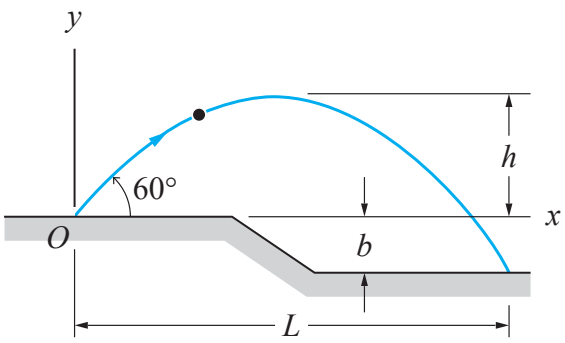
Examen

FECHA : *14 de Diciembre 2020*

1. Un proyectil se dispara con rapidez c e inclinación 60° sobre la horizontal. El proyectil cae a distancia horizontal L de la posición de disparo, luego de haber descendido un terraplén de altura b. Determine la rapidez c en función de las distancias L, b, y la aceleración g.



(a) $c = L\sqrt{\dfrac{2g}{\sqrt{3}\,b - L}}$

(b) $c = L\sqrt{\dfrac{2g}{\sqrt{3}\,L + b}}$

(c) $c = L\sqrt{\dfrac{2g}{\sqrt{3}\,L - b}}$

(d) $c = L\sqrt{\dfrac{2g}{\sqrt{3}\,b + L}}$

(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta: (b)

La aceleración es constante, con lo que la posición del proyectil en el tiempo es:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}_0\, t + \frac{1}{2}\,\bar{\mathbf{a}}\, t^2 = c \begin{Bmatrix} \cos 60° \\ \sin 60° \end{Bmatrix} t + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} t^2 = \frac{c}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{Bmatrix} t + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} t^2$$

En cierto instante $t^\star$ se encontrará en la posición $\{L \quad -b\}$, con lo que:

$$\mathbf{u}(t^\star) = \frac{c}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{Bmatrix} t + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \end{Bmatrix} t^2 = \begin{Bmatrix} L \\ -b \end{Bmatrix}$$

La ecuación en el eje $\hat{\mathbf{i}}$ permite determinar $t^\star$:

$$\frac{c}{2}\, t^\star = L \qquad \longrightarrow \qquad t^\star = \frac{2\,L}{c}$$

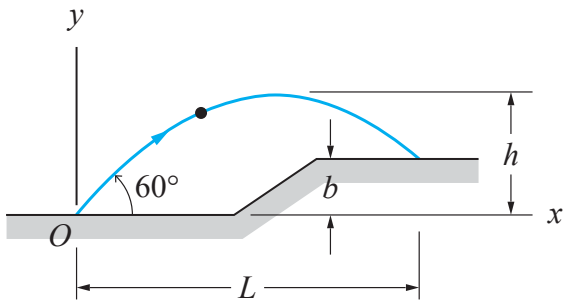
, que reemplazado en la ecuación en el eje $\hat{\mathbf{j}}$:

$$\left(\frac{c}{2}\right)\left(\sqrt{3}\right)\left(\frac{2L}{c}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)(-g)\left(\frac{2L}{c}\right)^2 = \sqrt{3}L - \frac{2L^2\, g}{c^2} = -b$$

$$c = \pm L\sqrt{\frac{2g}{\sqrt{3}\,L + b}}$$

, donde sólo la solución positiva tiene sentido físico en nuestro caso particular. ■

2. Un proyectil se dispara con rapidez c e inclinación 60° sobre la horizontal. El proyectil cae a distancia horizontal L de la posición de disparo, luego de haber ascendido un terraplén de altura b. Determine la rapidez c en función de las distancias L, b, y la aceleración g.



(a) $c = L\sqrt{\dfrac{2g}{\sqrt{3}\,b + L}}$

(b) $c = L\sqrt{\dfrac{2g}{\sqrt{3}\,L + b}}$

(c) $c = L\sqrt{\dfrac{2g}{\sqrt{3}\,b - L}}$

(d) $c = L\sqrt{\dfrac{2g}{\sqrt{3}\,L - b}}$

(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta: (d)

La aceleración es constante, con lo que la posición del proyectil en el tiempo es:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}_0\, t + \frac{1}{2}\,\bar{\mathbf{a}}\, t^2 = c\begin{Bmatrix}\cos 60^\circ \\ \sin 60^\circ\end{Bmatrix} t + \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}0 \\ -g\end{Bmatrix} t^2 = \frac{c}{2}\begin{Bmatrix}1 \\ \sqrt{3}\end{Bmatrix} t + \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}0 \\ -g\end{Bmatrix} t^2$$

En cierto instante $t^\star$ se encontrará en la posición $\{L \quad b\}$, con lo que:

$$\mathbf{u}(t^\star) = \frac{c}{2}\begin{Bmatrix}1 \\ \sqrt{3}\end{Bmatrix} t + \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}0 \\ -g\end{Bmatrix} t^2 = \begin{Bmatrix}L \\ b\end{Bmatrix}$$

La ecuación en el eje $\hat{\mathbf{i}}$ permite determinar $t^\star$:

$$\frac{c}{2}\, t^\star = L \qquad \longrightarrow \qquad t^\star = \frac{2\,L}{c}$$

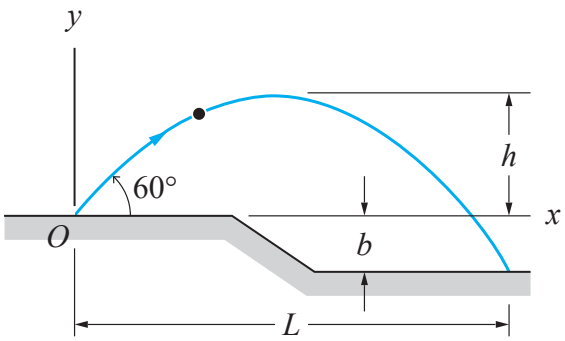
, que reemplazado en la ecuación en el eje $\hat{\mathbf{j}}$:

$$\left(\frac{c}{2}\right)\left(\sqrt{3}\right)\left(\frac{2L}{c}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)(-g)\left(\frac{2L}{c}\right)^2 = \sqrt{3}L - \frac{2L^2\, g}{c^2} = b$$

$$c = \pm L\sqrt{\frac{2g}{\sqrt{3}\,L - b}}$$

, donde sólo la solución positiva tiene sentido físico en nuestro caso particular. ■

3. Un proyectil se dispara con rapidez c e inclinación 60° sobre la horizontal. El proyectil cae a distancia horizontal L de la posición de disparo, luego de haber descendido un terraplén de altura b. Determine el instante de tiempo $t^\star$ en que el proyectil impacta el suelo, en función de las distancias L, b, y la aceleración g.



(a) $t^\star = \sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}\,b + 2\,L}{g}}$

(b) $t^\star = \sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}\,L + 2\,b}{g}}$

(c) $t^\star = \sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}\,L - 2\,b}{g}}$

(d) $t^\star = \sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}\,b - 2\,L}{g}}$

(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta: (b)

La aceleración es constante, con lo que la posición del proyectil en el tiempo es:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}_0\,t + \frac{1}{2}\,\bar{\mathbf{a}}\,t^2 = c\begin{Bmatrix}\cos 60^\circ \\ \sin 60^\circ\end{Bmatrix} t + \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}0 \\ -g\end{Bmatrix} t^2 = \frac{c}{2}\begin{Bmatrix}1 \\ \sqrt{3}\end{Bmatrix} t + \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}0 \\ -g\end{Bmatrix} t^2$$

En cierto instante $t^\star$ se encontrará en la posición $\{L \quad -b\}$, con lo que:

$$\mathbf{u}(t^\star) = \frac{c}{2}\begin{Bmatrix}1 \\ \sqrt{3}\end{Bmatrix} t + \frac{1}{2}\begin{Bmatrix}0 \\ -g\end{Bmatrix} t^2 = \begin{Bmatrix}L \\ -b\end{Bmatrix}$$

La ecuación en el eje $\hat{\mathbf{i}}$ permite determinar $t^\star$:

$$\frac{c}{2}\,t^\star = L \qquad \longrightarrow \qquad t^\star = \frac{2\,L}{c}$$

, que reemplazado en la ecuación en el eje $\hat{\mathbf{j}}$:

$$\left(\frac{c}{2}\right)\left(\sqrt{3}\right)\left(\frac{2L}{c}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)(-g)\left(\frac{2L}{c}\right)^2 = \sqrt{3}L - \frac{2L^2\,g}{c^2} = -b$$

$$c = \pm L\sqrt{\frac{2g}{\sqrt{3}\,L + b}}$$

, donde sólo la solución positiva tiene sentido físico en nuestro caso particular. Finalmente, reemplazando la rapidez c en $t^\star$ se tiene:

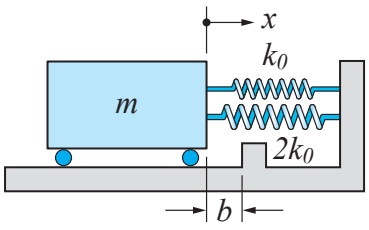
$$t^\star = \frac{2\,L}{c} = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}\,L + 2\,b}{g}}$$

■

4. Un carro de masa $m = 6\,\text{kg}$ está conectado a dos resortes de rigidez k_0 y $2k_0$, respectivamente, donde $k_0 = 27\,\text{N/m}$. En cierto instante $t = 0$, se observa que el carro tiene tiene posición y velocidad:

$$x_0 = \frac{2}{3}\,\text{m} \qquad\qquad \dot{x}_0 = p$$

La masa tiene un tope para evitar movimientos excesivos a distancia $b = \frac{10}{3}$ m. Determine el máximo valor (positivo) que puede tener la velocidad p para que la masa no golpee el tope.



(a) $p = 4\sqrt{6}\ \text{m/s}$
(b) $p = 4\sqrt{3}\ \text{m/s}$
(c) $p = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}\ \text{m/s}$
(d) $p = 12\ \text{m/s}$
(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta: (d)

Un DCL y la aplicación de la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton resulta en:

$$m\,\ddot{x} + 3\,k_0\,u = 0$$

Es decir, la frecuencia natural circular del oscilador es $\omega_n = \sqrt{3k_0/m}$ y su solución es:

$$x(t) = A\,\cos(\omega_n\,t) + B\,\sin(\omega_n\,t) \qquad \text{con} \quad A = x_0 \quad \text{y} \quad B = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$$

La amplitud del movimiento del oscilador es $C = \sqrt{A^2 + B^2}$. Para que el oscilador no golpee su tope, la amplitud puede ser como máximo igual a b. Es decir:

$$C = \sqrt{(u_0)^2 + \left(\frac{p}{3\sqrt{6}/2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{2\,p^2}{27}} = \frac{10}{3}$$

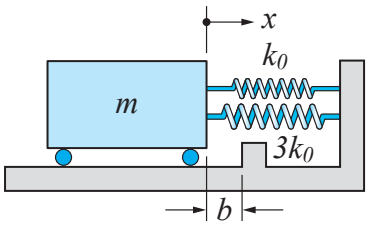
$$p = \pm 12\ \text{m/s}$$

Nota: Este problema puede ser igualmente resuelto utilizando el principio de trabajo–energía. ■

5. Un carro de masa $m = 3\,\text{kg}$ está conectado a dos resortes de rigidez k_0 y $3k_0$, respectivamente, donde $k_0 = 27\,\text{N/m}$. En cierto instante $t = 0$, se observa que el carro tiene tiene posición y velocidad:

$$x_0 = p \qquad\qquad \dot{x}_0 = 2\,\text{m/s}$$

La masa tiene un tope para evitar movimientos excesivos a distancia $b = \frac{5}{9}$ m. Determine el máximo valor (positivo) que puede tener el desplazamiento p para que la masa no golpee el tope.



(a) $p = \dfrac{4}{9}$ m
(b) $p = \dfrac{\sqrt{13}}{9}$ m
(c) $p = \dfrac{\sqrt{7}}{9}$ m
(d) $p = \dfrac{1}{9}$ m
(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta: (a)

Un DCL y la aplicación de la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton resulta en:

$$m\,\ddot{x} + 4\,k_0\,u = 0$$

Es decir, la frecuencia natural circular del oscilador es $\omega_n = \sqrt{4k_0/m}$ y su solución es:

$$x(t) = A\,\cos(\omega_n\,t) + B\,\sin(\omega_n\,t) \qquad \text{con} \quad A = x_0 \quad \text{y} \quad B = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$$

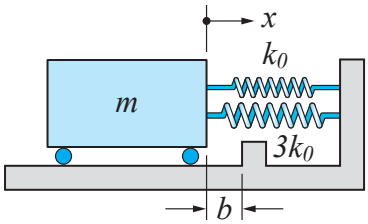
La amplitud del movimiento del oscilador es $C = \sqrt{A^2 + B^2}$. Para que el oscilador no golpee su tope, la amplitud puede ser como máximo igual a b. Es decir:

$$C = \sqrt{p^2 + \left(\frac{2}{6}\right)^2} = \sqrt{p^2 + \frac{1}{9}} = \frac{5}{9}$$

$$p = \pm\frac{4}{9}\ \text{m}$$

Nota: Este problema puede ser igualmente resuelto utilizando el principio de trabajo–energía. ■

6. Un carro de masa $m = 2\,\text{kg}$ está conectado a dos resortes de rigidez k_0 y $3k_0$, respectivamente. Determine el valor de la rigidez k_0 necesario para calibrar el oscilador de modo que complete una oscilación en $\frac{\pi}{4}$ segundos.



(a) $k_0 = 32\ \text{N/m}$
(b) $k_0 = \dfrac{128}{3}\ \text{N/m}$
(c) $k_0 = 27\ \text{N/m}$
(d) $k_0 = 64\ \text{N/m}$
(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta: (a)

Un DCL y la aplicación de la 2$^{\text{da}}$ ley de Newton resulta en:

$$m\,\ddot{x} + 4\,k_0\,u = 0$$

Es decir, la frecuencia natural circular y periodo del oscilador son:

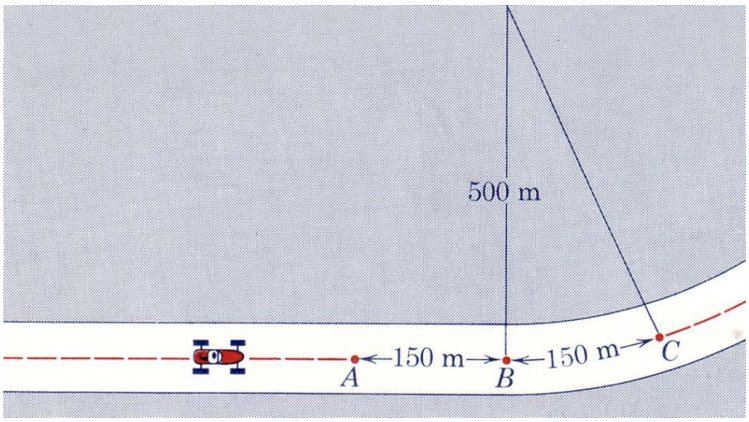
$$\omega_n = \sqrt{4k_0/m} \qquad T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \pi\sqrt{\frac{m}{k_0}}$$

Reemplazando $m = 2\,\text{kg}$ e igualando al periodo deseado:

$$T_n = \pi\sqrt{\frac{2}{k_0}} = \frac{\pi}{4}$$
$$k_0 = 32\,\text{N/m}$$

■

7. Un piloto de carreras que viaja a una velocidad de 250 Km/h en línea recta, cuando aplica sus frenos en el punto A y reduce su rapidez a una tasa constante hasta alcanzar una rapidez de 200 Km/h en C después de una distancia de $150 + 150 = 300$ m. Calcule la magnitud de la aceleración total del auto de carrera un instante después de que pasa el punto B.



(a) $a = 9,82\ \mathrm{m/s^2}$
(b) $a = 8,42\ \mathrm{m/s^2}$
(c) $a = 7,26\ \mathrm{m/s^2}$
(d) $a = 9,15\ \mathrm{m/s^2}$
(e) Ninguna de las anteriores.

Respuesta correcta: (b)

Dado que la aceleración tangencial es constante, coincide con la aceleración promedio. Indicado con t el tiempo que tarda el auto en recorrer el tramo de carretera de A a C, tenemos

$$a_t \;=\; \frac{v_C - v_A}{t}.$$

El tiempo t se obtiene "rectificando" la trayectoria y considerando el movimiento rectilíneo equivalente:

$$s(t) \;=\; v_A\, t \;+\; a_t \frac{t^2}{2} \;=\; \frac{v_C + v_A}{2}\, t\,.$$

Dado que $s(t) = 300$ m se obtiene

$$t \;=\; \frac{600}{200+250}\ \text{hm/Km} \;=\; 4{,}8\ \text{s}\,.$$

Por lo tanto, la aceleración vale

$$a_t \;=\; \frac{200-250}{4{,}8}\ \text{Km/(hs)} \;=\; -2{,}89\ \text{m/s}^2\,.$$

Calculamos el tiempo t_1 transcurrido entre el pasaje del auto del punto A al punto B:

$$150\ \text{m} \;=\; s(t_1) \;=\; v_A\, t_1 \;+\; a_t \frac{t_1^2}{2} \quad\Rightarrow\quad t_1 \;=\; 2{,}27\ \text{s}\,.$$

La velocidad en el punto B vale

$$v_B \;=\; \dot{s}(t_1) \;=\; v_A \;+\; a_t\, t_1 \;=\; 62{,}88\ \text{m/s}\,.$$

La aceleración centrípeta en B es

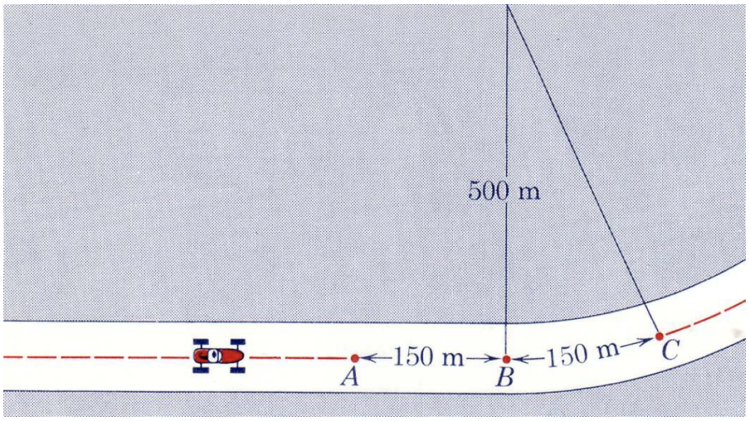
$$a_c \;=\; \frac{v_B^2}{R} \;=\; 7{,}91\ \text{m/s}^2\,.$$

La aceleración total inmediatamente después el pasaje de B vale

$$a \;=\; \sqrt{a_t^2 + a_c^2} \;=\; 8{,}42\ \text{m/s}^2\,.$$

■

8. Un piloto de carreras que viaja a una velocidad de 250 Km/h en línea, cuando recta aplica sus frenos en el punto A y reduce su celeridad (rapidez) a una tasa constante hasta alcanzar una celeridad de 200 Km/h en C después de una distancia de $150 + 150 = 300$ m. Calcule fuerza centrípeta que actúa sobre el auto de carrera cuando está a medio camino entre el punto B y el punto C. La masa del auto es 500 Kg.



(a) $F_c = 3086,42$ N
(b) $F_c = 4822,53$ N
(c) $F_c = 3520,45$ N
(d) $F_c = 3953,89$ N
(e) Ninguna de las anteriores.

Respuesta correcta: (c)

Dado que la aceleración tangencial es constante, coincide con la aceleración promedio. Indicado con t el tiempo que tarda el auto en recorrer el tramo de carretera de A a C, tenemos

$$a_t = \frac{v_C - v_A}{t}.$$

El tiempo t se obtiene"rectificand" la trayectoria y considerando el movimiento rectilíneo equivalente:

$$s(t) = v_A\, t + a_t \frac{t^2}{2} = \frac{v_C + v_A}{2}\, t\,.$$

Dado que $s(t) = 300$ m se obtiene

$$t = \frac{600}{200 + 250}\ \text{hm/Km} = 4,8\ \text{s}\,.$$

Por lo tanto, la aceleración vale

$$a_t = \frac{200 - 250}{4,8}\ \text{Km/(hs)} = -2,89\ \text{m/s}^2\,.$$

Calculamos el tiempo t_1 transcurrido entre el pasaje del auto del punto A al punto mediano entre B y C:

$$(150 + 75)\ \text{m} = s(t_1) = v_A\, t_1 + a_t \frac{t_1^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t_1 = 3,49\ \text{s}\,.$$

La velocidad en el punto mediano entre B y C vale

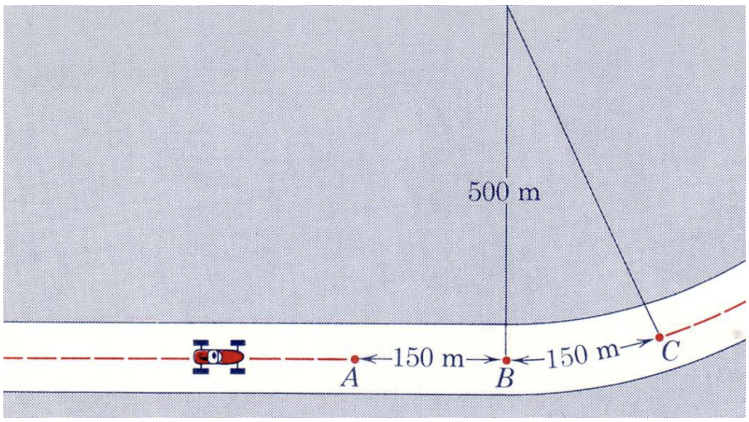
$$v_* = \dot{s}(t_1) = v_A + a_t\, t_1 = 59,33\ \text{m/s}\,.$$

La fuerza centrípeta en este punto es

$$F_c = Ma_c = M\frac{v_*^2}{R} = 3520,45\ \text{N}\,.$$

■

9. Un piloto de carreras que viaja a una velocidad de 250 Km/h en línea recta aplica sus frenos en el punto A y reduce su celeridad a una tasa constante hasta alcanzar una celeridad de 200 Km/h en C después de una distancia de $150 + 150 = 300$ m. Calcule la diferencia entre la fuerza centrípeta que actúa sobre el auto de carrera en el punto B y en el punto C. La masa del auto es 500 Kg.



(a) $\Delta F_c = 1042$ N
(b) $\Delta F_c = 868$ N
(c) $\Delta F_c = 924$ N
(d) $\Delta F_c = 764$ N
(e) Ninguna de las anteriores.

Respuesta correcta: (b)

Dado que la aceleración tangencial es constante, coincide con la aceleración promedio. Indicado con t el tiempo que tarda el auto en recorrer el tramo de carretera de A a C, tenemos

$$a_t \;=\; \frac{v_C - v_A}{t}.$$

El tiempo t se obtiene"rectificand" la trayectoria y considerando el movimiento rectilíneo equivalente:

$$s(t) \;=\; v_A\, t \;+\; a_t \frac{t^2}{2} \;=\; \frac{v_C + v_A}{2}\, t\,.$$

Dado que $s(t) = 300$ m se obtiene

$$t \;=\; \frac{600}{200+250}\ \text{hm/Km} \;=\; 4{,}8\ \text{s}\,.$$

Por lo tanto, la aceleración vale

$$a_t \;=\; \frac{200-250}{4{,}8}\ \text{Km/(hs)} \;=\; -2{,}89\ \text{m/s}^2\,.$$

Calculamos el tiempo t_1 transcurrido entre el pasaje del auto del punto A al punto B:

$$150\ \text{m} \;=\; s(t_1) \;=\; v_A\, t_1 \;+\; a_t \frac{t_1^2}{2} \quad\Rightarrow\quad t_1 \;=\; 2{,}27\ \text{s}\,.$$

La velocidad en el punto B vale

$$v_B \;=\; \dot{s}(t_1) \;=\; v_A \;+\; a_t\, t_1 \;=\; 62{,}88\ \text{m/s}\,.$$

La aceleración centrípeta en B es

$$a_B \;=\; \frac{v_B^2}{R} \;=\; 7{,}91\ \text{m/s}^2\,.$$

y la aceleración centrípeta en C es

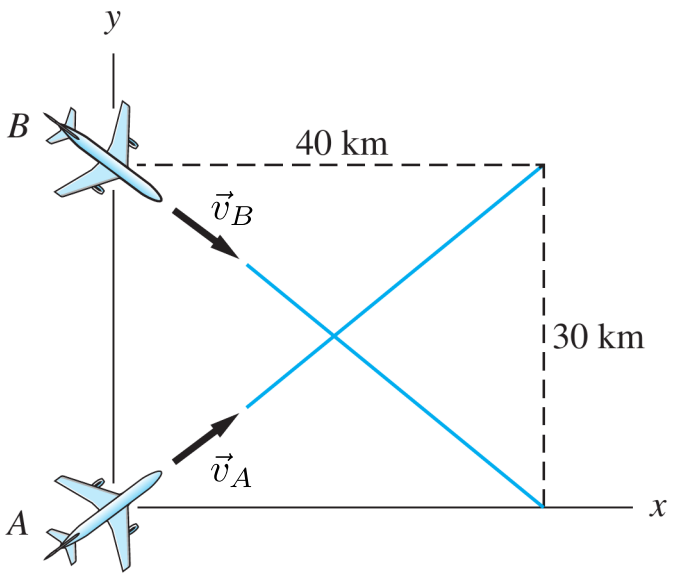
$$a_C \;=\; \frac{v_C^2}{R} \;=\; 6{,}17\ \text{m/s}^2\,.$$

la diferencia entre las fuerzas centrípedas en B y C es

$$\Delta F_c \;=\; F_B \;-\; F_C \;=\; M(a_B - a_C) \;=\; 868\ \text{N}\,.$$

■

10. Dos aviones A y B vuelan en línea recta, a la misma altitud, y cada uno con rapidez constante $v_A = 500$ km/h y $v_B = 250$ km/h. En la figura se muestran las posiciones de los aviones en el tiempo $t = 0$ (el sistema de referencia xy está fijo en el espacio). Determine el vector de posición de A relativo a B $\vec{r}_{A/B}(t)$, donde t está expresado en horas.



(a) $\vec{r}_{A/B} = [320t\hat{x} + (480t - 30)\hat{y}]$ km
(b) $\vec{r}_{A/B} = [200t\hat{x} + (450t - 30)\hat{y}]$ km
(c) $\vec{r}_{A/B} = [200t\hat{x} + (570t - 30)\hat{y}]$ km
(d) $\vec{r}_{A/B} = [160t\hat{x} + (480t - 30)\hat{y}]$ km
(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta: (b)

Las velocidades de los aviones son:

$$\vec{v}_A = v_A\left(\frac{4\hat{x} + 3\hat{y}}{5}\right) \quad \text{y} \quad \vec{v}_B = v_B\left(\frac{4\hat{x} - 3\hat{y}}{5}\right)$$

Por lo tanto, la velocidad relativa de A con respecto a B es:

$$\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = v_A\left(\frac{4\hat{x} + 3\hat{y}}{5}\right) - v_B\left(\frac{4\hat{x} - 3\hat{y}}{5}\right)$$
$$= \frac{4}{5}(v_A - v_B)\hat{x} + \frac{3}{5}(v_A + v_B)\hat{y}$$

Integrando (recordemos que ls velocidades $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ y por lo tanto $\vec{v}_{A/B}$ son constantes):

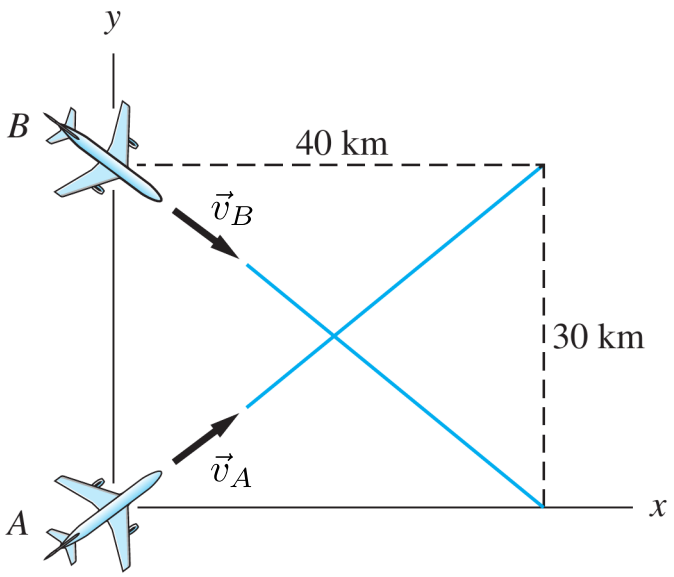
$$\vec{r}_{A/B} = \int \vec{v}_{A/B}\, dt = \left[\frac{4}{5}(v_A - v_B)\hat{x} + \frac{3}{5}(v_A + v_B)\hat{y}\right]t + \vec{r}_0$$

donde t está en horas y $\vec{r}_0$ es una constante de integración. De la condición inicial, $\vec{r}_{A/B} = -30\hat{y}$ km en $t = 0$, resulta que $\vec{r}_0 = -30\hat{y}$ km. Por tanto, reemplazando con los valores del problema, el vector de posición relativa se convierte en:

$$\vec{r}_{A/B} = [200t\hat{x} + (450t - 30)\hat{y}] \text{ km}$$

■

11. Dos aviones A y B vuelan en línea recta, a la misma altitud, y cada uno con rapidez constante $v_A = 500$ km/h y $v_B = 300$ km/h. En la figura se muestran las posiciones de los aviones en el tiempo $t = 0$ (el sistema de referencia xy está fijo en el espacio). Determine el vector de posición de A relativo a B, $\vec{r}_{A/B}(t)$, donde t está expresado en horas



(a) $\vec{r}_{A/B} = [160t\hat{x} + (480t - 30)\hat{y}]$ km
(b) $\vec{r}_{A/B} = [200t\hat{x} + (450t - 30)\hat{y}]$ km
(c) $\vec{r}_{A/B} = [200t\hat{x} + (570t - 30)\hat{y}]$ km
(d) $\vec{r}_{A/B} = [320t\hat{x} + (480t - 30)\hat{y}]$ km
(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta: (a)

Las velocidades de los aviones son:

$$\vec{v}_A = v_A\left(\frac{4\hat{x} + 3\hat{y}}{5}\right) \quad \text{y} \quad \vec{v}_B = v_B\left(\frac{4\hat{x} - 3\hat{y}}{5}\right)$$

Por lo tanto, la velocidad relativa de A con respecto a B es:

$$\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = v_A\left(\frac{4\hat{x} + 3\hat{y}}{5}\right) - v_B\left(\frac{4\hat{x} - 3\hat{y}}{5}\right)$$
$$= \frac{4}{5}(v_A - v_B)\hat{x} + \frac{3}{5}(v_A + v_B)\hat{y}$$

Integrando (recordemos que ls velocidades $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ y por lo tanto $\vec{v}_{A/B}$ son constantes):

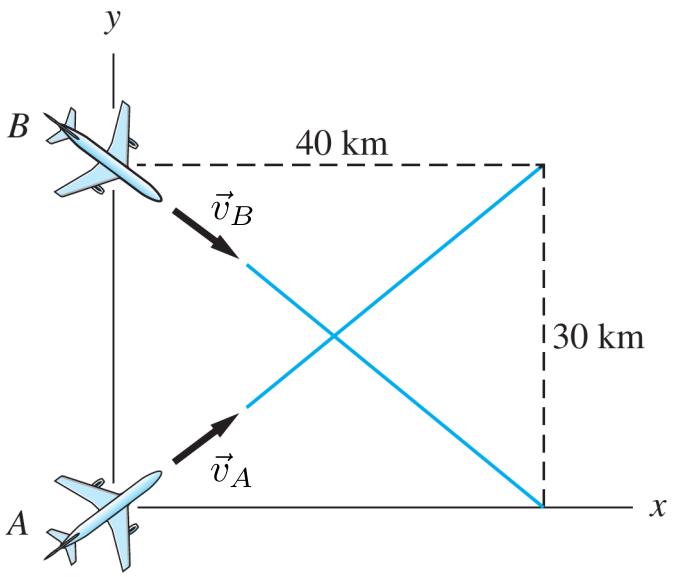
$$\vec{r}_{A/B} = \int \vec{v}_{A/B}\, dt = \left[\frac{4}{5}(v_A - v_B)\hat{x} + \frac{3}{5}(v_A + v_B)\hat{y}\right]t + \vec{r}_0$$

donde t está en horas y $\vec{r}_0$ es una constante de integración. De la condición inicial, $\vec{r}_{A/B} = -30\hat{y}$ km en $t = 0$, resulta que $\vec{r}_0 = -30\hat{y}$ km. Por tanto, reemplazando con los valores del problema, el vector de posición relativa se convierte en:

$$\vec{r}_{A/B} = [160t\hat{x} + (480t - 30)\hat{y}] \text{ km}$$

■

12. Dos aviones A y B vuelan en línea recta, a la misma altitud, y cada uno con rapidez constantes $v_A = 600$ km/h y $v_B = 200$ km/h. En la figura se muestran las posiciones de los aviones en el tiempo $t = 0$ (el sistema de referencia xy está fijo en el espacio). Determine el vector de posición de A relativo a B, $\vec{r}_{A/B}(t)$, donde t está expresado en horas.



(a) $\vec{r}_{A/B} = [200t\hat{x} + (570t - 30)\hat{y}]$ km
(b) $\vec{r}_{A/B} = [200t\hat{x} + (450t - 30)\hat{y}]$ km
(c) $\vec{r}_{A/B} = [320t\hat{x} + (480t - 30)\hat{y}]$ km
(d) $\vec{r}_{A/B} = [160t\hat{x} + (480t - 30)\hat{y}]$ km
(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta: (c)

Las velocidades de los aviones son:

$$\vec{v}_A = v_A\left(\frac{4\hat{x} + 3\hat{y}}{5}\right) \quad \text{y} \quad \vec{v}_B = v_B\left(\frac{4\hat{x} - 3\hat{y}}{5}\right)$$

Por lo tanto, la velocidad relativa de A con respecto a B es:

$$\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = v_A\left(\frac{4\hat{x} + 3\hat{y}}{5}\right) - v_B\left(\frac{4\hat{x} - 3\hat{y}}{5}\right)$$
$$= \frac{4}{5}(v_A - v_B)\hat{x} + \frac{3}{5}(v_A + v_B)\hat{y}$$

Integrando (recordemos que ls velocidades $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ y por lo tanto $\vec{v}_{A/B}$ son constantes):

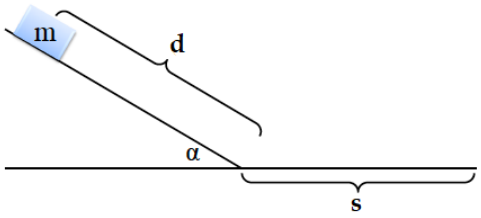
$$\vec{r}_{A/B} = \int \vec{v}_{A/B}\, dt = \left[\frac{4}{5}(v_A - v_B)\hat{x} + \frac{3}{5}(v_A + v_B)\hat{y}\right]t + \vec{r}_0$$

donde t está en horas y $\vec{r}_0$ es una constante de integración. De la condición inicial, $\vec{r}_{A/B} = -30\hat{y}$ km en $t = 0$, resulta que $\vec{r}_0 = -30\hat{y}$ km. Por tanto, reemplazando con los valores del problema, el vector de posición relativa se convierte en:

$$\vec{r}_{A/B} = [320t\hat{x} + (480t - 30)\hat{y}] \text{ km}$$

■

13. Un cuerpo comienza a deslizar sobre un plano inclinado con ángulo α, y después continua sobre una superficie horizontal. El coeficiente de roce cinético entre el cuerpo y la superficie es μ.



VARIACIONES:

Forma 1: Si la distancia recorrida por el cuerpo sobre el plano inclinado (d) es igual a la mitad de la distancia que recorre sobre el plano horizontal (s), es decir, $d/s = 1/2$, calcule el coeficiente de roce.

(a) $\mu = \frac{\sin\alpha}{2+\cos\alpha}$

(b) $\mu = \frac{\sin\alpha}{2-\cos\alpha}$

(c) $\mu = \frac{\cos\alpha}{2+\sin\alpha}$

(d) $\mu = \frac{\cos\alpha}{2+\sin\alpha}$

(e) Ninguna de las anteriores

Forma 2: Si la distancia recorrida por el cuerpo sobre el plano inclinado es igual al doble de la distancia que recorre sobre el plano horizontal, es decir, $d/s = 2$, calcule el coeficiente de roce.

(a) $\mu = \frac{\sin\alpha}{1/2+\cos\alpha}$

(b) $\mu = \frac{\sin\alpha}{1/2-\cos\alpha}$

(c) $\mu = \frac{\cos\alpha}{1/2+\sin\alpha}$

(d) $\mu = \frac{\cos\alpha}{1/2+\sin\alpha}$

(e) Ninguna de las anteriores

Forma 3: Si la distancia recorrida por el cuerpo sobre el plano inclinado (d) es igual al triple de la distancia que recorre sobre el plano horizontal (s), es decir, $d/s = 3$, calcule el coeficiente de roce.

(a) $\mu = \frac{\sin\alpha}{\frac{1}{3}+\cos\alpha}$

(b) $\mu = \frac{\sin\alpha}{\frac{1}{3}-\cos\alpha}$

(c) $\mu = \frac{\cos\alpha}{\frac{1}{3}+\sin\alpha}$

(d) $\mu = \frac{\cos\alpha}{\frac{1}{3}+\sin\alpha}$

(e) Ninguna de las anteriores

Forma 4: Si la distancia recorrida por el cuerpo sobre el plano inclinado (d) es igual a un tercio de la distancia que recorre sobre el plano horizontal (s), es decir, $d/s = 1/3$, calcule el coeficiente de roce.

(a) $\mu = \frac{\sin\alpha}{3+\cos\alpha}$

(b) $\mu = \frac{\sin\alpha}{3-\cos\alpha}$

(c) $\mu = \frac{\cos\alpha}{3+\sin\alpha}$

(d) $\mu = \frac{\cos\alpha}{3-\sin\alpha}$

(e) Ninguna de las anteriores

Las fuerzas actuando sobre el bloque de masa m en el plano inclinado son la fuerza peso, la normal y el roce. Considerando el eje x positivo hacia la derecha del dibujo y sobre el plano inclinado, tendremos que:

$$F_x = mg\sin\alpha - \mu N = ma_x$$

Y también sabemos que $N = mg\cos\alpha$, entonces

$$F_x = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$$

El trabajo realizado por esta fuerza es igual al cambio en la energía cinética de la masa:

$$W_{plano} = mg\sin\alpha d - \mu mg\cos\alpha d = \frac{1}{2}mv_B^2$$

Ahora, el trabajo realizado por la fuerza roce en el plano horizontal es (eje x sobre el suelo y positivo hacia la derecha):

$$W_{suelo} = -s\mu mg = \frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2$$

Pero la velocidad es C es cero (se detiene), entonces:

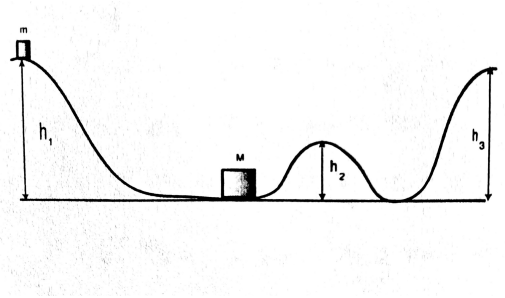
$$s\mu mg = \frac{1}{2}mv_B^2$$
$$s\mu mg = mg\sin\alpha d - \mu mg\cos\alpha d$$

Finalmente, despejando μ:

$$\mu = \frac{d\sin\alpha}{s + d\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{s/d + \cos\alpha}$$

■

14. Una masa m se encuentra en la cima de un cerro de altura h_1. En la base del cerro se encuentra otra masa M detenida. La masa m cae con velocidad inicial cero, para luego chocar de forma perfectamente plástica con M. Ambas suben un segundo cerro de altura h_2, bajan hasta el suelo, y suben nuevamente quedando detenidas en un tercer cerro de altura h_3.



VARIACIONES:

Forma 1:¿Cuál debe ser la altura h_3 de modo que ambas masas lleguen con velocidad cero a ese punto?

(a) $h_3 = h_1 \frac{m^2}{(m+M)^2}$

(b) $h_3 = h_1 \frac{m^2}{(m-M)^2}$

(c) $h_3 = h_1 \frac{(m+M)^2}{m^2}$

(d) $h_3 = h_1 \frac{(m-M)^2}{m^2}$

(e) Ninguna de las anteriores

Forma 2: ¿Cuál debe ser la altura h_1 de modo que ambas masas lleguen con velocidad cero a h_3? Asuma que se conoce h_3 y las masas m y M

(a) $h_1 = h_3 \frac{(m+M)^2}{m^2}$

(b) $h_1 = h_3 \frac{(m-M)^2}{m^2}$

(c) $h_1 = h_3 \frac{m^2}{(m+M)^2}$

(d) $h_1 = h_3 \frac{m^2}{(m-M)^2}$

(e) Ninguna de las anteriores

Primero calculamos la velocidad con que m llega a B:

$$E_A = mgh_1 = m\frac{1}{2}mv_B^2 = E_B$$

Entonces,

$$v_B = \sqrt{2gh_1}$$

Por conservación de momentum, podemos calcular la velocidad con que salen $m + M$:

$$p_i = mv_B = (m + M)v_f = p_f$$

Entonces,

$$v_f = \frac{m}{m + M}\sqrt{2gh_1}$$

es la velocidad con que salen después de la colisión.
Luego, por conservación de energía, sabemos que:

$$E_B = E_C = E_D = E_F$$

Entonces,

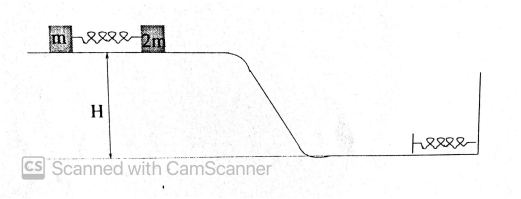
$$E_B = \frac{1}{2}(m + M)v_f^2 = (m + M)h_3 = E_F$$

Luego, se obtiene que,

$$h_3 = \frac{1}{2}\frac{v_f^2}{g} = h_1\frac{m^2}{(M + m)^2}$$

■

15. Dos bloques de masa m y $2m$, conectados por un resorte de constante elástica k, están sobre una superficie sin fricción, como se muestra en la figura. Si inicialmente el resorte está comprimido una distancia d y los bloques se sueltan desde el reposo (y desprenden del resorte). Asuma que los dos resortes tienen la misma constante elástica k. AYUDA: Note que el momentum inicial es cero.



Scanned with CamScanner

VARIACIONES:

Forma 1: calcule cuánto se comprime el resorte ubicado al final de la rampa.

(a) $x = \sqrt{\frac{4mgH}{k} + \frac{d^2}{3}}$

(b) $x = \sqrt{\frac{2mgH}{k} + \frac{d^2}{6}}$

(c) $x = \sqrt{\frac{mgH}{k} + d^2}$

(d) $x = \sqrt{\frac{4mgH}{k} - \frac{d^2}{3}}$

(e) Ninguna de las anteriores

Forma 2: Calcule cuánto debe valer d para que el resorte de abajo se comprima una longitud x conocida.

(a) $d = \sqrt{3x^2 - \frac{12mgH}{k}}$

(b) $d = \sqrt{3x^2 + \frac{12mgH}{k}}$

(c) $d = \sqrt{x^2 - \frac{4mgH}{k}}$

(d) $d = \sqrt{x^2 + \frac{4mgH}{k}}$

(e) Ninguna de las anteriores

Forma 3: ¿Cuánto vale la constante elástica k si el primer resorte se comprime d y el segundo resorte x?

(a) $k = \frac{12mgH}{3x^2 - d^2}$

(b) $k = \frac{2mgH}{3x^2 - d^2}$

(c) $k = \frac{6mgH}{x^2 - d^2}$

(d) $k = \frac{12mgH}{x^2 - 2d^2}$

(e) Ninguna de las anteriores

Por conservación de momentum, calcularemos la relación entre las velocidades de los bloques:

$$p_i = 0 = m(-v_1) + 2mv_2 = p_f$$
$$v_1 = 2v_2$$

Por conservación de energía, tenemos:

$$E_i = (m + 2m)gH + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}2mv_2^2 + (m + 2m)gH = E_f$$

Reemplazando por $v_1 = 2v_2$ se tiene que:

$$v_2 = \sqrt{\frac{kd^2}{6m}}$$

Luego, después de que los bloques se sueltan del resorte, podemos usar conservación de energía de nuevo:

$$E_i = \frac{1}{2}(2m)v_2^2 + (2m)gH = \frac{1}{2}kx^2 = E_f$$
$$\frac{1}{2}(2m)(\frac{kd^2}{6m}) + (2m)gH = \frac{1}{2}kx^2$$

Despejando x, se obtiene que:

$$x = \sqrt{\frac{4mgH}{k} + \frac{d^2}{3}}$$

Despejando d, se obtiene que:

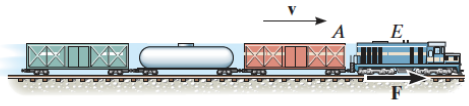
$$d = \sqrt{3x^2 - \frac{12mgH}{k}}$$

Despejando k, se obtiene que:

$$k = \frac{12mgH}{3x^2 - d^2}$$

■

16. Un tren consiste de un carro motor de 700 Kg y 3 vagones de 500 Kg cada uno. Al tren le toma 80 s incrementar uniformemente su velocidad a 40 Km/h, partiendo desde el reposo. Asuma que las ruedas del carro motor proveen de una fuerza de fricción tractiva total F que da movimiento el tren hacia adelante, mientras que las ruedas de los vagones ruedan libremente. Determine la fuerza T en el acople del carro motor E y el primer vagón A y la fuerza F.



(a) $F = 750\,N$ y $T = 1100\,N$
(b) $F = 208,33\,N$ y $T = 305,52\,N$
(c) $F = 1100\,N$ y $T = 750\,N$
(d) $F = 305,56\,N$ y $T = 208,33\,N$
(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta: (d)

VARIACIONES:
Forma 2: $M_{motor} = 800\,Kg$, $M_{vagon} = 600$, $(v_x)_2 = 50Km/h$

(a) $F = 451,39\,N$ y $T = 312,5\,N$

(b) $F = 312,5\,N$ y $T = 451,39\,N$

(c) $F = 1444,44\,N$ y $T = 1000\,N$

(d) $F = 1000\,N$ y $T = 1444,44\,N$

(e) Ninguna de las anteriores

Forma 3: $M_{motor} = 900\,Kg$, $M_{vagon} = 700$, $(v_x)_2 = 60Km/h$

(a) $F = 625\,N$ y $T = 437,50\,N$

(b) $F = 437,50\,N$ y $T = 625\,N$

(c) $F = 2250\,N$ y $T = 1575\,N$

(d) $F = 1575\,N$ y $T = 2250\,N$

(e) Ninguna de las anteriores

La velocidad es:

$$(v_x)_2 = v(1000/3600)m/s$$

Para el tren completo, se tiene que:

$$m(v_x)_1 + \sum \int F_x dt = m(v_x)_2$$

$$0 + F(80) = (M_{motor} + 3 * M_{vagon})(v_x)_2$$

Entonces,

$$F = \frac{(M_{motor} + 3 * M_{vagon})(v_x)_2}{80}$$

Para los tres vagones,

$$m(v_x)_1 + \sum \int F_x dt = m(v_x)_2$$

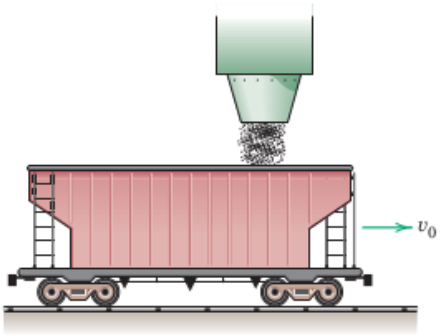
$$0 + T(80) = 3 * M_{vagon}(v_x)_2$$

Entonces,

$$T = \frac{3 * M_{vagon}(v_x)_2}{80}$$

■

17. Un carro de minería de masa $m_0 = 15$ ton se mueve libremente (sin estar sujeto a fuerzas) con velocidad inicial $v_0 = 1{,}2$ m/s cuando se le empieza a descargar carbón dentro de él. El carbón cae verticalmente a la tasa de 3 ton/s. Determine la distancia x recorrida por el carro en el tiempo en que 21 ton de carbón son depositados en él. Desprecie cualquier fricción a lo largo del trayecto horizontal.



(a) $x = 5{,}25$m
(b) $x = 5{,}49$m
(c) $x = 3{,}53$m
(d) $x = 6{,}18$m
(e) ninguna de las anteriores

Respuesta correcta: (a)

La velocidad horizontal del carbón es cero, por tanto su velocidad relativa respecto al carro es $u = v(t)$. La ecuación del movimiento es entonces, siendo que también no actúan fuerzas externas y que $m(t) = (m_0 + \dot{m}t)$

$$m\dot{v} + \dot{m}v = 0 \longrightarrow (m_0 + \dot{m}t)\dot{v} + \dot{m}v = 0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\dot{m}}{m_0 + \dot{m}t}v$$

Esta ecuación diferencial se resuelve por separación de variables

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{\dot{m}}{m_0 + \dot{m}t}\mathrm{d}t \longrightarrow \ln v\Big|_{v_0}^{v} = -\ln(m_0 + \dot{m}t)\Big|_0^t \longrightarrow \ln\frac{v}{v_0} = \ln\frac{m_0}{m_0 + \dot{m}t}$$

de la cual se obtiene $v(t) = \frac{v_0 m_0}{m_0 + \dot{m}t}$, que puede ser integrada otra vez para obtener la posición en función del tiempo

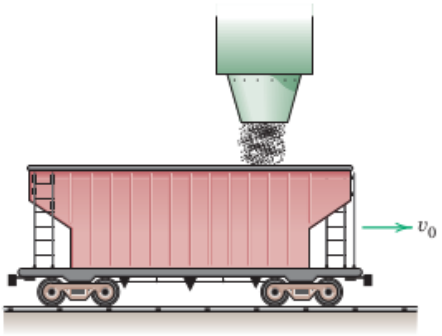
$$x(t) = \int_0^x v(t)\mathrm{d}t = v_0 m_0 \int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{m_0 + \dot{m}t} = \frac{v_0 m_0}{\dot{m}}\ln(m_0 + \dot{m}t)\Big|_0^t \longrightarrow x(t) = \frac{v_0 m_0}{\dot{m}}\ln\frac{m_0 + \dot{m}t}{m_0}$$

Por otro lado, el tiempo en cuestión es:

$$t = \frac{21}{\dot{m}} = 7\ s$$

Y entonces, la distancia recorrida es de $x = 5{,}25\ m$. ■

18. Un carro de minería de masa $m_0 = 20\text{ton}$ se mueve libremente (sin estar sujeto a fuerzas) con velocidad inicial $v_0 = 1{,}2\text{m/s}$ cuando se le empieza a descargar carbón dentro de él. El carbón cae verticalmente a la tasa de 4ton/s. Determine la distancia x recorrida por el carro en el tiempo en que 16 ton de carbón son depositados en él. Desprecie cualquier fricción a lo largo del trayecto horizontal.



(a) $x = 5{,}25\text{m}$
(b) $x = 3{,}53\text{m}$
(c) $x = 6{,}18\text{m}$
(d) $x = 4{,}41.\text{m}$
(e) ninguna de las anteriores

Respuesta correcta: (b)

La velocidad horizontal del carbón es cero, por tanto su velocidad relativa respecto al carro es $u = v(t)$. La ecuación del movimiento es entonces, siendo que también no actúan fuerzas externas y que $m(t) = (m_0 + \dot{m}t)$

$$m\dot{v} + \dot{m}v = 0 \longrightarrow (m_0 + \dot{m}t)\dot{v} + \dot{m}v = 0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\dot{m}}{m_0 + \dot{m}t}v$$

Esta ecuación diferencial se resuelve por separación de variables

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{\dot{m}}{m_0 + \dot{m}t}\mathrm{d}t \longrightarrow \ln v\Big|_{v_0}^{v} = -\ln(m_0 + \dot{m}t)\Big|_0^t \longrightarrow \ln\frac{v}{v_0} = \ln\frac{m_0}{m_0 + \dot{m}t}$$

de la cual se obtiene $v(t) = \frac{v_0 m_0}{m_0 + \dot{m}t}$, que puede ser integrada otra vez para obtener la posición en función del tiempo

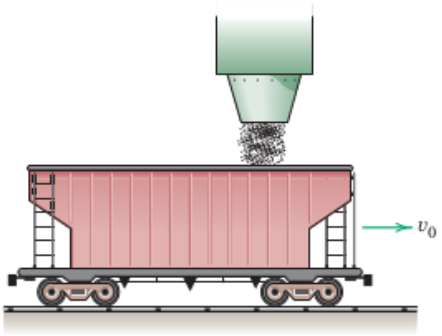
$$x(t) = \int_0^x v(t)\mathrm{d}t = v_0 m_0 \int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{m_0 + \dot{m}t} = \frac{v_0 m_0}{\dot{m}}\ln(m_0 + \dot{m}t)\Big|_0^t \longrightarrow \frac{v_0 m_0}{\dot{m}}\ln\frac{m_0 + \dot{m}t}{m_0}$$

Por otro lado, el tiempo en cuestión es:

$$t = \frac{16}{\dot{m}} = 4\ s$$

Y entonces, la distancia recorrida es de $x = 3{,}53\ m$. ■

19. Un carro de minería de masa $m_0 = 30\text{ton}$ se mueve libremente (sin estar sujeto a fuerzas) con velocidad inicial $v_0 = 1{,}2\text{m/s}$ cuando se le empieza a descargar carbón dentro de él. El carbón cae verticalmente a la tasa de 5ton/s. Determine la distancia x recorrida por el carro en el tiempo en que 20 ton de carbón son depositados en él. Desprecie cualquier fricción a lo largo del trayecto horizontal.



(a) $x = 4{,}41\text{.m}$
(b) $x = 3{,}53\text{m}$
(c) $x = 3{,}68\text{m}$
(d) $x = 6{,}18\text{m}$
(e) ninguna de las anteriores

Respuesta correcta: (c)

La velocidad horizontal del carbón es cero, por tanto su velocidad relativa respecto al carro es $u = v(t)$. La ecuación del movimiento es entonces, siendo que también no actúan fuerzas externas y que $m(t) = (m_0 + \dot{m}t)$

$$m\dot{v} + \dot{m}v = 0 \longrightarrow (m_0 + \dot{m}t)\dot{v} + \dot{m}v = 0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{\dot{m}}{m_0 + \dot{m}t}v$$

Esta ecuación diferencial se resuelve por separación de variables

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{\dot{m}}{m_0 + \dot{m}t}\mathrm{d}t \longrightarrow \ln v\Big|_{v_0}^{v} = -\ln(m_0 + \dot{m}t)\Big|_0^t \longrightarrow \ln\frac{v}{v_0} = \ln\frac{m_0}{m_0 + \dot{m}t}$$

de la cual se obtiene $v(t) = \frac{v_0 m_0}{m_0 + \dot{m}t}$, que puede ser integrada otra vez para obtener la posición en función del tiempo

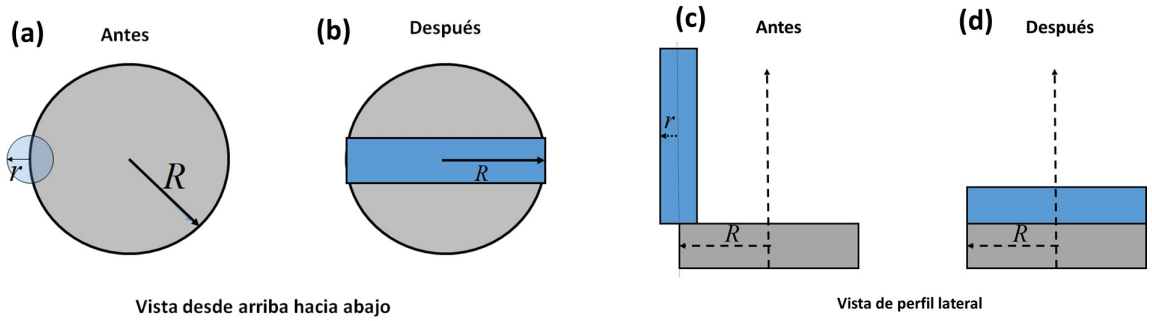
$$x(t) = \int_0^x v(t)\mathrm{d}t = v_0 m_0 \int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{m_0 + \dot{m}t} = \frac{v_0 m_0}{\dot{m}}\ln(m_0 + \dot{m}t)\Big|_0^t \longrightarrow \frac{v_0 m_0}{\dot{m}}\ln\frac{m_0 + \dot{m}t}{m_0}$$

Por otro lado, el tiempo en cuestión es:

$$t = \frac{20}{\dot{m}} = 4\ s$$

Y entonces, la distancia recorrida es de $x = 3{,}68\ m$. ■

20. Una varilla cilíndrica de radio $r = 1\ cm$ y masa 3 kg inicialmente está en posición vertical de tal forma que su eje central pasa exactamente sobre el borde de un disco giratorio horizontal de masa 4 kg y radio $R = 50\ cm$. La velocidad angular inicial del sistema es de 15 rad/s, girando en torno al centro del disco. En algún instante dado la varilla resbala y cae quedando tirada a lo largo del diámetro del disco. La longitud de la varilla es igual al diámetro del disco. Las figuras (a) y (b) muestran el sistema visto desde arriba hacia abajo. Por otro lado, las figuras (c) y (d) muestran el perfil lateral del sistema. Las figuras (a) y (c) corresponden a la situación inicial y las figuras (b) y (d) corresponden a la situación final donde la varilla esta tirada a lo largo del diámetro del disco. Considerando esto, ¿cuál es la velocidad angular final del sistema, luego de que la varilla cae?



(a) $\omega_{final} \simeq 25\text{rad/s}$
(b) $\omega_{final} \simeq 20\text{rad/s}$
(c) $\omega_{final} \simeq 40\text{rad/s}$
(d) $\omega_{final} \simeq 30\text{rad/s}$
(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta:

Supongase que M es la masa del disco y m es la masa de la barra. El momento de inercia del disco es $I_D = \frac{1}{2}MR^2$ donde R es el radio del disco. Por otro lado la varilla es un cilindro con radio r. Inicialmente el eje principal de la varilla esta desplazada una distancia R con respecto al centro de giro del sistema. Por tanto, para calcular el momento de inercia es necesario usar el teorema de Stainer, esto es:

$$I_v = I_0 + mR^2,$$

donde $I_0 = \frac{1}{2}mr^2$ es el momento de inercia del cilíndro girando sobre su propio eje de simetría. El momento angular inicial del sistema es:

$$L_{inic} = \left(\frac{1}{2}mr^2 + mR^2 + \frac{1}{2}MR^2\right)\omega_{inic}.$$

Después de que la varilla cae, esta queda rotando de tal forma que su centro de giro queda localizado sobre el centro de masa de la varilla. Por tanto, el momento de inercia de la varilla toma la forma

$$I_v' = \frac{1}{12}m(2R)^2$$

. Entonces el momentum angular final toma la forma

$$L_{fin} = \left(\frac{1}{12}m(2R)^2 + \frac{1}{2}MR^2\right)\omega_{fin}.$$

Por conservación del momentum angular se obtiene que

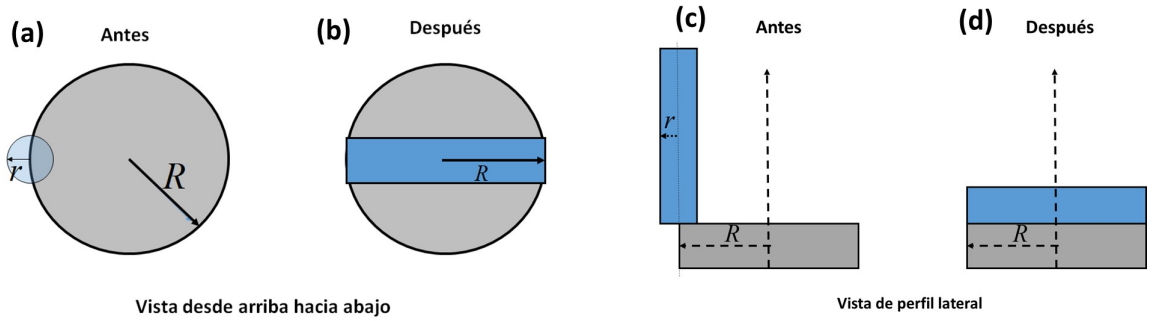
$$\left(\frac{1}{2}mr^2 + mR^2 + \frac{1}{2}MR^2\right)\omega_{inic} = \left(\frac{1}{12}m(2R)^2 + \frac{1}{2}MR^2\right)\omega_{fin}.$$

Despejando la frecuencia angular final se obtiene

$$\omega_{fin} = \frac{\left(\frac{1}{2}mr^2 + mR^2 + \frac{1}{2}MR^2\right)}{\left(\frac{1}{12}m(2R)^2 + \frac{1}{2}MR^2\right)}\omega_{inic}$$

■

21. Una varilla cilíndrica de radio $r = 2$ cm y masa 3 kg inicialmente está en posición vertical de tal forma que su eje central pasa exactamente sobre el borde de un disco giratorio horizontal de masa 10 kg y radio $R = 50$ cm. La velocidad angular inicial del sistema es de 15 rad/s. En algún instante dado la varilla resbala y cae quedando tirada a lo largo del diámetro del disco. La longitud de la varilla es igual al diámetro del disco. Las figuras (a) y (b) muestran el sistema visto desde arriba hacia abajo. Por otro lado, las figuras (c) y (d) muestran el perfil lateral del sistema. Las figuras (a) y (c) corresponden a la situación inicial y las figuras (b) y (d) corresponden a la situación final donde la varilla esta tirada a lo largo del diámetro del disco. Considerando esto, ¿cuál es la velocidad angular final del sistema, luego de que la varilla cae?



(a) $\omega_{final} \simeq 25$rad/s
(b) $\omega_{final} \simeq 40$rad/s
(c) $\omega_{final} \simeq 20$rad/s
(d) $\omega_{final} \simeq 30$rad/s
(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta:

Supongase que M es la masa del disco y m es la masa de la barra. El momento de inercia del disco es $I_D = \frac{1}{2}MR^2$ donde R es el radio del disco. Por otro lado la varilla es un cilindro con radio r. Inicialmente el eje principal de la varilla esta desplazada una distancia R con respecto al centro de giro del sistema. Por tanto, para calcular el momento de inercia es necesario usar el teorema de Stainer, esto es:

$$I_v = I_0 + mR^2,$$

donde $I_0 = \frac{1}{2}mr^2$ es el momento de inercia del cilíndro girando sobre su propio eje de simetría. El momento angular inicial del sistema es:

$$L_{inic} = \left(\frac{1}{2}mr^2 + mR^2 + \frac{1}{2}MR^2\right)\omega_{inic}.$$

Después de que la varilla cae, esta queda rotando de tal forma que su centro de giro queda localizado sobre el centro de masa de la varilla. Por tanto, el momento de inercia de la varilla toma la forma

$$I_v' = \frac{1}{12}m(2R)^2$$

. Entonces el momentum angular final toma la forma

$$L_{fin} = \left(\frac{1}{12}m(2R)^2 + \frac{1}{2}MR^2\right)\omega_{fin}.$$

Por conservación del momentum angular se obtiene que

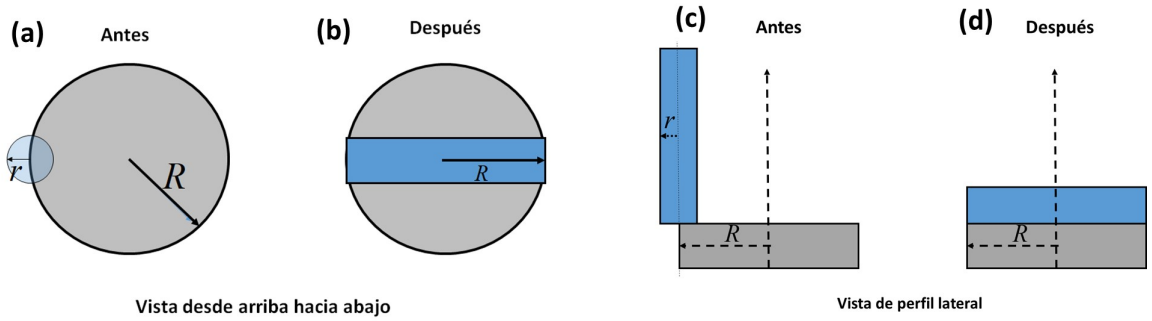
$$\left(\frac{1}{2}mr^2 + mR^2 + \frac{1}{2}MR^2\right)\omega_{inic} = \left(\frac{1}{12}m(2R)^2 + \frac{1}{2}MR^2\right)\omega_{fin}.$$

Despejando la frecuencia angular final se obtiene

$$\omega_{fin} = \frac{\left(\frac{1}{2}mr^2 + mR^2 + \frac{1}{2}MR^2\right)}{\left(\frac{1}{12}m(2R)^2 + \frac{1}{2}MR^2\right)}\omega_{inic}$$

■

22. Una varilla cilíndrica de radio $r = 2$ cm y masa 6 kg inicialmente está en posición vertical de tal forma que su eje central pasa exactamente sobre el borde de un disco giratorio horizontal de masa 4 kg y radio $R = 1\ m$. La velocidad angular inicial del sistema es de 15 rad/s. En algún instante dado la varilla resbala y cae quedando tirada a lo largo del diámetro del disco. La longitud de la varilla es igual al diámetro del disco. Las figuras (a) y (b) muestran el sistema visto desde arriba hacia abajo. Por otro lado, las figuras (c) y (d) muestran el perfil lateral del sistema. Las figuras (a) y (c) corresponden a la situación inicial y las figuras (b) y (d) corresponden a la situación final donde la varilla esta tirada a lo largo del diámetro del disco. Considerando esto, ¿cuál es la velocidad angular final del sistema, luego de que la varilla cae?



(a) $\omega_{final} \simeq 20$rad/s
(b) $\omega_{final} \simeq 25$rad/s
(c) $\omega_{final} \simeq 40$rad/s
(d) $\omega_{final} \simeq 30$rad/s
(e) Ninguna de las anteriores

Respuesta correcta:

Supongase que M es la masa del disco y m es la masa de la barra. El momento de inercia del disco es $I_D = \frac{1}{2}MR^2$ donde R es el radio del disco. Por otro lado la varilla es un cilindro con radio r. Inicialmente el eje principal de la varilla esta desplazada una distancia R con respecto al centro de giro del sistema. Por tanto, para calcular el momento de inercia es necesario usar el teorema de Stainer, esto es:

$$I_v = I_0 + mR^2,$$

donde $I_0 = \frac{1}{2}mr^2$ es el momento de inercia del cilíndro girando sobre su propio eje de simetría. El momento angular inicial del sistema es:

$$L_{inic} = \left(\frac{1}{2}mr^2 + mR^2 + \frac{1}{2}MR^2\right)\omega_{inic}.$$

Después de que la varilla cae, esta queda rotando de tal forma que su centro de giro queda localizado sobre el centro de masa de la varilla. Por tanto, el momento de inercia de la varilla toma la forma

$$I_v' = \frac{1}{12}m(2R)^2$$

. Entonces el momentum angular final toma la forma

$$L_{fin} = \left(\frac{1}{12}m(2R)^2 + \frac{1}{2}MR^2\right)\omega_{fin}.$$

Por conservación del momentum angular se obtiene que

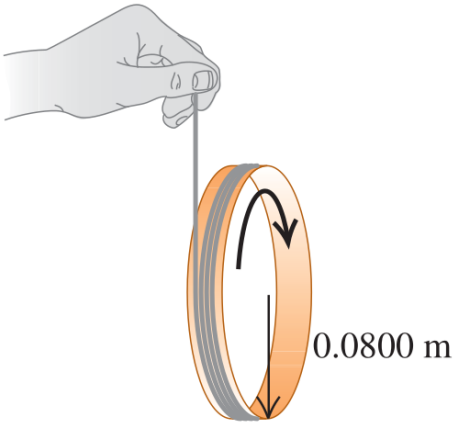
$$\left(\frac{1}{2}mr^2 + mR^2 + \frac{1}{2}MR^2\right)\omega_{inic} = \left(\frac{1}{12}m(2R)^2 + \frac{1}{2}MR^2\right)\omega_{fin}.$$

Despejando la frecuencia angular final se obtiene

$$\omega_{fin} = \frac{\left(\frac{1}{2}mr^2 + mR^2 + \frac{1}{2}MR^2\right)}{\left(\frac{1}{12}m(2R)^2 + \frac{1}{2}MR^2\right)}\omega_{inic}$$

■

23. Se enrolla un cordel varias veces en el borde de un aro pequeño de 8.00 cm de radio y masa de 0.180 kg. El extremo libre del cordel se sostiene fijo y el aro se suelta del reposo. Después de que el aro ha descendido 75.0 cm, calcule la tensión del cordel (considere $g = 9{,}8 m/s^2$):



(a) 1.764 N
(b) 0.882 N
(c) 1.544 N
(d) 0.772 N
(e) 0.386 N

Respuesta correcta: (b)

Sea T la tensión del cordel:

$$T = ma$$

con:

$$mg - F = ma$$

La relación entre el torque (τ), radio (r) y fuerza (F) esta dada por ($I_{anillo} = mr^2$):

$$\begin{aligned} F &= \frac{\tau}{r} \\ &= \frac{I\alpha}{r} \\ &= mr\alpha \end{aligned}$$

La relación entre la aceleración lineal y angular es:

$$a = r\alpha$$

Reemplazando en la ecuación anterior:

$$F = ma$$

Entonces de la ecuación inicial:

$$\begin{aligned} ma &= mg - ma \\ 2ma &= mg \\ a &= \frac{g}{2} \end{aligned}$$

Por lo que la tensión quedaría como:

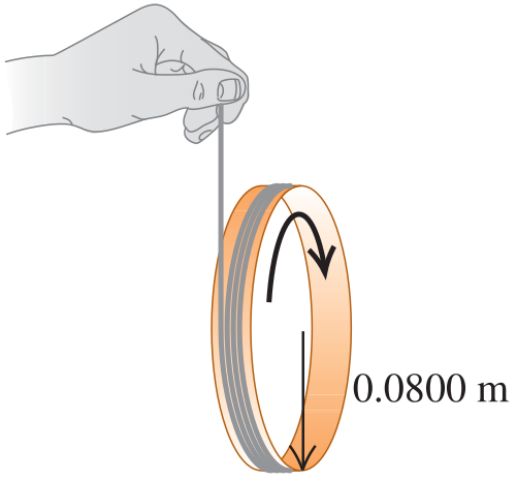
$$\begin{aligned} T &= ma \\ &= \frac{1}{2}mg \end{aligned}$$

Al substituir los valores iniciales ($m = 0{,}180$ kg, $g = 9{,}8m/s^2$):

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(0{,}180kg)(9{,}8m/s^2) \\ &= 0{,}882N \end{aligned}$$

■

24. Se enrolla un cordel varias veces en el borde de un aro pequeño de 8.00 cm de radio y masa de 0.180 kg. El extremo libre del cordel se sostiene fijo y el aro se suelta del reposo. Después de que el aro ha descendido 75.0 cm, calcule el tiempo transcurrido en este descenso (considere $g = 9{,}8 m/s^2$).



(a) 0.553 s
(b) 0.391 s
(c) 0.276 s
(d) 0.782 s
(e) 1.106 s

Respuesta correcta: (a)

Sea T la tensión del cordel:

$$T = ma$$

con:

$$mg - F = ma$$

La relación entre el torque (τ), radio (r) y fuerza (F) esta dada por ($I_{anillo} = mr^2$):

$$\begin{aligned} F &= \frac{\tau}{r} \\ &= \frac{I\alpha}{r} \\ &= mr\alpha \end{aligned}$$

La relación entre la aceleración lineal y angular es:

$$a = r\alpha$$

Reemplazando en la ecuación anterior:

$$F = ma$$

Entonces de la ecuación inicial:

$$\begin{aligned} ma &= mg - ma \\ 2ma &= mg \\ a &= \frac{g}{2} \end{aligned}$$

De la ecuación de movimiento:

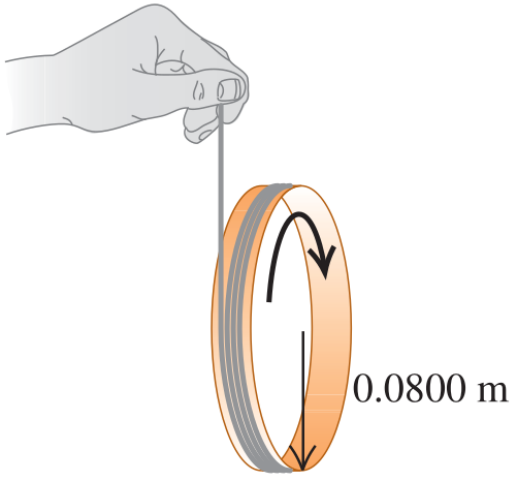
$$\begin{aligned} h &= v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ &= \frac{1}{2}at^2 \\ t &= \sqrt{\frac{2h}{a}} \end{aligned}$$

Substituyendo los valores del problema ($a = \frac{g}{2}$, $h = 75{,}0$ cm):

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{2(0{,}750m)}{(4{,}9m/s^2)}} \\ &= 0{,}553s \end{aligned}$$

■

25. Se enrolla un cordel varias veces en el borde de un aro pequeño de 8.00 cm de radio y masa de 0.180 kg. El extremo libre del cordel se sostiene fijo y el aro se suelta del reposo. Después de que el aro ha descendido 75.0 cm,, calcule la aceleración angular del sistema (considere $g = 9{,}8 m/s^2$).



(a) 61.25 rad/s^2
(b) 9.8 rad/s^2
(c) 12.25 rad/s^2
(d) 4.9 rad/s^2
(e) 1.794 rad/s^2

Respuesta correcta: (a)

Sea T la tensión del cordel:

$$T = ma$$

con:

$$mg - F = ma$$

La relación entre el torque (τ), radio (r) y fuerza (F) esta dada por ($I_{anillo} = mr^2$):

$$\begin{aligned} F &= \frac{\tau}{r} \\ &= \frac{I\alpha}{r} \\ &= mr\alpha \end{aligned}$$

La relación entre la aceleración lineal y angular es:

$$a = r\alpha$$

Reemplazando en la ecuación anterior:

$$F = ma$$

Entonces de la ecuación inicial:

$$\begin{aligned} ma &= mg - ma \\ 2ma &= mg \\ a &= \frac{g}{2} \end{aligned}$$

Volviendo a dejar todo el función de la aceleración angular:

$$\alpha = \frac{g}{2r}$$

Al substituir los valores iniciales ($r = 0{,}0800$ m, $g = 9{,}8 m/s^2$)

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{(9{,}8 m/s^2)}{2(0{,}0800 m)} \\ &= 61{,}25 rad/s^2 \end{aligned}$$

■