) + \cos^2(\alpha_y) + \cos^2(\alpha_z) = 1$, cuya demostración es sencilla ya que $\hat{\mathbf{p}} = 1$.

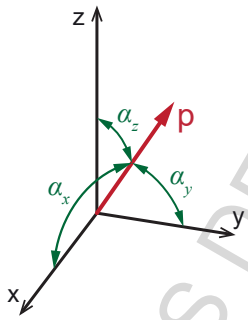
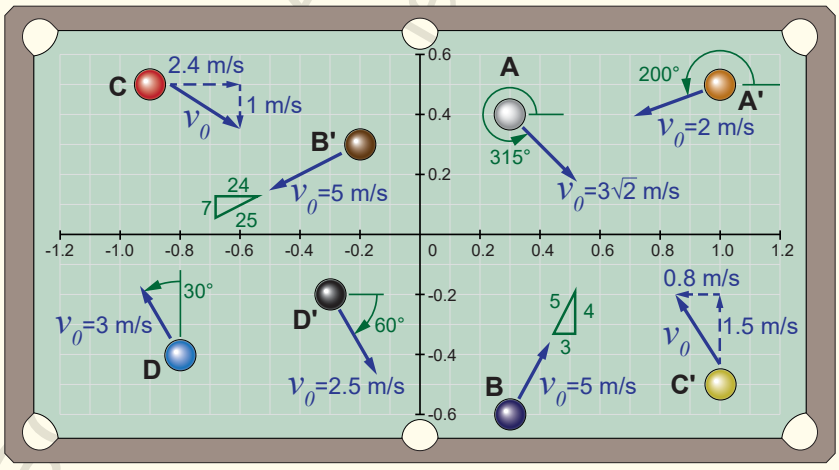


Figura 1.3: Ejemplo de un vector tridimensional $\mathbf{p}$, y sus respectivos ángulos asociados a los cosenos directores.

APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

Ejemplo

La Figura a continuación muestra una mesa de billar con bolas en posiciones iniciales $\mathbf{u}_0$, las que son impulsadas con velocidades iniciales $\mathbf{v}_0$.



Para las bolas A, B, C, y D, se pide determinar:

a) La posición inicial $\mathbf{u}_0$.

b) El vector de velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ descompuesto en rapidez v_0 y dirección $\hat{\mathbf{v}}_0$.

Bola A
La posición inicial es: $\mathbf{u}_0 = 0{,}3\,\hat{\mathbf{i}} + 0{,}4\,\hat{\mathbf{j}}$

La dirección de $\mathbf{v}_0$ se indica con un ángulo medido desde el eje x en contra de las manecillas del reloj (coordenada polar). La rapidez inicial es un dato $v_0 = 3\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$, y con ello:

$$\mathbf{v}_0 = v_0\,\hat{\mathbf{v}}_0 = 3\sqrt{2}\begin{Bmatrix}\cos 315^\circ\\ \sin 315^\circ\end{Bmatrix} = 3\sqrt{2}\begin{Bmatrix}+1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2}\end{Bmatrix}\ \mathrm{m/s}$$

, donde la dirección es $\hat{\mathbf{v}}_0 = {}^1/_{\sqrt{2}}\,\hat{\mathbf{i}} - {}^1/_{\sqrt{2}}\,\hat{\mathbf{j}}$.

Bola *B*
La posición inicial es: $\mathbf{u}_0 = 0{,}3\,\hat{\mathbf{i}} - 0{,}6\,\hat{\mathbf{j}}$
La dirección de $\mathbf{v}_0$ se indica con un triángulo $3:4:5$. La rapidez inicial es un dato $v_0 = 5\,\mathrm{m/s}$, y con ello:

$$\mathbf{v}_0 = v_0\,\hat{\mathbf{v}}_0 = 5\begin{Bmatrix}3/5\\ 4/5\end{Bmatrix}\ \mathrm{m/s}$$

, donde la dirección es $\hat{\mathbf{v}}_0 = {}^3/_5\,\hat{\mathbf{i}} + {}^4/_5\,\hat{\mathbf{j}}$.

Bola *C*
La posición inicial es: $\mathbf{u}_0 = -0{,}9\,\hat{\mathbf{i}} + 0{,}5\,\hat{\mathbf{j}}$
La velocidad inicial es: $\mathbf{v}_0 = 2{,}4\,\hat{\mathbf{i}} - 1{,}0\,\hat{\mathbf{j}}$.
La dirección $\hat{\mathbf{v}}_0$ se obtiene al normalizar el vector $\mathbf{v}_0$ (dividir por su magnitud, i.e., su rapidez):

$$v_0 = \sqrt{(2{,}4)^2 + (1{,}0)^2} = 2{,}6\,\mathrm{m/s}$$
$$\hat{\mathbf{v}}_0 = \frac{\mathbf{v}_0}{v_0} = \frac{2{,}4\,\hat{\mathbf{i}} - 1{,}0\,\hat{\mathbf{j}}}{2{,}6} = \frac{12}{13}\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{5}{13}\,\hat{\mathbf{j}}$$

Bola *D*
La posición inicial es: $\mathbf{u}_0 = -0{,}8\,\hat{\mathbf{i}} - 0{,}4\,\hat{\mathbf{j}}$
La dirección de $\mathbf{v}_0$ se indica con un ángulo medido desde el eje y positivo. Se pueden tomar dos caminos equivalentes: **(a)** calcular el ángulo medido desde el eje x positivo[a] y repetir el proceso hecho con la bola *A*; o **(b)** determinar directamente el vector director sabiendo que el coseno y seno corresponden al cateto adyacente y opuesto respectivamente, a lo que sólo restaría incluir el signo correcto según la dirección de los mismos. En este caso se optará por el segundo método: la dirección x del vector director corresponde al seno con signo negativo, mientras que la dirección y es el coseno con signo positivo. La rapidez inicial es $v_0 = 3\,\mathrm{m/s}$, y con ello:

$$\mathbf{v}_0 = v_0\,\hat{\mathbf{v}}_0 = 3\begin{Bmatrix}-\sin 30^\circ\\ +\cos 30^\circ\end{Bmatrix} = 3\begin{Bmatrix}-1/2\\ +\sqrt{3}/2\end{Bmatrix}\ \mathrm{m/s}$$

, donde la dirección es $\hat{\mathbf{v}}_0 = -{}^1/_2\,\hat{\mathbf{i}} + {}^{\sqrt{3}}/_2\,\hat{\mathbf{j}}$.

[a] En este caso ese ángulo es $90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$.

Sugerido

Repita los cálculos del problema anterior para las bolas A', B', C', y D'.

La dificultad está en obtener $\hat{\mathbf{v}}_0$. Basta con multiplicar este director por la rapidez para obtener $\mathbf{v}_0$.

Bola D': $\hat{\mathbf{v}}_0 = {}^1\!/_2\,\hat{\mathbf{i}} - {}^{\sqrt{3}}\!/_2\,\hat{\mathbf{j}}$
Bola C': $\hat{\mathbf{v}}_0 = -{}^8\!/_{17}\,\hat{\mathbf{i}} + {}^{15}\!/_{17}\,\hat{\mathbf{j}}$ y con rapidez $v_0 = 1{,}7\,\mathrm{m/s}$
Bola B': $\hat{\mathbf{v}}_0 = -{}^{24}\!/_{25}\,\hat{\mathbf{i}} - {}^7\!/_{25}\,\hat{\mathbf{j}}$
Bola A': $\hat{\mathbf{v}}_0 = -0{,}9397\,\hat{\mathbf{i}} - 0{,}3420\,\hat{\mathbf{j}}$

PROHIBIDO APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard

1.5. Derivadas e integrales temporales

1.5.1. Derivada temporal

La dinámica trata el movimiento de partículas y cuerpos. El movimiento es un cambio de posición (o giro) en el tiempo. Es decir, la dinámica estudia cómo ciertas magnitudes varían en el tiempo.

En las secciones siguientes se demostrará que si la posición de una partícula está definida por el vector $\mathbf{u}$ que varía en el tiempo (porque hay movimiento), entonces:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{u}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{u}}$$

, donde $\mathbf{v}$ es la *velocidad instantánea*, y $\mathbf{a}$ es la *aceleración instantánea*.

La atención en este momento debe fijarse en la forma en que se escribieron las derivadas temporales: $\dot{\mathbf{u}}$ y $\ddot{\mathbf{u}}$. Es decir, uno y dos puntos sobre una variable indican la primera y segunda derivada temporal, respectivamente.

1.5.2. Integrales y la variable muda

Frecuentemente se integrará una expresión en el tiempo entre 0 y un límite superior de tiempo t variable. Por ejemplo, supongamos que queremos integrar la siguiente expresión entre 0 y t:

$$v\,(t) = 3t^2 - t$$

La integral sería entonces:

$$\int_0^t v\,(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^t 3t^2 - t\,\mathrm{d}t = t^3 - \frac{1}{2}t^2\Big|_{t=0}^{t=t} = t^3 - \frac{1}{2}t^2$$

Si bien este desarrollo no tiene error alguno, el hecho de *integrar sobre t para luego evaluar hasta t* es un "choque de letras" que podría incomodar a más de alguno. En estos casos se recomienda usar una *variable muda*: variable auxiliar para efectos de hacer la integral solamente. Utilizando una variable muda τ, el mismo desarrollo anterior es:

$$\int_0^t v\,(\tau)\ \mathrm{d}\tau = \int_0^t 3\tau^2 - \tau\,\mathrm{d}\tau = \tau^3 - \frac{1}{2}\tau^2\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = t^3 - \frac{1}{2}t^2$$

En este caso hemos *integrado sobre la variable muda τ para luego evaluar hasta t*. Esto se extiende a integrales sobre otras variables; por ejemplo integrar sobre el desplazamiento u con un límite u variable. En todos estos casos es recomendable usar una variable muda.

1.6. EDO: separación de variables

Las *ecuaciones diferenciales* se distinguen porque la solución no es un número sino una ecuación. Por ejemplo, buscamos una ecuación $u\,(t)$ que satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\mathrm{d}u\,(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{2\,t + 1}{u}$$

Esta ecuación diferencial puede ser resuelta por variados métodos. La clasificación más sencilla de ecuaciones diferenciales se denomina *ecuación diferencial ordinaria* (EDO[5]) Nuestro estudio de la dinámica requiere resolver EDOs y lo haremos con el método de *separación de variables*. Para usar *separación de variables* es necesario que las variables de la EDO (y sus diferenciales) puedan separarse a cada lado de la ecuación:

$$\frac{\mathrm{d}u\,(t)}{\mathrm{d}t} = f\,(u,t) = \frac{g\,(t)}{h\,(u)} \qquad \longrightarrow \qquad h\,(u)\ \mathrm{d}u = g\,(t)\ \mathrm{d}t$$

[5]En inglés ODE, por *Ordinary Differential Equation*.

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

1.6.1. Solución de EDOs: integrales indefinidas

Una vez separadas las variables (con sus diferenciales $\mathrm{d}u$ y $\mathrm{d}t$) a cada lado de la ecuación, podemos integrar. Utilizando la expresión del ejemplo anterior:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u\,(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{2\,t+1}{u} \qquad \longrightarrow \qquad (u)\ \mathrm{d}u &= (2\,t+1)\ \mathrm{d}t \\ \int (u)\ \mathrm{d}u &= \int (2\,t+1)\ \mathrm{d}t \\ \frac{1}{2}u^2 + C_u &= t^2 + t + C_t \\ u &= \sqrt{2}\,\sqrt{t^2+t+(C_t-C_u)} = \sqrt{2\,t^2+2\,t+C}\end{aligned}$$

Esta corresponde a la solución de la ecuación diferencial, donde $C = 2\,C_t - 2\,C_u$ es una *constante de integración*. La necesidad de la constante de integración C es evidente cuando se verifica si la solución obtenida efectivamente satisface la ecuación (diferencial) original:

$$\frac{\mathrm{d}u\,(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sqrt{2\,t^2+2\,t+C}\right) = \left[\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\,t^2+2\,t+C}}\right][4\,t+2] = \frac{2\,t+1}{u}$$

Es decir, la ecuación diferencial se satisface para cualquier valor de C. En otras palabras, existe una familia (infinita) de ecuaciones que resuelven la ecuación diferencial. Todas las siguientes ecuaciones son soluciones válidas:

$$\begin{aligned}u_1\,(t) &= \sqrt{2\,t^2+2\,t+3} \\ u_2\,(t) &= \sqrt{2\,t^2+2\,t-5} \\ u_3\,(t) &= \sqrt{2\,t^2+2\,t}\end{aligned}$$

La solución es única si se entrega información adicional. Necesitamos un único punto $u\,(a) = b$ para seleccionar una de las infinitas soluciones posibles. Se podría decir entonces que la ecuación diferencial anterior estaba "incompleta", y debió haber sido:

$$\frac{\mathrm{d}u\,(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{2\,t+1}{u\,(t)} \qquad \text{con} \qquad u\,(1) = 3$$

, cuya solución sigue siendo:

$$u\,(t) = \sqrt{2\,t^2+2\,t+C}$$

, donde ahora es posible determinar un único valor para C ya que:

$$\begin{aligned}u\,(1) = 3 \qquad \longrightarrow \qquad \sqrt{2\cdot 1^2+2+C} &= 3 \\ C &= 5\end{aligned}$$

Finalmente, la solución del problema es:

$$u\,(t) = \sqrt{2\,t^2+2\,t+5}$$

Ejemplo

Determine $u\,(t)$ si se sabe que:

$$\dot{u} = \cos t + 3\,t^2 \qquad \text{con} \qquad u\,(0) = u_0 = -5$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Separando las variables y sus diferenciales:

$$\frac{\mathrm{d}u\,(t)}{\mathrm{d}t} = \cos t + 3\,t^2 \qquad \longrightarrow \qquad (1)\ \mathrm{d}u = \left(\cos t + 3\,t^2\right)\ \mathrm{d}t$$

$$\int (1)\ \mathrm{d}u = \int \left(\cos t + 3\,t^2\right)\ \mathrm{d}t$$

$$u = \sin t + t^3 + C$$

Utilizando la condición inicial $u\,(0) = -5$, se puede determinar el valor de C:

$$\sin 0 + 0^3 + C = -5 \qquad \longrightarrow \qquad C = -5$$

FInalmente, la ecuación buscada es:

$$u\,(t) = \sin t + t^3 - 5$$

Ejemplo

Determine $u\,(t)$ si se sabe que:

$$\dot{u} = 2\,u\,t \qquad \text{con} \qquad u\,(0) = u_0 = 7$$

Separando las variables de la EDO y sus diferenciales:

$$\frac{\mathrm{d}u\,(t)}{\mathrm{d}t} = 2\,u\,t \qquad \longrightarrow \qquad \left(\frac{1}{u}\right)\ \mathrm{d}u = (2\,t)\ \mathrm{d}t$$

$$\int \left(\frac{1}{u}\right)\ \mathrm{d}u = \int (2\,t)\ \mathrm{d}t$$

$$\log u = t^2 + C$$

$$u = e^C \cdot e^{t^2} = A\,e^{t^2}$$

Es común redefinir el exponencial de la constante de integración e^C como A. La nomenclatura $A = e^C$ es usada por un número importante de textos asociados al tema. Utilizando la condición inicial $u\,(0) = 7$, se puede determinar el valor de A:

$$A\,e^0 = 7 \qquad \longrightarrow \qquad A = 7$$

Finalmente, la ecuación buscada es:

$$u\,(t) = 7\,e^{t^2}$$

1.6.2. Solución de EDOs: integrales definidas

El procedimiento para resolver EDOs de la sección previa hace uso de *integrales indefinidas*: integrales sin límites de integración. Alternativamente, usando *integrales definidas* se evita la constante de integración. El ejemplo a continuación explica el procedimiento en detalle.

Ejemplo

Repita el ejemplo anterior usando integrales definidas Se sabe que:

$$\dot{u} = 2\,u\,t \qquad \text{con} \qquad u\,(0) = u_0 = 7$$

BORRADOR APUNTES DE CLASE Tomás Zegard

Se sabe que el punto $(t_0, u_0) = (0, 7)$ pertenece a la ecuación buscada. Por otro lado, queremos determinar u para cualquier instante t, con lo que otro punto de la ecuación es (t, u) variable. Separando las variables de la EDO:

$$\left(\frac{1}{u}\right)\,\mathrm{d}u = (2\,t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{u_1}^{u_2}\left(\frac{1}{u}\right)\,\mathrm{d}u = \int_{t_1}^{t_2}(2\,t)\,\mathrm{d}t \qquad \longrightarrow \qquad \int_{7}^{u}\left(\frac{1}{u}\right)\,\mathrm{d}u = \int_{0}^{t}(2\,t)\,\mathrm{d}t$$

En este caso sería conveniente (aunque no obligatorio) usar una variable muda en las integrales para evitar confusiones:

$$\int_{7}^{u}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\,\mathrm{d}\alpha = \int_{0}^{t}(2\,\beta)\,\mathrm{d}\beta$$

$$\log\alpha\,\Big|_{\alpha=7}^{\alpha=u} = \beta^2\,\Big|_{\beta=0}^{\beta=t}$$

$$\log u - \log 7 = t^2 - 0^2$$

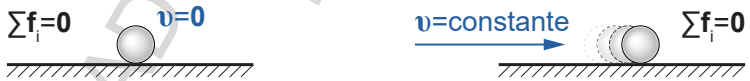
$$u = 7\,e^{t^2}$$

Resultado que coincide con el obtenido usando integrales indefinidas y constante de integración.

1.7. Leyes de Newton

El estudio de la dinámica (cinemática, cinética, trabajo–energía, e impulso–momentum) se basa fuertemente en las leyes de Newton. Inicialmente estas se aplicarán a partículas, pero las leyes se aplican también a *cuerpos* (objetos de dimensiones no-despreciables); rígidos y deformables. El estudio de los cuerpos deformables requiere conocimientos de *elasticidad*, lo que se encuentra fuera del alcance de este curso.

Ley I Una partícula está en reposo o se mueve con velocidad constante si las fuerzas que actúan sobre ella están en *equilibrio* (o balanceadas).



Ley II La aceleración de una partícula es proporcional a la resultante de fuerzas[6] que actúan sobre ella y tienen la misma dirección:

$$\mathbf{f} = m\,\mathbf{a}$$

Ley III Las fuerzas de acción y reacción entre cuerpos que interactúan son iguales en magnitud, de igual dirección, pero sentido opuesto.



[6]La resultante de fuerzas $\mathbf{f}$ es la suma de todas las fuerzas actuando sobre la partícula: $\mathbf{f} = \sum \mathbf{f}_i$

BORRADOR APUNTES DE CLASE
Tomás Zegard