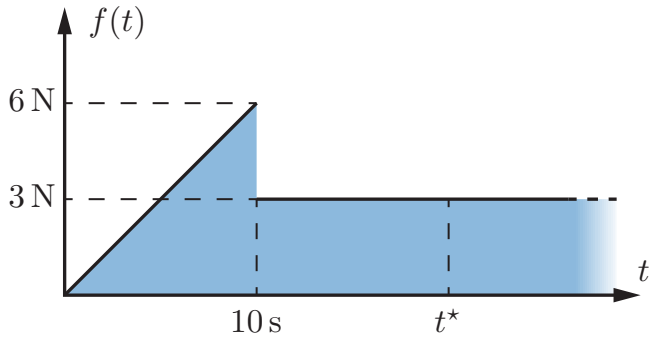
Interrogación 2

FECHA : *27 de Noviembre 2020*

1. Una partícula de masa $m = 3\,\text{kg}$ se mueve con velocidad constante $v_0 = 5\,\text{m/s}$ hacia la derecha. En el instante $t = 0$ se comienza a aplicar una fuerza hacia la derecha que varía en el tiempo como muestra la gráfica. Se pide determinar una expresión para la velocidad $v(t^\star)$ para $t^\star > 10\,\text{s}$.



(a) $v(t^\star) = t^\star + 5 \quad [\text{m/s}]$
(b) $v(t^\star) = 2\,t^\star + 6 \quad [\text{m/s}]$
(c) $v(t^\star) = t^\star + 15 \quad [\text{m/s}]$
(d) $v(t^\star) = 2\,t^\star + 31 \quad [\text{m/s}]$
(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta:

El impulso que genera la fuerza se puede calcular como el impulso de un triángulo en $0 \leq t \leq 10\,\text{s}$, sumado a un rectángulo de ancho $(t^\star - 10)$ variable y altura $3\,\text{N}$. Es decir, el impulso es:

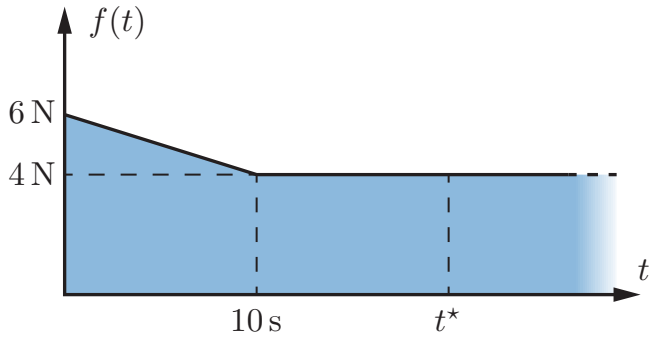
$$\mathbf{I} = \int_0^{t^\star} f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,(10\,\text{s})\,(6\,\text{N}) + (t^\star - 10)\,(3\,\text{N}) = 3\,t^\star \quad [\text{N}\cdot\text{s}]$$

Utilizando el principio de impulso y momentum, se tiene que:

$$\begin{aligned} m\,v_0 + \int_0^{t^\star} f(t)\ \mathrm{d}t &= m\,v(t^\star) \\ (3)\,(5) + 3\,t^\star &= 3\,v(t^\star) \\ v(t^\star) &= t^\star + 5 \quad [\text{m/s}] \end{aligned}$$

■

2. Una partícula de masa $m = 2\,\text{kg}$ se mueve con velocidad constante $v_0 = 1\,\text{m/s}$ hacia la derecha. En el instante $t = 0$ se comienza a aplicar una fuerza hacia la derecha que varía en el tiempo como muestra la gráfica. Se pide determinar una expresión para la velocidad $v(t^\star)$ para $t^\star > 10\,\text{s}$.



(a) $v(t^\star) = t^\star + 5 \quad [\text{m/s}]$
(b) $v(t^\star) = 2\,t^\star + 6 \quad [\text{m/s}]$
(c) $v(t^\star) = t^\star + 15 \quad [\text{m/s}]$
(d) $v(t^\star) = 2\,t^\star + 31 \quad [\text{m/s}]$
(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta:

El impulso que genera la fuerza se puede calcular como el impulso de un trapecio en $0 \leq t \leq 10\,\text{s}$ con altura media $5\,\text{N}$, sumado a un rectángulo de ancho $(t^\star - 10)$ variable y altura $4\,\text{N}$. Es decir, el impulso es:

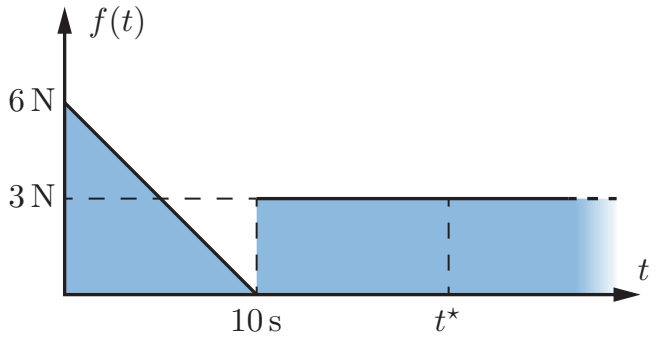
$$\mathbf{I} = \int_0^{t^\star} f(t)\ \mathrm{d}t = (10\,\text{s})\,(5\,\text{N}) + (t^\star - 10)\,(4\,\text{N}) = 4\,t^\star + 10 \quad [\text{N}\cdot\text{s}]$$

Utilizando el principio de impulso y momentum, se tiene que:

$$m\,v_0 + \int_0^{t^\star} f(t)\ \mathrm{d}t = m\,v(t^\star)$$
$$(2)\,(1) + 4\,t^\star + 10 = 2\,v(t^\star)$$
$$v(t^\star) = 2\,t^\star + 6 \quad [\text{m/s}]$$

■

3. Una partícula de masa $m = 3\,\text{kg}$ se mueve con velocidad constante $v_0 = 5\,\text{m/s}$ hacia la derecha. En el instante $t = 0$ se comienza a aplicar una fuerza hacia la derecha que varía en el tiempo como muestra la gráfica. Se pide determinar una expresión para la velocidad $v(t^\star)$ para $t^\star > 10\,\text{s}$.



(a) $v(t^\star) = t^\star + 5 \quad [\text{m/s}]$
(b) $v(t^\star) = 2\,t^\star + 6 \quad [\text{m/s}]$
(c) $v(t^\star) = t^\star + 15 \quad [\text{m/s}]$
(d) $v(t^\star) = 2\,t^\star + 31 \quad [\text{m/s}]$
(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta:

El impulso que genera la fuerza se puede calcular como el impulso de un triángulo en $0 \leq t \leq 10\,\text{s}$, sumado a un rectángulo de ancho $(t^\star - 10)$ variable y altura $3\,\text{N}$. Es decir, el impulso es:

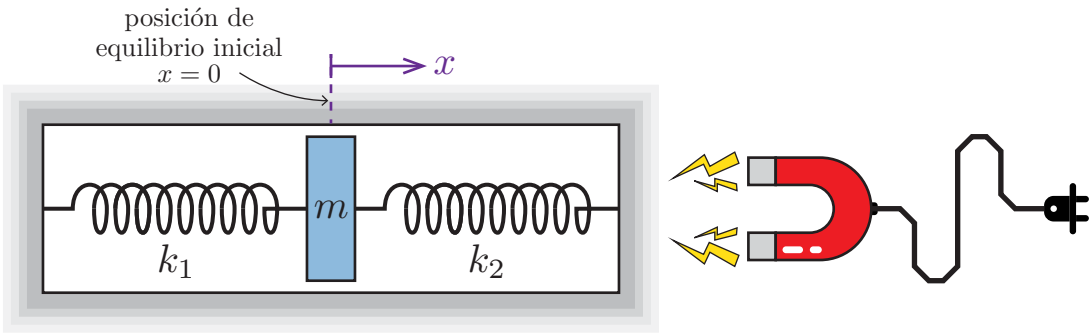
$$\mathbf{I} = \int_0^{t^\star} f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,(10\,\text{s})\,(6\,\text{N}) + (t^\star - 10)\,(3\,\text{N}) = 3\,t^\star \quad [\text{N}\cdot\text{s}]$$

Utilizando el principio de impulso y momentum, se tiene que:

$$\begin{aligned} m\,v_0 + \int_0^{t^\star} f(t)\ \mathrm{d}t &= m\,v(t^\star) \\ (3)\,(5) + 3\,t^\star &= 3\,v(t^\star) \\ v(t^\star) &= t^\star + 5 \quad [\text{m/s}] \end{aligned}$$

■

4. Un relé industrial de alto voltaje consiste de una masa $m = 0{,}5\,\text{kg}$ sujeta en el centro del relé por dos resortes de rigidez $k_1 = k_2 = 9\,\text{N/m}$ cada uno. Para abrir y cerrar el circuito, se enciende un electroimán que aplica una fuerza $f = 4\,\hat{\mathbf{i}}\,\text{N}$ sobre la masa hacia la derecha. La posición inicial de la masa antes de encender el electroimán define el origen $x = 0$. Determine la velocidad de la masa transcurridos 0,25 s desde que se enciende el electroimán.



(a) $\dot{x} = \frac{4}{3}\sin\left(\frac{3}{2}\right)\ \text{m/s}$
(b) $\dot{x} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sin\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\ \text{m/s}$
(c) $\dot{x} = \frac{2}{9}\sin\left(\frac{3}{2}\right)\ \text{m/s}$
(d) $\dot{x} = \frac{2}{9}\sin\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\ \text{m/s}$
(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta:

El oscilador tiene frecuencia natural circular igual a:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = \sqrt{\frac{2k}{m}} = 6\,\text{rad/s}$$

La fuerza (electromagnética) aplicada es de tipo estática, por lo que la posición de equilibrio del oscilador se moverá a la derecha una cantidad:

$$\delta_{\text{st}} = \frac{f}{k} = \frac{2}{9}\,\text{m}$$

Es decir, el oscilador comenzará con condiciones iniciales $x_0 = -\delta_{\text{st}}$ y $\dot{x}_0 = 0$. Con ello, la ecuación de la posición y velocidad del oscilador son:

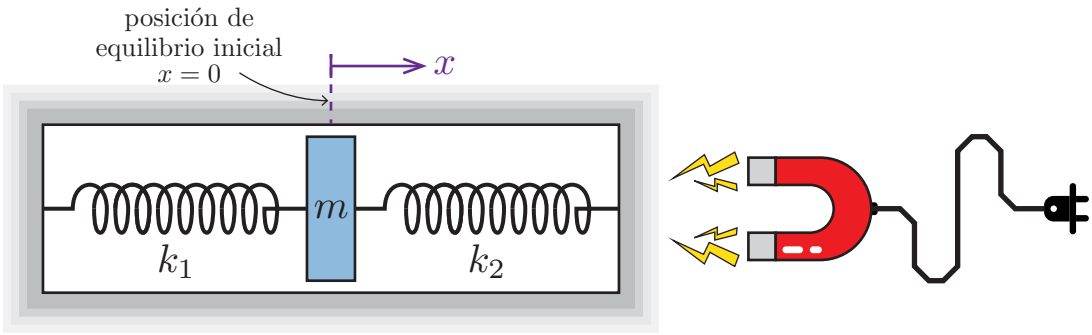
$$x(t) = -\delta_{\text{st}}\cos(\omega_n t) + \delta_{\text{st}}$$
$$\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \delta_{\text{st}}\omega_n \sin(\omega_n t) = \frac{4}{3}\sin(6t)$$
$$\ddot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \delta_{\text{st}}\omega_n^2 \cos(\omega_n t)$$

Evaluando la velocidad en $t^\star = \frac{1}{4}\,\text{s}$:

$$\dot{x}(t) = \frac{4}{3}\sin\left(6\,\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{3}\sin\left(\frac{3}{2}\right)\ \text{m/s}$$

■

5. Un relé industrial de alto voltaje consiste de una masa $m = 0{,}5\,\text{kg}$ sujeta en el centro del relé por dos resortes de rigidez $k_1 = k_2 = 9\,\text{N/m}$ cada uno. Para abrir y cerrar el circuito, se enciende un electroimán que aplica una fuerza $f = 4\,\hat{\mathbf{i}}\,\text{N}$ sobre la masa hacia la derecha. La posición inicial de la masa antes de encender el electroimán define el origen $x = 0$. Determine la aceleración de la masa transcurridos 0,25 s desde que se enciende el electroimán.



(a) $\ddot{x} = 8\cos\left(\frac{3}{2}\right)\ \text{m/s}^2$
(b) $\ddot{x} = 4\cos\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\ \text{m/s}^2$
(c) $\ddot{x} = 4\cos\left(\frac{3}{2}\right)\ \text{m/s}^2$
(d) $\ddot{x} = 8\cos\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\ \text{m/s}^2$
(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta:

El oscilador tiene frecuencia natural circular igual a:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = \sqrt{\frac{2k}{m}} = 6\,\text{rad/s}$$

La fuerza (electromagnética) aplicada es de tipo estática, por lo que la posición de equilibrio del oscilador se moverá a la derecha una cantidad:

$$\delta_{\text{st}} = \frac{f}{k} = \frac{2}{9}\,\text{m}$$

Es decir, el oscilador comenzará con condiciones iniciales $x_0 = -\delta_{\text{st}}$ y $\dot{x}_0 = 0$. Con ello, la ecuación de la posición, velocidad, y aceleración del oscilador son:

$$x(t) = -\delta_{\text{st}}\cos(\omega_n t) + \delta_{\text{st}}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \delta_{\text{st}}\omega_n \sin(\omega_n t)$$

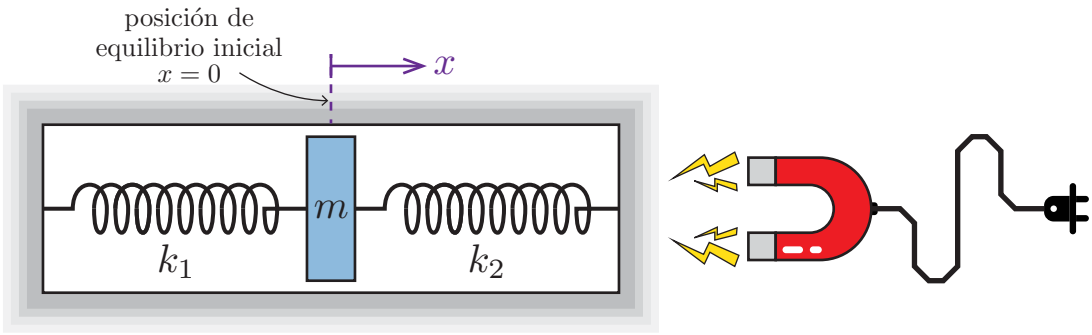
$$\ddot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \delta_{\text{st}}\omega_n^2\cos(\omega_n t) = 8\cos(6t)$$

Evaluando la aceleración en $t^\star = \frac{1}{4}\,\text{s}$:

$$\ddot{x}(t) = 8\cos\left(6\,\frac{1}{4}\right) = 8\cos\left(\frac{3}{2}\right)\ \text{m/s}^2$$

■

6. Un relé industrial de alto voltaje consiste de una masa $m = 0{,}5\,\text{kg}$ sujeta en el centro del relé por dos resortes de rigidez $k_1 = k_2 = 9\,\text{N/m}$ cada uno. Para abrir y cerrar el circuito, se enciende un electroimán que aplica una fuerza $f = 4\,\hat{\mathbf{i}}\,\text{N}$ sobre la masa hacia la derecha. La posición inicial de la masa antes de encender el electroimán define el origen $x = 0$. Determine el desplazamiento mínimo x_{min} y máximo x_{max} de la masa una vez que se enciende el electroimán y comienza a oscilar.



(a) $x_{\text{min}} = 0\,\text{m} \quad x_{\text{max}} = \frac{4}{9}\,\text{m}$
(b) $x_{\text{min}} = 0\,\text{m} \quad x_{\text{max}} = \frac{2}{9}\,\text{m}$
(c) $x_{\text{min}} = -\frac{2}{9}\,\text{m} \quad x_{\text{max}} = \frac{2}{9}\,\text{m}$
(d) $x_{\text{min}} = -\frac{2}{9}\,\text{m} \quad x_{\text{max}} = \frac{4}{9}\,\text{m}$
(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta:

El oscilador tiene frecuencia natural circular igual a:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = \sqrt{\frac{2k}{m}} = 6\,\text{rad/s}$$

La fuerza (electromagnética) aplicada es de tipo estática, por lo que la posición de equilibrio del oscilador se moverá a la derecha una cantidad:

$$\delta_{\text{st}} = \frac{f}{k} = \frac{2}{9}\,\text{m}$$

Es decir, el oscilador comenzará con condiciones iniciales $x_0 = -\delta_{\text{st}}$ y $\dot{x}_0 = 0$. Con ello, la ecuación de la posición, velocidad, y aceleración del oscilador son:

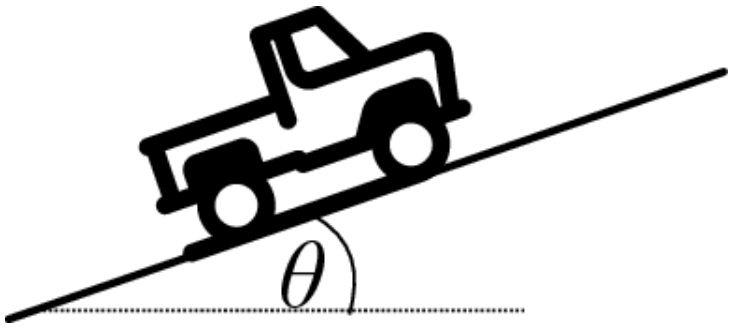
$$x(t) = -\delta_{\text{st}} \cos(\omega_n t) + \delta_{\text{st}}$$
$$\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \delta_{\text{st}} \omega_n \sin(\omega_n t)$$
$$\ddot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \delta_{\text{st}} \omega_n^2 \cos(\omega_n t)$$

Una simple inspección de la posición sugiere que los valores mínimos y máximos del oscilador son:

$$x_{\text{min}} = 0\,\text{m} \qquad x_{\text{max}} = 2\,\delta_{\text{st}} = \frac{4}{9}\,\text{m}$$

Alternativamente, se podría haber evaluado la posición en $t^\star = 0$ y luego $t^\star = \frac{T_n}{2}$. Un camino más largo pero que resulta en lo mismo consiste en buscar los puntos donde la velocidad es igual a cero. ■

7. Un automóvil, que puede aproximarse como un punto material de masa m, viaja con velocidad constante v_0 a lo largo de un camino de montaña que tiene una pendiente θ. El vehículo está sujeto a una fuerza de roce viscoso proporcional al cuadrado de la velocidad, con constante de proporcionalidad conocida $\gamma > 0$. Sea g la aceleración de la gravedad. ¿Cuál es la potencia (mínima) del motor para cubrir un tramo de longitud L?



(a) $mgv_0 \sin\theta \, + \, \gamma v_0^3$
(b) $(mgv_0 \, + \, \gamma v_0^3) \sin\theta$
(c) $mgv_0 \cos\theta \, + \, \gamma v_0^3$
(d) $mgv_0 \sin\theta \, - \, \gamma v_0^3$
(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta:

Subiendo por el tramo L, el vehículo asciende una altura

$$h \, = \, L \sin\theta \, .$$

El trabajo mínimo realizado contra la fuerza gravedad es:

$$W_g \, = \, mgh \, = \, mgL \sin\theta \, .$$

El trabajo mínimo realizado contra la fuerza de roce es:

$$W_r \, = \, |F_r| L \, = \, \gamma v_0^2 L \, .$$

La potencia (promedio) necesaria para subir la cuota h contra la fuerza de gravedad es

$$P_g \, = \, \frac{W_g}{\Delta t} \, = \, mg \sin\theta \frac{L}{\Delta t} \, = \, mgv_0 \sin\theta$$

donde Δt es el tiempo necesario para recorrer el tramo L a velocidad constante v_0. La potencia (promedio) necesaria para contrastar la fuerza de roce es

$$P_r \, = \, \frac{W_r}{\Delta t} \, = \, \gamma v_0^2 \frac{L}{\Delta t} \, = \, \gamma v_0^3 \, .$$

La potencia (promedio) total necesaria es

$$P_{\text{tot}} \, = \, P_g \, + \, P_r \, = \, mgv_0 \sin\theta \, + \, \gamma v_0^3 \, .$$

■

8. Se sabe que la fuerza necesaria para remolcar una embarcación es proporcional al cuadrado de la velocidad (roce viscoso). Para mantener la embarcación a una velocidad de v_0, se requiere potencia P_0 conocida. ¿Cuál seria la potencia P_1 necesaria para mantener la embarcación a una velocidad de $v_1 > v_0$?

   (a) $P_1 = \frac{v_1}{v_0} P_0$
   (b) $P_1 = \sqrt{\frac{v_1}{v_0}} P_0$
   (c) $P_1 = \left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2 P_0$
   (d) $P_1 = \left(\frac{v_1}{v_0}\right)^3 P_0$
   (e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta:

El trabajo realizado contra la fuerza de roce en un tramo L a velocidad v_0 es

$$W_0 = |F_r|L = \gamma v_0^2 L\,.$$

La potencia (promedio) necesaria para contrastar la fuerza de roce es

$$P_0 = \frac{W_0}{\Delta t_0} = \gamma v_0^2 \frac{L}{\Delta t_0} = \gamma v_0^3$$

donde Δt_0 es el tiempo necesario para recorrer el tramo L a velocidad constante v_0. El mismo cálculo para la velocidad v_1 da

$$P_1 = \gamma v_1^3\,.$$

Por lo tanto

$$P_1 = \left(\frac{v_1}{v_0}\right)^3 P_0\,.$$

■

9. ¿Cuál es la potencia mínima que debe tener una bomba para llenar completamente con agua una piscina de largo $L = 15d$, ancho $l = 10d$ y profundidad $h = 3d$ en un tiempo T extrayendo agua de un pozo de profundidad $H = 50d$ (con respecto al borde de la piscina)? La densidad volumétrica del agua es μ, la aceleración gravitacional es g y d es una longitud fija.

   (a) $225\frac{\mu g d^4}{T}$
   (b) $225 \times 10\frac{\mu g d^4}{T}$
   (c) $225 \times 10^2\frac{\mu g d^4}{T}$
   (d) $225 \times 10^3\frac{\mu g d^4}{T}$
   (e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta:

La bomba debe levantar una masa total de agua

$$M = \mu L l h = 450\mu d^3$$

a una altura H. Por tanto, el trabajo realizado contra la fuerza gravitatoria

$$W = MHg = 22500\mu g d^4\,.$$

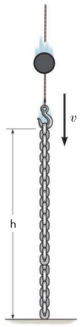
La potencia es

$$P = \frac{W}{T} = 22500\frac{\mu g d^4}{T}\,.$$

■

10. Una cadena de masa $M\ kg/m$ con una longitud total h es bajada a velocidad constante v hasta depositarse completamente en el piso. Determine la fuerza normal que el piso ejerce sobre la cadena en función del tiempo.

    (a) $F_N = Mgvt + Mv^2$
    (b) $F_N = Mgvt + Mv$
    (c) $F_N = Mgt + Mv^2$
    (d) $F_N = Mgh + Mvt$
    (e) Ninguna de las anteriores



Respuesta correcta:

El peso de la cadena en un tiempo t se expresa como:

$$W_C = Mg(vt)$$

Tenemos además que la masa de la cadena varia como:

$$m_i = M(vt)$$

Derivando la ecuación anterior:

$$\frac{dm_i}{dt} = Mv$$

Del principio impulso-momentum tenemos:

$$\sum F_s = M\frac{dv}{dt} + v_{D/i}\frac{dm_i}{dt}$$

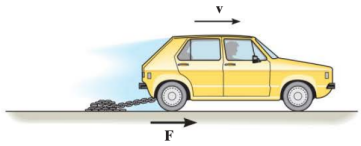
Substituyendo los valores en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} F_N - W_C &= m \cdot (0) + v(Mv) \\ F_N - Mg(vt) &= v(Mv) \\ F_N &= Mgvt + Mv^2 \end{aligned}$$

■

11. Un auto de masa m_0 es usado para arrastrar una cadena de largo total l y masa por unidad de longitud m'. Si la cadena esta siendo arrastrada, determine la fuerza de tracción F que deben ejercer las ruedas traseras, para que el auto mantenga una velocidad constante v.

(a) $F = m'v^2$
(b) $F = (m' + m_0)v^2$
(c) $F = (m_0 - m'vt)v$
(d) $F = (m_0 + m'l)v^2$
(e) Ninguna de las anteriores



Respuesta correcta:

La ecuación de movimiento para las ruedas traseras del auto:

$$\Sigma F = m\frac{dv}{dt} + v_{D/i}\frac{dm_e}{dt}$$

donde, la masa total es m, la velocidad relativa de las ruedas es $v_{D/i}$, el tiempo es t y la fuerza de tracción es F. En un tiempo t, la masa total esta dada por: $m = m_0 - ct$; donde m_0 es la masa del auto, y c es la tasa de masa de cadena que es arrastrada por las ruedas traseras.

$$\begin{aligned} c &= \frac{dm_e}{dt} \\ &= \frac{m'dx}{dt} \\ &= m'v \end{aligned}$$

donde, m' es la masa por unidad de longitud de la cadena, y v es la velocidad de las ruedas traseras. Substituyendo esta relación en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} m &= m_0 + ct \\ &= m_0 + m'vt \end{aligned}$$

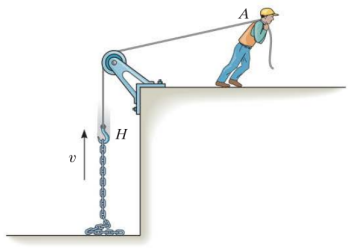
Finalmente, substituyendo todas estas expresiones en la ecuación de movimiento y tomando que $\frac{dv}{dt} = 0$ para mantener una velocidad constante.

$$\begin{aligned} \Sigma F &= m\frac{dv}{dt} + v_e\frac{dm_e}{dt} \\ &= (m_0 + m'vt)(0) + v(m'v) \\ &= m'v^2 \end{aligned}$$

■

12. Determine la magnitud de la fuerza F en función del tiempo que debe ser aplicada al extremo de una cuerda en A para levantar el gancho a una velocidad constante v. Inicialmente la cadena está completamente en reposo sobre el suelo. Desprecie la masa de la cuerda y el gancho, y considere que la polea tampoco tiene masa. La cadena tiene una masa $m\ kg/m$.

(a) $F = m(gvt + v^2)$
(b) $F = mv^2$
(c) $F = mgvt$
(d) $F = m\left(gvt + \frac{1}{2}v^2\right)$
(e) Ninguna de las anteriores



Respuesta correcta:

Dado que la velocidad es constante, $\frac{dv}{dt} = 0$, la ecuación de movimiento vertical queda:

$$y = vt$$

donde y es el desplazamiento vertical desde el suelo, v es la velocidad del gancho, y t es el tiempo transcurrido.
La masa de la cadena esta dada por:

$$m_i = my$$

donde m_i es la masa de la cadena, y m es la masa de la cadena en función de su longitud.
Al sustituir la ecuación anterior:

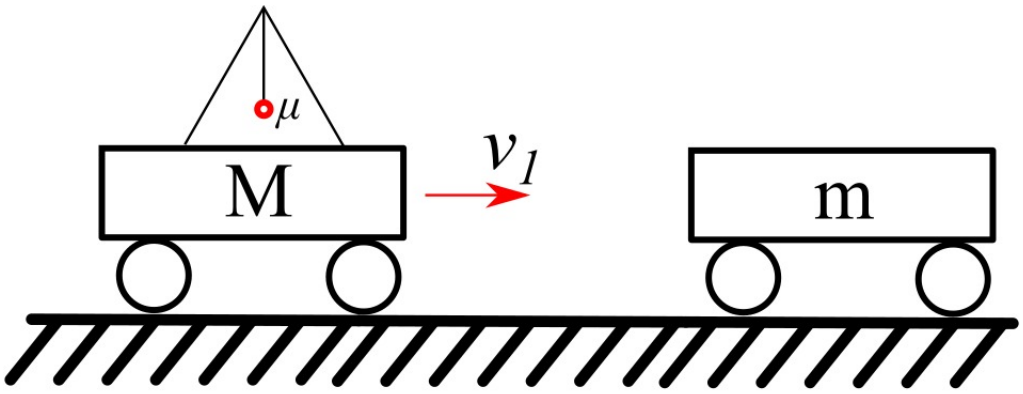
$$\begin{aligned} m_i &= mvt \\ \frac{dm_i}{dt} &= mv \end{aligned}$$

La ecuación de movimiento es:

$$\begin{aligned} \Sigma F_s &= m\frac{dv}{dt} + V_{D/i}\frac{dm_i}{dt} \\ F - m_i g &= m\frac{dv}{dt} + v_{D/i}\frac{dm_i}{dt} \\ F - mgvt &= 0 + v(mv) \\ F &= m(gvt + v^2) \end{aligned}$$

■

13. Un carro de masa M tiene un sistema de péndulo con una bola de masa μ sobre él. El carro y la bola tienen velocidad inicial v. El carro choca contra otro en reposo de masa m y se pega a él. Si el largo de la cuerda del péndulo es R. ¿Cuál es la velocidad mínima para la cuál la bola hace un giro completo sobre su pivote? Asuma que $M, m >> \mu$.



(a) $v = \frac{M+m}{m}\sqrt{5gR}$
(b) $v = \frac{M-m}{m}\sqrt{5gR}$
(c) $v = \frac{M+m}{M}\sqrt{5gR}$
(d) $v = \sqrt{5gR}$
(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta:

SOLUCIONES NUMÉRICAS:

Forma 1: $M = 3\,Kg$, $m = 1\,Kg$, $g = 10\,m/s^2$ y $R = 1\,m$.

(a) $v_1 = 28,28\,m/s$

(b) $v_1 = 14,14\,m/s$

(c) $v_1 = 9,43\,m/s$

(d) $v_1 = 7,07\,m/s$

(e) Ninguna de las anteriores

Forma 2: $M = 4\,Kg$, $m = 3\,Kg$, $g = 10\,m/s^2$ y $R = 0,5\,m$.

(a) $v_1 = 11,67\,m/s$

(b) $v_1 = 1,67\,m/s$

(c) $v_1 = 8,75\,m/s$

(d) $v_1 = 5\,m/s$

(e) Ninguna de las anteriores

Forma 3: $M = 5\,Kg$, $m = 3\,Kg$, $g = 10\,m/s^2$ y $R = 2\,m$.

(a) $v_1 = 26,67\,m/s$

(b) $v_1 = 6,67\,m/s$

(c) $v_1 = 16\,m/s$

(d) $v_1 = 10\,m/s$

(e) Ninguna de las anteriores

Forma 4: $M = 6\,Kg$, $m = 4\,Kg$, $g = 10\,m/s^2$ y $R = 0,5\,m$.

(a) $v_1 = 12,50\,m/s$

(b) $v_1 = 2,50\,m/s$

(c) $v_1 = 8,33\,m/s$

(d) $v_1 = 5\,m/s$

(e) Ninguna de las anteriores

Forma 5: $M = 7\,Kg$, $m = 5\,Kg$, $g = 10\,m/s^2$ y $R = 1\,m$.

(a) $v_1 = 16,97\,m/s$

(b) $v_1 = 2,83\,m/s$

(c) $v_1 = 12,12\,m/s$

(d) $v_1 = 7,07\,m/s$

(e) Ninguna de las anteriores

Como $M, m >> \mu$ y dado que se conserva el momentum, se tiene que:

$$Mv = (M+m)v_f$$

Entonces,

$$v_f = \frac{Mv}{M+m}$$

Considerando el movimiento circular del péndulo, si los puntos más bajos y altos tienen velocidades v_1 y v_2 respectivamente tenemos que, por conservación de energía:

$$\frac{1}{2}\mu v_1^2 = \frac{1}{2}\mu v_2^2 + 2\mu g R$$

y por la segunda ley de Newton se tiene que:

$$T + \mu g = \mu \frac{v_2^2}{R}$$

Para que la bolita alcance a dar una vuelta, se tiene que cumplir que T=0, por lo tanto:

$$v_1 = \sqrt{5gR}$$

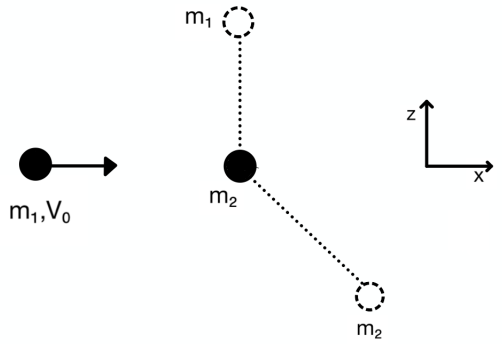
La velocidad v_1 es en realidad la velocidad relativa de la bolita al carro. Por otro lado, la bolita tiene inicialmente velocidad v (se mueve junto al carro) y el carro, después de la colisión, tiene velocidad v_f, entonces la velocidad de la bolita relativa al carro después de la colisión también se puede escribir como:

$$v_1 = v - v_f = v - \frac{Mv}{M+m} = \sqrt{5gR}$$

Y finalmente:

$$v = \frac{M+m}{m}\sqrt{5gR}$$

14. Una masa m_1 choca elásticamente a una masa m_2 en reposo con una velocidad inicial v_0. Después del choque, m_1 emerge en una dirección perpendicular a la dirección de incidencia y m_2 hacia abajo de la dirección de incidencia como se muestra en la figura.



Forma 1: Encuentra el ángulo que hace m_2 después del choque con la dirección de incidencia (en función de m_1 y m_2).

(a) $\tan\theta = \sqrt{\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}}$
(b) $\tan\theta = \sqrt{\frac{m_2+m_1}{m_2+m_1}}$
(c) $\tan\theta = \sqrt{\frac{m_2-m_1}{m_2-m_1}}$
(d) $\tan\theta = \sqrt{\frac{m_2+m_1}{m_2-m_1}}$
(e) Ninguna de las anteriores

Forma 2: Encuentre las velocidad final de m_1 en función de las variables conocidas después del choque.

(a) $v_1 = \sqrt{\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}}v_0$

(b) $v_1 = \sqrt{\frac{m_2+m_1}{m_2+m_1}}v_0$

(c) $v_1 = \sqrt{\frac{m_2-m_1}{m_2-m_1}}v_0$

(d) $v_1 = 0$

(e) Ninguna de las anteriores

Forma 3: Encuentre las velocidad final de m_2 en función de las variables conocidas después del choque.

(a) $v_2 = \sqrt{\frac{2}{m_2(m_2+m_1)}}m_1v_0$

(b) $v_2 = \sqrt{\frac{2}{m_2(m_2-m_1)}}m_1v_0$

(c) $v_2 = \sqrt{\frac{2}{m_2(m_2+m_1)}}m_2v_0$

(d) $v_2 = 0$

(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta:

Por el anunciado sabemos que $\vec{v_0} = v_0\hat{i}$, $\vec{v_1} = v1\hat{k}$ y $\vec{v_2} = v_2\cos\theta\hat{i} - v_2\sin\theta\hat{k}$, donde v_0, v_1 son las velocidades inicial y final de m_1, y v_2 la final de m_2.
Como es un choque elástico, se conserva tanto la energía como el momentum lineal:

$$E_i = \frac{1}{2}m_1v_0^2$$
$$\vec{p_i} = m_1v_0\hat{i}$$

Después del choque:

$$E_f = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_1v_2^2$$
$$\vec{p_f} = m_1v_1\hat{k} + m_2(v_2\cos\theta\hat{i} - v_2\sin\theta\hat{k})$$

Por lo tanto se tienen las siguientes ecuaciones:

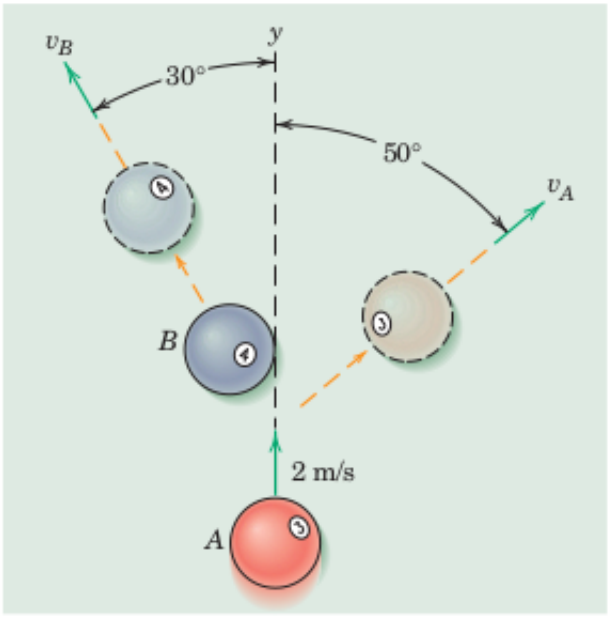
$$m_1v_0^2 = m_1v_1^2 + m_2v_2^2$$
$$m_1v_0 = m_2v_2\cos\theta$$
$$m_1v_1 = m_2v_2\sin\theta$$

Resolviendo el sistema se obtiene que:

$$\tan\theta = \sqrt{\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}}$$
$$v_1^2 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}v_0^2$$
$$v_2^2 = \frac{2m_1^2}{m_2(m_2 + m_1)}v_0^2$$

■

15. Una bola A que se mueve en dirección y con rapidez $v_{a_0} = 2$ m/s impacta a una bola B, de idéntico tamaño y masa, que se encontraba en reposo. Después del choque inelástico se observa que la bolas se mueven en las direcciones indicadas en la figura. Calcule la rapidez que ambas bolas tienen inmediatamente después del impacto. Considere a las bolas como partículas, y desprecie la rodadura y roce con la mesa de juego.



(a) $v_A = 1{,}015\frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $v_B = 1{,}556\frac{\text{m}}{\text{s}}$
(b) $v_A = 1{,}556\frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $v_B = 1{,}015\frac{\text{m}}{\text{s}}$
(c) $v_A = 0{,}971\frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $v_B = 1{,}642\frac{\text{m}}{\text{s}}$
(d) $v_A = 1{,}108\frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $v_B = 1{,}417\frac{\text{m}}{\text{s}}$
(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta: (a)

Las dos ecuaciones escalares de conservación del momentum (a lo largo de los ejes x e y) proveen el sistema solución del problema en las dos incógnitas v_A y v_B

$$x: \ v_A \sin 50 = v_B \sin 30$$

$$y: \ v_A \cos 50 + v_B \cos 30 = v_{A_0}$$

sustituyendo v_B desde la primera en la segunda ecuación

$$x: \ v_A \sin 50 = v_B \sin 30$$

$$y: \ v_A \cos 50 + v_A \cot 30 \sin 50 = 2$$

y luego

$$x: \ v_A \sin 50 = v_B \sin 30$$

$$y: \ 0{,}643 v_A + 1{,}327 v_A = 2$$

que resuelto da

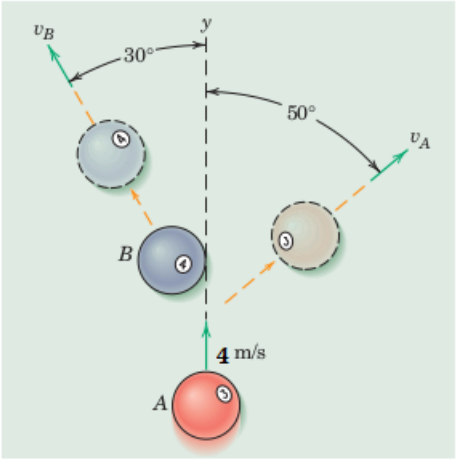
$$v_A = \frac{2}{1{,}970} = 1{,}015 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

y

$$v_B = v_A \times \frac{\sin 50}{\sin 30} = 1{,}556 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

■

16. Una bola A que se mueve en dirección y con rapidez $v_{a_0} = 4$ m/s impacta a una bola B, de idéntico tamaño y masa, que se encontraba en reposo. Después del choque inelástico se observa que la bolas se mueven en las direcciones indicadas en la figura. Calcule la rapidez que ambas bolas tienen inmediatamente después del impacto. Considere a las bolas como partículas, y desprecie la rodadura y roce con la mesa de juego.



(a) $v_A = 2{,}030\frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $v_B = 3{,}111\frac{\text{m}}{\text{s}}$
(b) $v_A = 3{,}112\frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $v_B = 2{,}030\frac{\text{m}}{\text{s}}$
(c) $v_A = 1{,}942\frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $v_B = 3{,}284\frac{\text{m}}{\text{s}}$
(d) $v_A = 2{,}216\frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $v_B = 2{,}834\frac{\text{m}}{\text{s}}$
(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta: (a)

Las dos ecuaciones escalares de conservación del momentum (a lo largo de los ejes x e y) proveen el sistema solución del problema en las dos incógnitas v_A y v_B

$$x: \ v_A \sin 50 = v_B \sin 30$$

$$y: \ v_A \cos 50 + v_B \cos 30 = v_{A_0}$$

sustituyendo v_B desde la primera en la segunda ecuación

$$x: \ v_A \sin 50 = v_B \sin 30$$

$$y: \ v_A \cos 50 + v_A \cot 30 \sin 50 = 4$$

y luego

$$x: \ v_A \sin 50 = v_B \sin 30$$

$$y: \ 0{,}643 v_A + 1{,}327 v_A = 4$$

que resuelto da

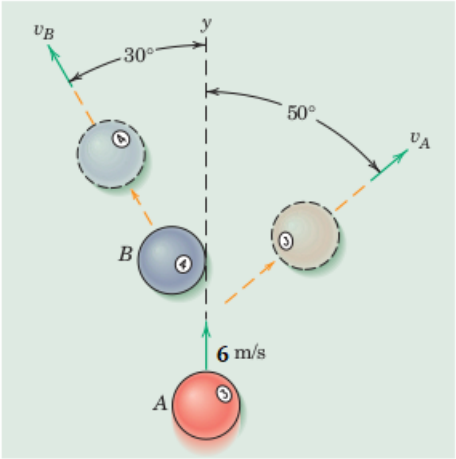
$$v_A = \frac{4}{1{,}970} = 2{,}030 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

y

$$v_B = v_A \times \frac{\sin 50}{\sin 30} = 3{,}111 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

■

17. Una bola A que se mueve en dirección y con rapidez $v_{a_0} = 6$ m/s impacta a una bola B, de idéntico tamaño y masa, que se encontraba en reposo. Después del choque inelástico se observa que la bolas se mueven en las direcciones indicadas en la figura. Calcule la rapidez que ambas bolas tienen inmediatamente después del impacto. Considere a las bolas como partículas, y desprecie la rodadura y roce con la mesa de juego.



(a) $v_A = 3{,}046\frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $v_B = 4{,}667\frac{\text{m}}{\text{s}}$
(b) $v_A = 4{,}667\frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $v_B = 3{,}046\frac{\text{m}}{\text{s}}$
(c) $v_A = 2{,}913\frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $v_B = 4{,}926\frac{\text{m}}{\text{s}}$
(d) $v_A = 3{,}324\frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $v_B = 4{,}251\frac{\text{m}}{\text{s}}$
(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta: (a)

Las dos ecuaciones escalares de conservación del momentum (a lo largo de los ejes x e y) proveen el sistema solución del problema en las dos incógnitas v_A y v_B

$$x: \; v_A \sin 50 = v_B \sin 30$$

$$y: \; v_A \cos 50 + v_B \cos 30 = v_{A_0}$$

sustituyendo v_B desde la primera en la segunda ecuación

$$x: \; v_A \sin 50 = v_B \sin 30$$

$$y: \; v_A \cos 50 + v_A \cot 30 \sin 50 = 6$$

y luego

$$x: \; v_A \sin 50 = v_B \sin 30$$

$$y: \; 0{,}643 v_A + 1{,}327 v_A = 6$$

que resuelto da

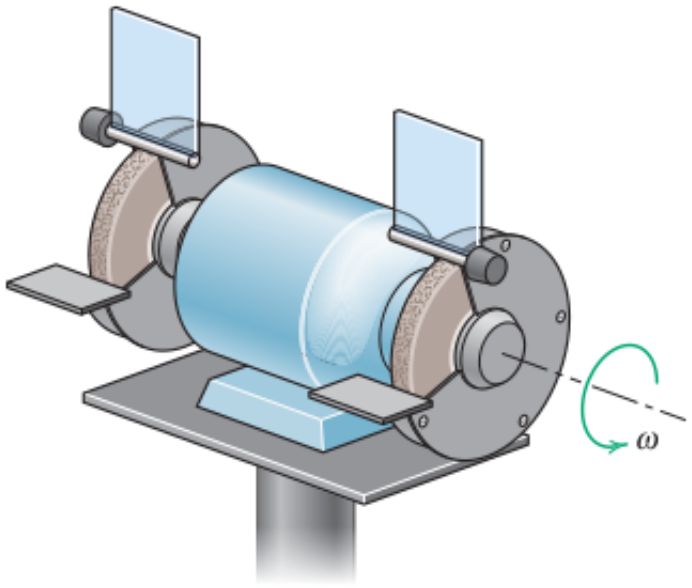
$$v_A = \frac{6}{1{,}970} = 3{,}046 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

y

$$v_B = v_A \times \frac{\sin 50}{\sin 30} = 4{,}667 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

■

18. Cada una de las dos ruedas de lija tiene el diámetro de 20 cm, grosor de 2 cm y densidad $\rho = 6{,}80 \times 10^{-3}$ kg/cm^3. Al prenderse la máquina, ésta se acelera desde reposo hasta 3450 revoluciones por minuto en 5 s. Al apagarla, la misma se detiene en 35 s. Determine el torque ejercido por el motor y el momento de fricción que las detiene (producido por el roce de la lija con los bordes), asumiendo que ambos son constantes en el tiempo. Desprecie los efectos de inercia de la armadura del motor y sólo considere la de los discos.



(a) $M_{motor} = 3{,}09\text{N}\cdot\text{m}$ y $M_{friccin} = 0{,}44\text{N}\cdot\text{m}$
(b) $M_{motor} = 1{,}54\text{N}\cdot\text{m}$ y $M_{friccin} = 0{,}22\text{N}\cdot\text{m}$
(c) $M_{motor} = 3{,}50\text{N}\cdot\text{m}$ y $M_{friccin} = 0{,}50\text{N}\cdot\text{m}$
(d) $M_{motor} = 4{,}87\text{N}\cdot\text{m}$ y $M_{friccin} = 0{,}696\text{N}\cdot\text{m}$
(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta: (a)

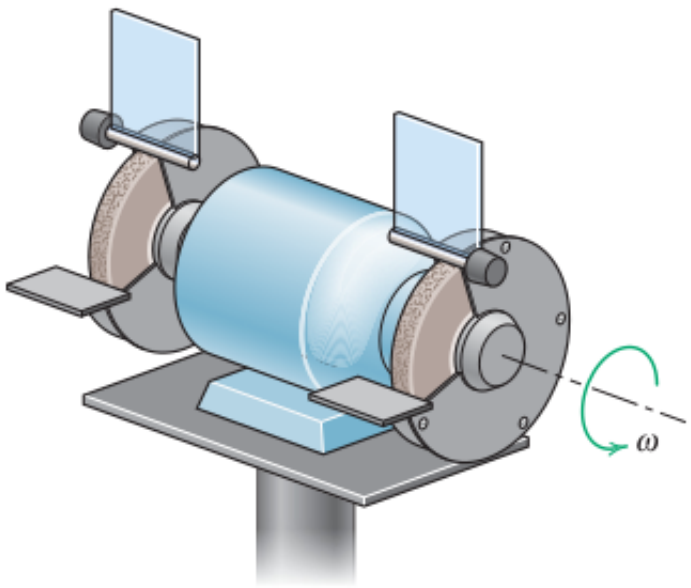
Si los torques son constante, también lo son las respectivas aceleraciones, que pueden determinarse con las fórmulas de movimiento acelerado angular $\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$. La velocidad angular de régimen, expresada en rad/s^2, es $\omega = \frac{3450\times 2\pi\text{rad}}{60\text{s}} = 361{,}3\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$
y con ella: $\alpha_{motor} = 72{,}26\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$ y $\alpha_{friccin} = 10{,}32\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$. Para determinar los torques es necesario calcular la masa de las ruedas, siendo $m = \rho V = 4{,}272$ kg la de una rueda. Luego, el momento de inercia de cada rueda es $I = \frac{1}{2}mR^2 = 2{,}136 \times 10^{-2}$ kg·m^2.
Finalmente, los torques son

$$M_{motor} = 2I\alpha_{motor} = 4{,}272 \times 10^{-2} \times 72{,}26 = 3{,}09\text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_{friccin} = 2I\alpha_{friccin} = 4{,}272 \times 10^{-2} \times 10{,}32 = 0{,}44\text{N}\cdot\text{m}$$

■

19. Cada una de las dos ruedas de lija tiene el diámetro de 26 cm, grosor de 2.5 cm y densidad $\rho = 5{,}90 \times 10^{-3}$ kg/cm^3. Al prenderse la máquina, ésta se acelera desde reposo hasta 2500 revoluciones por minuto en 6 s. Al apagarla, la misma se detiene en 40 s. Determine el torque ejercido por el motor y el momento de fricción que las detiene, asumiendo que ambos son constantes. Desprecie los efectos de inercia de la armadura del motor y sólo considere la de los discos.



(a) $M_{motor} = 4{,}62\text{N}\cdot\text{m}$ y $M_{friccin} = 0{,}692\text{N}\cdot\text{m}$
(b) $M_{motor} = 5{,}77\text{N}\cdot\text{m}$ y $M_{friccin} = 0{,}87\text{N}\cdot\text{m}$
(c) $M_{motor} = 7{,}45\text{N}\cdot\text{m}$ y $M_{friccin} = 1{,}11\text{N}\cdot\text{m}$
(d) $M_{motor} = 3{,}92\text{N}\cdot\text{m}$ y $M_{friccin} = 0{,}588\text{N}\cdot\text{m}$
(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta: (b)

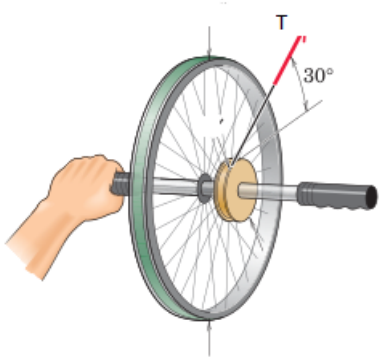
Si los torques son constante, también lo son las respectivas aceleraciones, que pueden determinarse con las fórmulas de movimiento acelerado angular $\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$. La velocidad angular de régimen, expresada en rad/s^2, es $\omega = \frac{2500\times 2\pi\text{rad}}{60\text{s}} = 261{,}8\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$
y con ella: $\alpha_{motor} = 43{,}63\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$ y $\alpha_{friccin} = 6{,}54\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$. Para determinar los torques es necesario calcular la masa de las ruedas, en donde cada una tiene una masa de $m = \rho V = 7{,}83$ kg. Con esto, el momento de inercia de cada rueda es $I = \frac{1}{2}mR^2 = 6{,}62 \times 10^{-2}$ kg·m^2.
Finalmente, los torques son

$$M_{motor} = 2I\alpha_{motor} = 13{,}23 \times 10^{-2} \times 43{,}63 = 5{,}77\text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_{friccin} = 2I\alpha_{friccin} = 13{,}23 \times 10^{-2} \times 6{,}54 = 0{,}87\text{N}\cdot\text{m}$$

■

20. Se muestra una rueda de momento para demostraciones de clases de dinámica. Consiste en una rueda parecida a la de una bicicleta, con una banda pesada al borde, mangos y una polea (sin masa) con cuerda para ponerla en rotación. La banda pesada y la polea causan que la rueda, cuya masa es $m = 5$ kg, tenga un radio de giro $k = 20$ cm. Se considera el radio de giro como si toda la masa estuviera concentrada a esa distancia. Si se ejerce una fuerza constante en la cuerda de $T = 60$ N, determine la aceleración angular α de la rueda. La polea tiene radio $r = 5$ cm.



(a) $\alpha = 15 \, \mathrm{rad/s^2}$
(b) $\alpha = 90 \, \mathrm{rad/s^2}$
(c) $\alpha = 60 \, \mathrm{rad/s^2}$
(d) $\alpha = 120 \, \mathrm{rad/s^2}$
(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta: (a)

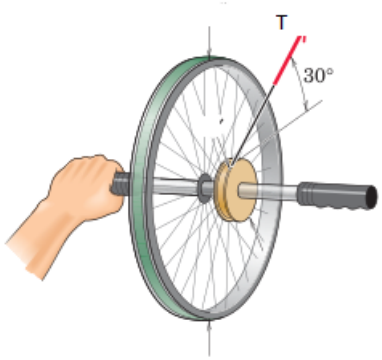
El momento de inercia del conjunto es $I = k^2 m = 0{,}2 \ \mathrm{kg \cdot m^2}$. Para utilizar la ley de Newton rotacional se necesita calcular el torque según su definición a partir de la fuerza, $M = Fb \sin\theta$, donde b es el brazo de la fuerza T desde el punto de aplicación de ésta al borde de la polea, hacia el centro de rotación. Siendo que el brazo de la fuerza coincide con el radio, el ángulo θ es idénticamente recto, entonces el dato de 30 grados resulta innecesario, o sea, independientemente de como se aplique la fuerza T, ésta producirá siempre el mismo torque $M = Fb = 3{,}0 \mathrm{N \cdot m}$

Finalmente, la aceleración angular es

$$\alpha = \frac{M}{I} = 15 \ \mathrm{rad/s^2}$$

■

21. Se muestra una rueda de momento para demostraciones de clases de dinámica. Consiste en una rueda parecida a la de una bicicleta, con una banda pesada al borde, mangos y una polea con cuerda para ponerla en rotación. La banda pesada y la polea causan que la rueda, cuya masa es $m = 3$ kg, tenga un radio de giro $k = 10$ cm. Se considere el radio de giro como si toda la masa estuviera concentrada a esa distancia. Si se ejerce una fuerza constante $T = 30$ N, determine la aceleración angular α de la rueda. La polea tiene radio $r = 3$ cm.



(a) $\alpha = 30\,\mathrm{rad/s^2}$
(b) $\alpha = 60\,\mathrm{rad/s^2}$
(c) $\alpha = 45\,\mathrm{rad/s^2}$
(d) $\alpha = 1500\,\mathrm{rad/s^2}$
(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta: (a)

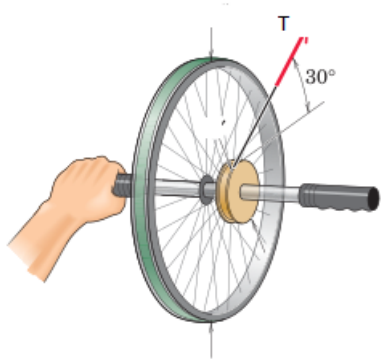
El momento de inercia del conjunto es $I = k^2 m = 0{,}03\,\mathrm{kg\cdot m^2}$. Para utilizar la ley de Newton rotacional se necesita calcular el torque según su definición a partir de la fuerza, $M = Fb\sin\theta$, donde b es el brazo de la fuerza T desde el punto de aplicación de ésta al borde de la polea, hacia el centro de rotación. Siendo que el brazo de la fuerza coincide con el radio, el ángulo θ es idénticamente recto, entonces el dato de 30 grados resulta innecesario, o sea, independientemente de como se aplique la fuerza T, ésta producirá siempre el mismo torque $M = Fb = 0{,}9\,\mathrm{N\cdot m}$

Finalmente, la aceleración angular es

$$\alpha = \frac{M}{I} = 30\,\mathrm{rad/s^2}$$

■

22. Se muestra una rueda de momento para demostraciones de clases de dinámica. Consiste en una rueda parecida a la de una bicicleta, con una banda pesada al borde, mangos y una polea con cuerda para ponerla en rotación. La banda pesada y la polea causan que la rueda, cuya masa es $m = 10$ kg, tenga un radio de giro $k = \sqrt{3} \times 10$ cm. Se considere el radio de giro como si toda la masa estuviera concentrada a esa distancia. Si se ejerce una fuerza constante $T = 50$ N, determine la aceleración angular α de la rueda. La polea tiene radio $r = 9$ cm.



(a) $\alpha = 15\,\mathrm{rad/s^2}$
(b) $\alpha = 30\,\mathrm{rad/s^2}$
(c) $\alpha = 45\,\mathrm{rad/s^2}$
(d) $\alpha = 60\,\mathrm{rad/s^2}$
(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta: (a)

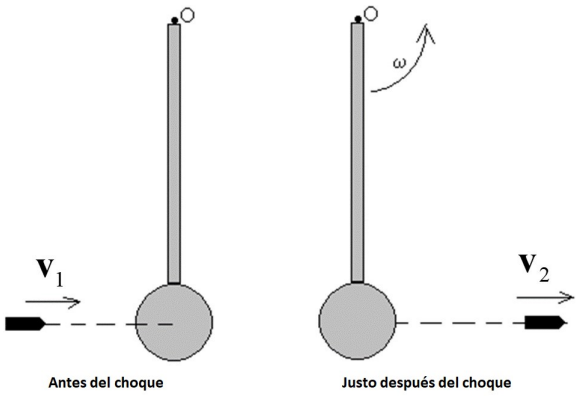
El momento de inercia del conjunto es $I = k^2 m = 0{,}3\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$. Para utilizar la ley de Newton rotacional se necesita calcular el torque según su definición a partir de la fuerza, $M = Fb\sin\theta$, donde b es el brazo de la fuerza T desde el punto de aplicación de ésta al borde de la polea, hacia el centro de rotación. Siendo que el brazo de la fuerza coincide con el radio, el ángulo θ es idénticamente recto, entonces el dato de 30 grados resulta innecesario, o sea, independientemente de como se aplique la fuerza T, ésta producirá siempre el mismo torque $M = Fb = 4{,}5\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$

Finalmente, la aceleración angular es

$$\alpha = \frac{M}{I} = 15\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}$$

■

23. Un péndulo está formado por una varilla cilíndrica delgada la cual cuelga de un pivote fijo situado en uno de sus extremos. El otro extremo de la varilla está unido fijamente a la superficie de una esfera solida, tal como se muestra en la figura. La masa de la varilla es m_V y su longitud es ℓ_V en tanto que la masa de la esfera es m_E y su radio R_E. Suponga que una bala de masa m_B, que lleva una velocidad horizontal v_1, choca en el centro de la esfera. Justo un instante infinitesimal después del choque la bala sigue moviéndose horizontalmente con una velocidad v_2, en tanto que el péndulo (varilla y esfera) empieza a girar alrededor del pivote con una velocidad angular ω_0 .
Calcule la energía perdida durante el choque. Para ello considere $m_B = 100$ gr, v_1=50 m/s, v_2=40 m/s, ℓ_V=20 cm, $m_v = 200$ gr, $m_E = 500$ gr, $R_E = 5$ cm.



(a) $\Delta E = -44{,}09$ J
(b) $\Delta E = -35{,}56$ J
(c) $\Delta E = -56{,}32$ J
(d) $\Delta E = 0$ J
(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta:

El momento de inercia del péndulo es

$$I_T = I_{Varilla} + I_{Esfera}$$
$$I_T = m_V \frac{\ell_V^2}{12} + m_V \left(\frac{\ell_V}{2}\right)^2 + \left(m_E \frac{2R_E^2}{5} + m_E \left(\ell_V + R_E\right)^2\right)$$

El momentum angular antes justo antes del choque es $L_0 = mv_1(\ell_V + R_E)$ en tanto que después del choque $L_f = m_B v_2(\ell_V + R_E) + I_T\omega_0$, donde ω_0 es la velocidad angular inicial del péndulo justo después del choque. Como no hay fuerzas externas actuando sobre el sistema, el momentum total se conserva. Por tanto, $L_0 = L_f$, es decir

$$m_B v_1(\ell_V + R_E) = m_B v_2(\ell_V + R_E) + I_T\omega_0.$$

Entonces

$$\omega_0 = \frac{m_B(v_1 - v_2)(\ell_V + R_E)}{I}$$

La energía antes del choque es

$$E_0 = \frac{1}{2}m_B v_1^2 + U_{Bala} + U_{Pendulo}$$

Justo después del choque la energía es

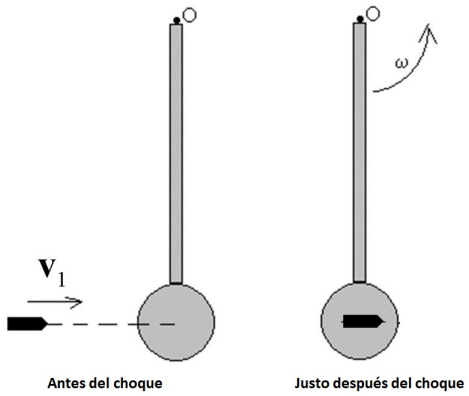
$$E_f = \frac{1}{2}m_B v_2^2 + \frac{1}{2}I_T\omega_0^2 + U_{Bala} + U_{Pendulo}.$$

Las energías potenciales gravitacionales de la bala y del péndulo son iguales antes y justo después del choque. Por tanto

$$\Delta E = E_f - E_0 = \frac{1}{2}m_B(v_2^2 - v_1^2) + \frac{1}{2}I_T\omega_0^2$$
$$\Delta E = \frac{(v_1 - v_2)^2 m_B^2 \left(R_e + \ell_V\right)^2}{2\left(m_e\left(2R_e\ell_V + \frac{7R_e^2}{5} + \ell_V^2\right) + \frac{1}{3}m_V\ell_V^2\right)} + \frac{1}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right)m_B$$

■

24. Un péndulo está formado por una varilla cilíndrica delgada la cual cuelga de un pivote fijo situado en uno de sus extremos. El otro extremo de la varilla está unido fijamente a la superficie de una esfera solida, tal como se muestra en la figura. La masa de la varilla es m_V y su longitud es ℓ_V en tanto que la masa de la esfera es m_E y su radio R_E. Suponga que una bala de masa m_B, que lleva una velocidad horizontal v_1, choca Y queda incrustada en el centro de la esfera. Justo un instante infinitesimal después del choque el péndulo (varilla y esfera) con la bala incrustada en el centro de la esfera empieza a girar alrededor del pivote con una velocidad angular ω_0.
Calcule la energía perdida durante el choque. Para ello considere $m_B = 100$ gr, v_1=50 m/s, v_2=40 m/s, ℓ_V=20 cm, $m_v = 200$ gr, $m_E = 500$ gr, $R_E = 5$ cm.



(a) $\Delta E = -105{,}79$ J
(b) $\Delta E = -35{,}56$ J
(c) $\Delta E = -56{,}32$ J
(d) $\Delta E = 0$ J
(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta:

El momento de inercia del péndulo junto con la bala incrustada es

$$I_T = I_{Varilla} + I_{Esfera} + + I_{bala}$$

$$I_T = m_V \frac{\ell_V^2}{12} + m_V \left(\frac{\ell_V}{2}\right)^2 + \left(m_E \frac{2R_E^2}{5} + (m_E + m_B)(\ell_V + R_E)^2\right)$$

El momentum angular antes justo antes del choque es $L_0 = mv_1(\ell_V + R_E)$ en tanto que después del choque $L_f = m_B v_2(\ell_V + R_E) + I_T\omega_0$, donde ω_0 es la velocidad angular inicial del péndulo justo después del choque. Como no hay fuerzas externas actuando sobre el sistema, el momentum total se conserva. Por tanto, $L_0 = L_f$, es decir

$$m_B v_1(\ell_V + R_E) = I_T\omega_0.$$

Entonces

$$\omega_0 = \frac{m_B v_1(\ell_V + R_E)}{I}$$

La energía antes del choque es

$$E_0 = \frac{1}{2}m_B v_1^2 + U_{Bala} + U_{Pendulo}$$

Justo después del choque la energía es

$$E_f = \frac{1}{2}I_T\omega_0^2 + U_{Bala} + U_{Pendulo}.$$

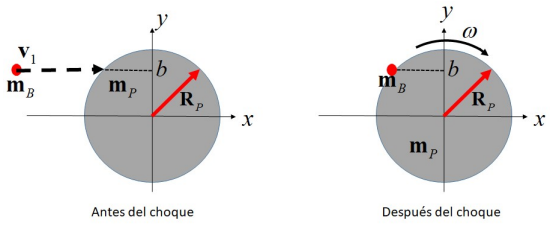
Las energías potenciales gravitacionales de la bala y del péndulo son iguales antes y justo después del choque. Por tanto

$$\Delta E = E_f - E_0 = -\frac{1}{2}m_B v_1^2 + \frac{1}{2}I_T\omega_0^2$$

$$\Delta E = \frac{v_1^2 m_B^2 (R_e + \ell_V)^2}{2\left((m_B + m_e)(R_e + \ell_V)^2 + \frac{2}{5}m_e R_e^2 + \frac{1}{3}m_V \ell_V^2\right)} - \frac{1}{2}v_1^2 m_B$$

■

25. Una polea inicialmente en reposo de masa m_P esta formada por un disco de radio R_P que puede girar libremente alrededor de un pivote fijo que esta situado en su centro geometrico, i.e. en el origen del sistema coordenado. Suponga que una bala de masa m_B, que lleva una velocidad horizontal v_1, sigue una trayectoria $(y = b)$ paralela al eje horizontal x, tal como se muestra en la figura. La bala choca horizontalmente con la polea y queda incrustada en la superficie de la polea. Justo después del choque la polea con la bala incrustada empieza a girar alrededor del pivote con una velocidad angular ω.
Calcule la energía perdida durante el choque. Para ello considere $m_B = 100$ gr, v_1=50 m/s, $R_P = 10$ cm, b=5 cm, $m_P = 1$ Kgr.



(a) $\Delta E = -119{,}79$ J
(b) $\Delta E = -105{,}79$ J
(c) $\Delta E = -56{,}32$ J
(d) $\Delta E = 0$ J
(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta:

El momento de inercia del péndulo junto con la bala incrustada es

$$I_T = I_{Disco} + + I_{bala}$$
$$I_T = m_P \frac{R_P^2}{2} + m_B R_P^2$$

El momentum angular antes antes del choque es $L_0 = m_B v_1 b$ en tanto que un instante infinitesimal después del choque $L_f = I_T \omega$, donde ω es la velocidad angular inicial de la polea y la bala. Como no hay fuerzas externas actuando sobre el sistema, el momentum total se conserva. Por tanto, $L_0 = L_f$, es decir

$$m_B v_1 b = I_T \omega.$$

Entonces

$$\omega = \frac{m_B v_1 b}{I}$$

La energía antes del choque es

$$E_0 = \frac{1}{2} m_B v_1^2 + U_{Bala}$$

Justo después del choque la energía es

$$E_f = \frac{1}{2} I_T \omega_0^2 + U_{Bala}.$$

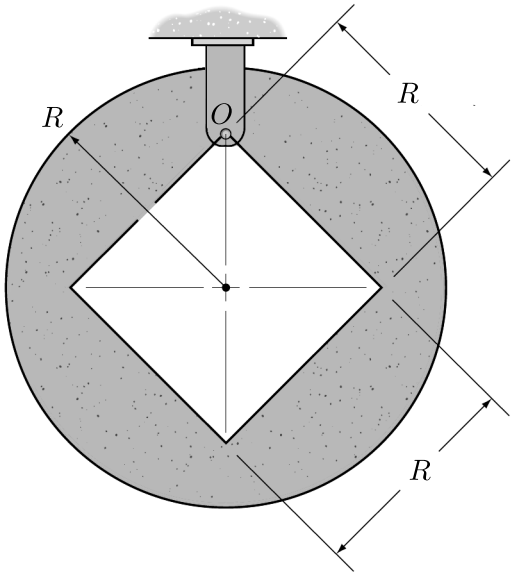
Las energía potencial gravitacional de la bala es igual antes y justo después del choque. Por tanto

$$\Delta E = E_f - E_0 = -\frac{1}{2} m_B v_1^2 + \frac{1}{2} I_T \omega^2$$

$$\Delta E = \frac{b^2 v_1^2 m_B^2}{R_P^2 (2m_B + m_P)} - \frac{1}{2} v_1^2 m_B$$

■

26. Determine el momento de inercia de la placa con respecto a un eje perpendicular a la página que pasa por el punto O, sobre el vértice superior del agujero cuadrado. Considere que $R = 0{,}25$ m y que la densidad de masa del material (masa por unidad de área) es $\sigma = 25\ \text{kg/m}^2$.



(a) $I_O = 0{,}24\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$
(b) $I_O = 1{,}30\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$
(c) $I_O = 4{,}57\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$
(d) $I_O = 12{,}46\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$
(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta:

Subdividimos la placa con su agujero en una placa circular A y en una placa cuadrada B, que corresponde al agujero.
El momento de inercia a través del punto O corresponde a la suma de los momentos de inercia de cada placa con respecto al punto O. Además, el momento de inercia de cada placa en el punto O se puede calcular usando el teorema de los ejes paralelos, así:

$$I_O = \left[I_{G_A} + m_A d^2\right] - \left[I_{G_B} + m_B d^2\right]$$

y de la placa cuadrada con respecto al eje que pasa por su centro de masa (en este caso el centro de ellas), m_A y m_B son las masas de cada placa y $d = R\sqrt{2}/2$ es la distancia entre el centro de masa y el punto O.

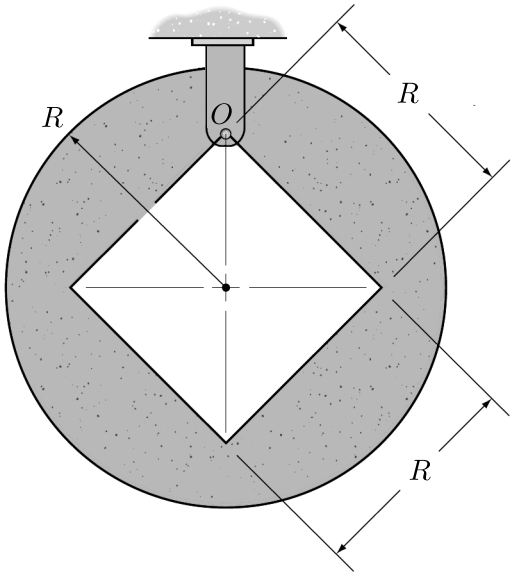
$$\begin{aligned} I_O &= \left[\frac{1}{2}(m_A)R^2 + (m_A)\left(\frac{R}{2}\sqrt{2}\right)^2\right] - \left[\frac{1}{12}(m_B)(R^2+R^2) + (m_B)\left(\frac{R}{2}\sqrt{2}\right)^2\right] \\ &= \left[\frac{1}{2}(\pi R^2\sigma)R^2 + (\pi R^2\sigma)\left(\frac{R}{2}\sqrt{2}\right)^2\right] - \left[\frac{1}{12}(R^2\sigma)2R^2 + (R^2\sigma)\left(\frac{R}{2}\sqrt{2}\right)^2\right] \\ &= \left[\frac{\pi R^4\sigma}{2} + \frac{\pi R^4\sigma}{2}\right] - \left[\frac{R^4\sigma}{6} + \frac{R^4\sigma}{2}\right] = \pi R^4\sigma - \frac{2}{3}R^4\sigma = R^4\sigma\left(\pi - \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

Usando los valores del problema tenemos que:

$$I_O = (0{,}25\ \text{m})^4(25\ \text{kg/m}^2)\left(\pi - \frac{2}{3}\right) \approx 0{,}24\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

■

27. Determine el momento de inercia de la placa con respecto a un eje perpendicular a la página que pasa por el punto O, sobre el vértice superior del agujero cuadrado. Considere que $R = 0{,}35$ m y que la densidad de masa del material (masa por unidad de área) es $\sigma = 35\ \text{kg/m}^2$.



(a) $I_O = 0{,}24\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$
(b) $I_O = 1{,}30\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$
(c) $I_O = 4{,}57\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$
(d) $I_O = 12{,}46\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$
(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta:

Subdividimos la placa con su agujero en una placa circular A y en una placa cuadrada B, que corresponde al agujero.
El momento de inercia a través del punto O corresponde a la suma de los momentos de inercia de cada placa con respecto al punto O. Además, el momento de inercia de cada placa en el punto O se puede calcular usando el teorema de los ejes paralelos, así:

$$I_O = \left[I_{G_A} + m_A d^2\right] - \left[I_{G_B} + m_B d^2\right]$$

y de la placa cuadrada con respecto al eje que pasa por su centro de masa (en este caso el centro de ellas), m_A y m_B son las masas de cada placa y $d = R\sqrt{2}/2$ es la distancia entre el centro de masa y el punto O.

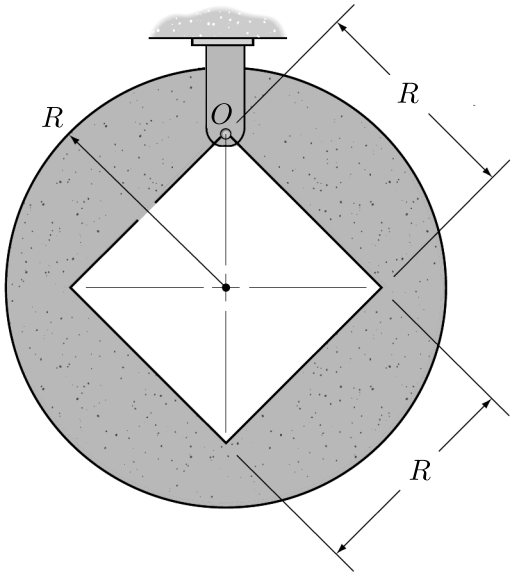
$$\begin{aligned} I_O &= \left[\frac{1}{2}(m_A)R^2 + (m_A)\left(\frac{R}{2}\sqrt{2}\right)^2\right] - \left[\frac{1}{12}(m_B)(R^2+R^2) + (m_B)\left(\frac{R}{2}\sqrt{2}\right)^2\right] \\ &= \left[\frac{1}{2}(\pi R^2\sigma)R^2 + (\pi R^2\sigma)\left(\frac{R}{2}\sqrt{2}\right)^2\right] - \left[\frac{1}{12}(R^2\sigma)2R^2 + (R^2\sigma)\left(\frac{R}{2}\sqrt{2}\right)^2\right] \\ &= \left[\frac{\pi R^4\sigma}{2} + \frac{\pi R^4\sigma}{2}\right] - \left[\frac{R^4\sigma}{6} + \frac{R^4\sigma}{2}\right] = \pi R^4\sigma - \frac{2}{3}R^4\sigma = R^4\sigma\left(\pi - \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

Usando los valores del problema tenemos que:

$$I_O = (0{,}35\ \text{m})^4(35\ \text{kg/m}^2)\left(\pi - \frac{2}{3}\right) \approx 1{,}30\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

■

28. Determine el momento de inercia de la placa con respecto a un eje perpendicular a la página que pasa por el punto O, sobre el vértice superior del agujero cuadrado. Considere que $R = 0{,}45$ m y que la densidad de masa del material (masa por unidad de área) es $\sigma = 45\ \text{kg/m}^2$.



(a) $I_O = 0{,}24\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$
(b) $I_O = 1{,}30\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$
(c) $I_O = 4{,}57\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$
(d) $I_O = 12{,}46\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$
(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta:

Subdividimos la placa con su agujero en una placa circular A y en una placa cuadrada B, que corresponde al agujero.
El momento de inercia a través del punto O corresponde a la suma de los momentos de inercia de cada placa con respecto al punto O. Además, el momento de inercia de cada placa en el punto O se puede calcular usando el teorema de los ejes paralelos, así:

$$I_O = \left[I_{G_A} + m_A d^2\right] - \left[I_{G_B} + m_B d^2\right]$$

y de la placa cuadrada con respecto al eje que pasa por su centro de masa (en este caso el centro de ellas), m_A y m_B son las masas de cada placa y $d = R\sqrt{2}/2$ es la distancia entre el centro de masa y el punto O.

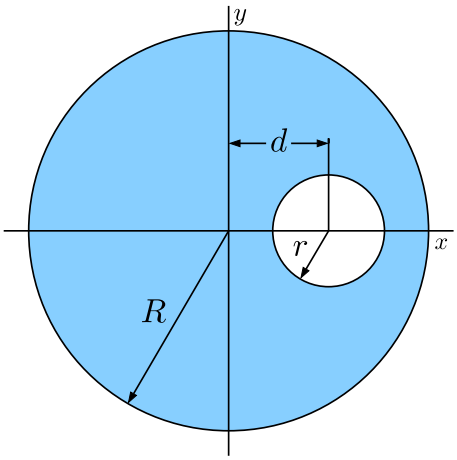
$$\begin{aligned} I_O &= \left[\frac{1}{2}(m_A)R^2 + (m_A)\left(\frac{R}{2}\sqrt{2}\right)^2\right] - \left[\frac{1}{12}(m_B)(R^2+R^2) + (m_B)\left(\frac{R}{2}\sqrt{2}\right)^2\right] \\ &= \left[\frac{1}{2}(\pi R^2\sigma)R^2 + (\pi R^2\sigma)\left(\frac{R}{2}\sqrt{2}\right)^2\right] - \left[\frac{1}{12}(R^2\sigma)2R^2 + (R^2\sigma)\left(\frac{R}{2}\sqrt{2}\right)^2\right] \\ &= \left[\frac{\pi R^4\sigma}{2} + \frac{\pi R^4\sigma}{2}\right] - \left[\frac{R^4\sigma}{6} + \frac{R^4\sigma}{2}\right] = \pi R^4\sigma - \frac{2}{3}R^4\sigma = R^4\sigma\left(\pi - \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

Usando los valores del problema tenemos que:

$$I_O = (0{,}45\ \text{m})^4(45\ \text{kg/m}^2)\left(\pi - \frac{2}{3}\right) \approx 4{,}57\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

■

29. Determine la posición del centro de masas de la placa con agujero de la figura. Considere una densidad de masa superficial uniforme σ.



(a) $\vec{G} = \dfrac{-r^2 d}{4R^2 - 4r^2}\hat{x}$

(b) $\vec{G} = \dfrac{-r^2 d}{4R^2 - r^2}\hat{x}$

(c) $\vec{G} = \dfrac{-r^2 d}{2R^2 - r^2}\hat{x}$

(d) $\vec{G} = \dfrac{-r^2 d}{R^2 - r^2}\hat{x}$

(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta:

La placa con el agujero es un cuerpo compuesto. Por simetría, el centro de masa del objeto estará sobre el eje que une los centros de masas de cada objeto por separado, es decir, sobre el eje x. Ahora, calculamos los centros de masa de cada objeto individualmente, la placa sin agujero y el agujero (con masa negativa) y luego calculamos el centro de masa del objeto compuesto concentrando toda la masa de cada objeto su propio centro de masa. Sea A la placa y B el agujero, entonces:

$$\vec{G}_A = 0$$
$$\vec{G}_B = d\hat{x}$$

Luego:

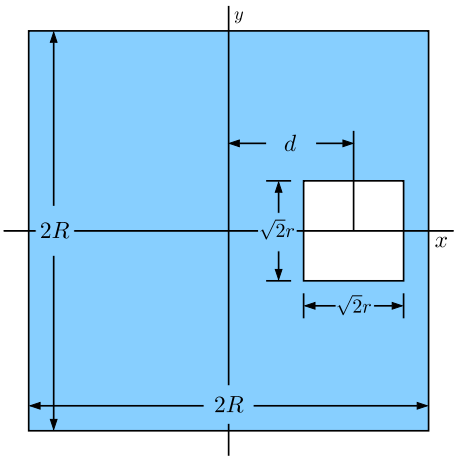
$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{(\pi R^2\sigma)(0) - (\pi r^2\sigma)(d)}{\pi R^2\sigma - \pi r^2\sigma} \\ &= \frac{-r^2 d}{R^2 - r^2} \end{aligned}$$

Así:

$$\vec{G} = \frac{-r^2 d}{R^2 - r^2}\hat{x}$$

■

30. Determine la posición del centro de masas de la placa con agujero de la figura. Considere una densidad de masa superficial uniforme σ.



(a) $\vec{G} = \dfrac{-r^2 d}{4R^2 - 4r^2}\hat{x}$

(b) $\vec{G} = \dfrac{-r^2 d}{4R^2 - r^2}\hat{x}$

(c) $\vec{G} = \dfrac{-r^2 d}{2R^2 - r^2}\hat{x}$

(d) $\vec{G} = \dfrac{-r^2 d}{R^2 - r^2}\hat{x}$

(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta:

La placa con el agujero es un cuerpo compuesto. Por simetría, el centro de masa del objeto estará sobre el eje que une los centros de masas de cada objeto por separado, es decir, sobre el eje x. Ahora, calculamos los centros de masa de cada objeto individualmente, la placa sin agujero y el agujero (con masa negativa) y luego calculamos el centro de masa del objeto compuesto concentrando toda la masa de cada objeto su propio centro de masa. Sea A la placa y B el agujero, entonces:

$$\vec{G}_A = 0$$
$$\vec{G}_B = d\hat{x}$$

Luego:

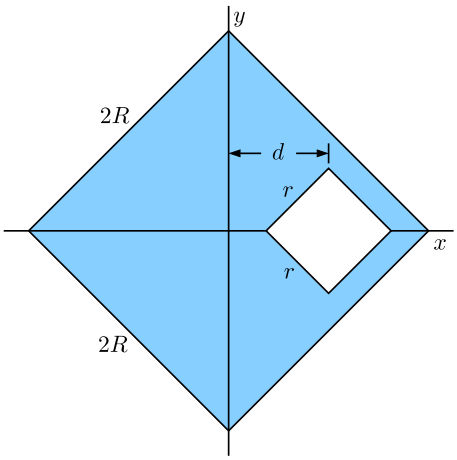
$$\bar{x} = \frac{(4R^2\sigma)(0) - (2r^2\sigma)(d)}{4R^2\sigma - 2r^2\sigma}$$
$$= \frac{-r^d}{2R^2 - r^2}$$

Así:

$$\vec{G} = \frac{-r^2 d}{2R^2 - r^2}\hat{x}$$

■

31. Determine la posición del centro de masas de la placa con agujero de la figura. Considere una densidad de masa superficial uniforme σ.



(a) $\vec{G} = \dfrac{-r^2 d}{4R^2 - 4r^2}\hat{x}$

(b) $\vec{G} = \dfrac{-r^2 d}{4R^2 - r^2}\hat{x}$

(c) $\vec{G} = \dfrac{-r^2 d}{2R^2 - r^2}\hat{x}$

(d) $\vec{G} = \dfrac{-r^2 d}{R^2 - r^2}\hat{x}$

(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta:

La placa con el agujero es un cuerpo compuesto. Por simetría, el centro de masa del objeto estará sobre el eje que une los centros de masas de cada objeto por separado, es decir, sobre el eje x. Ahora, calculamos los centros de masa de cada objeto individualmente, la placa sin agujero y el agujero (con masa negativa) y luego calculamos el centro de masa del objeto compuesto concentrando toda la masa de cada objeto su propio centro de masa. Sea A la placa y B el agujero, entonces:

$$\vec{G}_A = 0$$
$$\vec{G}_B = d\hat{x}$$

Luego:

$$\bar{x} = \frac{(4R^2\sigma)(0) - (r^2\sigma)(d)}{4R^2\sigma - r^2\sigma}$$
$$= \frac{-r^d}{4R^2 - r^2}$$

Así:

$$\vec{G} = \frac{-r^2 d}{4R^2 - r^2}\hat{x}$$

■