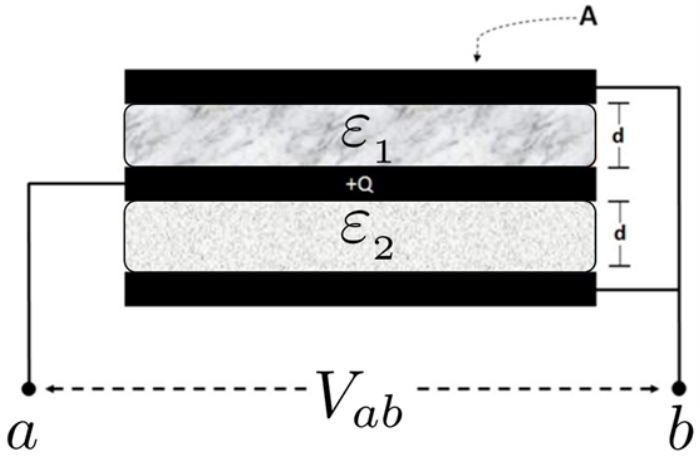
Examen

Fecha: 05 de diciembre de 2025

1. **Problema**

Tres placas conductoras paralelas de área **A** muy grande, se colocan separadas una distancia **d** y de manera consecutiva, tal como se muestra en la figura. El espacio entre las placas esta lleno con materiales dieléctricos de permitividad ε_1 y ε_2, como se muestra en la figura. Las placas externas están conectadas eléctricamente por medio de un cable conductor que tiene un extremo denotado con la letra **b**. La placa central está conectada a un cable conductor eléctrico de extremo **a**. Las placas están cargadas de tal forma que la carga de la placa central es $+Q$ y los extremos **a** y **b** tienen una diferencia de potencial V_{ab}, ambas conocidas. Se pueden ignorar los efectos de los bordes.



a) (2 pto.) Calcular la capacitancia total, C_T, entre los extremos **a** y **b** en términos de los parámetros mostrados en la figura ($A, \varepsilon_1, \varepsilon_2, d, V_{ab}$.).

b) (2 pto.) Calcular la densidad de carga libre, σ_1, en la superficie de contacto entre la placa conductora central y el material dieléctrico con permitividad ε_1 (En este punto puede considerar conocida C_T).

c) (2 pto.) Calcular la densidad de carga ligada, σ_b, en la superficie de contacto entre la placa conductora central y el material dieléctrico con permitividad ε_1 (En este punto puede considerar conocida C_T y/o σ_1).

a) capacitancia total, C_T

La placa central forma dos condensadores con el conductor exterior: uno a la izquierda (capacitancia C_1) y otro a la derecha (capacitancia C_2). Como ambos conectan la misma placa central con el mismo conductor exterior, estos dos condensadores están en paralelo; por tanto

$$C_1 = \frac{\varepsilon_1 A}{d} \quad \boxed{0{,}5pts}, \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_2 A}{d} \quad \boxed{0{,}5pts},$$

y

$$C_{\text{total}} = C_1 + C_2 \quad \boxed{0{,}5pts}$$

es decir

$$C_{\text{total}} = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)A}{d} \quad \boxed{0{,}5pts}$$

■

b) Calcular la densidad de carga libre, σ_1

La carga Q del conductor central se reparte entre las dos caras (izquierda y derecha) proporcionalmente a las capacitancias. la capacitancia para el material ε_1 es

$$Q_1 = C_1 V_{ab} \quad \boxed{0{,}5pts}$$

donde

$$V_{ab} = \frac{Q}{C_{\text{total}}} \quad \boxed{0{,}5pts}$$

por tanto

$$Q_1 = \frac{C_1}{C_{\text{total}}} Q$$

La densidad de carga libre σ_1 por definición toma la forma

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{A} \quad \boxed{0{,}5pts}$$

es decir

$$\sigma_1 = \frac{C_1}{C_{\text{total}}} \frac{Q}{A} \quad \boxed{0{,}5pts}$$

Si se sustituyen las expresiones de C_{total} y C_1, se obtiene

$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{Q}{A}$$

■

c) Calcular la densidad de carga ligada, σ_b para el material ε_1

La densidad superficial de carga ligada para el material ε_1 esta dada por la expresión

$$\sigma_{b_1} = \vec{P}_1 \cdot \hat{n}. \quad \boxed{0{,}5pts}$$

La polarización eléctrica para el material ε_1 está definida por

$$\vec{P}_1 = \varepsilon_0(\varepsilon_{r_1} - 1)\vec{E}_1, \quad \boxed{0{,}5pts}$$

con $\varepsilon_{r_1} = \varepsilon_1/\varepsilon_0$. En la interfaz dieléctrico-conductor, donde el conductor está cargado positivamente, el vector unitario $\hat{n}$ apunta en el sentido contrario al del campo eléctrico, es decir

$$\vec{E}_1 \cdot \hat{n} = -E_1.$$

Por tanto

$$\sigma_{b_1} = \varepsilon_0(\varepsilon_{r_1} - 1)\vec{E}_1 \cdot \hat{n}$$

es decir

$$\sigma_{b_1} = -\varepsilon_0(\varepsilon_{r_1} - 1)E_1$$

El campo entre la placa central y cada placa exterior es uniforme (planas y grandes). La magnitud es la misma en ambas regiones y viene dada por la expresión

$$E_1 = E_2 = \frac{V_{ab}}{d} \quad \boxed{0{,}5pts}$$

Sustituyendo esta expresión del campo se obtiene

$$\sigma_{b_1} = -\varepsilon_0(\varepsilon_{r_1} - 1)\frac{V_{ab}}{d} \quad \boxed{0{,}5pts}$$

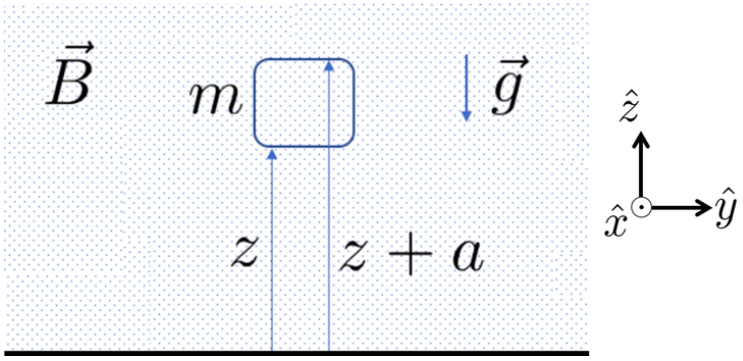
En términos de C_{total} puede quedar dada como

$$\sigma_{b_1} = -\varepsilon_0(\varepsilon_{r_1} - 1)\frac{Q}{d\,C_{\text{total}}}$$

■

2. **Problema**

Considere una espira cuadrada de lado a y masa m en el plano yz, colocada en un campo magnético $\vec{B} = (B_0 - \alpha z)\,\hat{x}$, con $\alpha > 0$. Considere que la espira, de resistencia R y autoinducción despreciable, cae en la dirección vertical debido a la gravedad.



a) (1 pto.) Determine el flujo magnético a través de la espira.

b) (2 pto.) Encuentre la fuerza electromotriz y la corriente inducida en función de la velocidad v de la espira

c) (1 pto.) Indique el sentido de la corriente inducida y justifique su respuesta según la ley de Lenz.

d) (1 pto.) Determine la fuerza que experimenta la espira.

e) (1 pto.) ¿Cuál es la velocidad terminal de la espira?

Solución:

a) Empezamos calculando el flujo magnético a través de la espira. Para esto consideramos que el vector área será $d\vec{A} = dydz\,\hat{x}$, luego:

$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\Phi_B = \int_{y=0}^{a} \int_{z=z}^{z+a} (B_0 - \alpha z) dydz = \int_{y=0}^{a} dy \int_{z=z}^{z+a} (B_0 - \alpha z) dz \qquad (0.5 \text{ pts.})$$

$$\Phi_B = a \left[B_0 z - \frac{\alpha z^2}{2} \right]_z^{z+a}$$

$$\Phi_B = a^2 B_0 - \frac{\alpha a^2 (2z + a)}{2} \qquad (0.5 \text{ pts.})$$

■

b) Para calcular la fuerza electromotriz inducida, consideremos la Ley de Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(a^2 B_0 - \frac{\alpha a^2 (2z + a)}{2} \right) \qquad (0.25 \text{ pts.})$$

$$\varepsilon = +\alpha a^2 \frac{dz}{dt} \qquad (0.25 \text{ pts.})$$

$$\varepsilon = +\alpha a^2 v \qquad (0.5 \text{ pts.})$$

$$\varepsilon = -\alpha a^2 |v|$$

Note que la velocidad con la que cae es negativa, por lo que la fem inducida también lo es (0.5 pts.). Luego, la corriente inducida será

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{\alpha a^2 |v|}{R}\,. \qquad (0.5 \text{ pts.})$$

■

c) Si la espira cae, el flujo aumenta, pues el campo magnético es inversamente proporcional a la altura, mientras menor sea z, mayor será el campo (0.5 pts.). Luego, la corriente inducida debe generar un campo que se oponga a este aumento. Con esto, la corriente debe tener el sentido horario (0.5 pts.). ■

d) Ya que tenemos un conductor con corriente inmerso en un campo magnético, podemos calcular la fuerza sobre cada uno de los segmentos de la espira usando

$$\vec{F} = I \int d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

Para los segmentos verticales de la izquierda $\vec{F}_1$ y la derecha $\vec{F}_2$, tenemos

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= I \int d\vec{\ell}_1 \times \vec{B} = I \int_z^{z+a} dz\hat{z} \times (B_0 - \alpha z)\hat{x} \\
\vec{F}_1 &= I \int_z^{z+a} dz (B_0 - \alpha z)\, \hat{y} = I \left[B_0 z - \alpha \frac{z^2}{2} \right] \Big|_z^{z+a} \hat{y} \\
\vec{F}_1 &= I \left[B_0 a - \frac{\alpha}{2} \left((z+a)^2 - z^2 \right) \right] \hat{y}
\end{aligned}$$ (0.2 pts.)

Mientras que

$$\begin{aligned}
\vec{F}_2 &= I \int d\vec{\ell}_2 \times \vec{B} = I \int_{z+a}^{z} dz\hat{z} \times (B_0 - \alpha z)\hat{x} \\
\vec{F}_2 &= -I \int_z^{z+a} dz (B_0 - \alpha z)\, \hat{y} = -I \left[B_0 z - \alpha \frac{z^2}{2} \right] \Big|_z^{z+a} \hat{y} \\
\vec{F}_2 &= -I \left[B_0 a - \frac{\alpha}{2} \left((z+a)^2 - z^2 \right) \right] \hat{y}
\end{aligned}$$ (0.2 pts.)

Por tanto, $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ (alternativamente usando argumentos de simetría 0.4 pts.). Por otra parte, los segmentos horizontales superior $\vec{F}_3$ e inferior $\vec{F}_4$, se encuentran a una altura fija, por lo que el campo no cambia a lo largo del camino, así

$$\begin{aligned}
\vec{F}_3 &= I\vec{L}_3 \times \vec{B} = IL\hat{y} \times [B_0 - \alpha(z+a)]\, \hat{x} \\
\vec{F}_3 &= -IL\, [B_0 - \alpha(z+a)]\, \hat{z}
\end{aligned}$$ (0.2 pts.)

Y para el segmento horizontal inferior,

$$\begin{aligned}
\vec{F}_4 &= I\vec{L}_4 \times \vec{B} = -IL\hat{y} \times [B_0 - \alpha z]\, \hat{x} \\
\vec{F}_4 &= IL\, (B_0 - \alpha z)\, \hat{z}
\end{aligned}$$ (0.2 pts.)

Luego, la fuerza magnética sobre la espira, será

$$\vec{F}_B = \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = -IL\, [B_0 - \alpha(z+a)]\, \hat{z} + IL\, (B_0 - \alpha z)\, \hat{z}$$ (0.1 pts.)

Así

$$\vec{F}_B = IL\alpha a\hat{z} = \frac{\alpha^2 a^3 |v| L}{R} \hat{z}$$

Por último, la fuerza total sobre la espira, incluyendo la gravedad, será

$$\vec{F}_B = \left(\frac{\alpha^2 a^3 |v| L}{R} - mg \right) \hat{z}$$ (0.1 pts.)

■

d) La velocidad terminal se alcanza una vez que la espira deja de acelerar mientras cae, por tanto $\vec{F} = 0$ (0.3 pts.), así

$$0 = \frac{\alpha^2 a^3 |v_{\text{term}}| L}{R} - mg$$ (0.5 pts.)

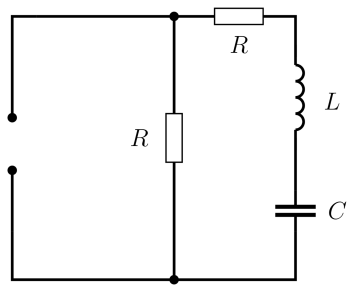
Despejando tenemos

$$|v_{\text{term}}| = \frac{mgR}{\alpha^2 a^3 L}$$ (0.2 pts.)

■

3. **Problema**

Dado el circuito RLC en la figura



1. (2 pto.) ¿Cuál es la impedancia entre los terminales de conexión?
2. (2 pto.) Se aplica el voltaje alterno $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$ a los terminales de conexión. Calcule la amplitud de oscilación de la corriente alterna $I(t)$ que entra al circuito.
3. (2 pto.) ¿Cuál es la potencia que se disipa en el circuito durante un período de oscilación del voltaje alterno cuando la frecuencia angular del voltaje es $\omega = 1/(LC)$?

Solución:

1. Resistencia R, inductancia L y capacitancia C en serie tienen la impedancia

$$R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i\omega L\left[1 - \left(\frac{\omega_{LC}}{\omega}\right)^2\right]$$

donde $\omega_{LC} = 1/\sqrt{LC}$ es la frecuencia angular caracteristica del circuito LC.
Con la resistencia R en paralelo, la impedancia total resulta como:

$$\begin{aligned} Z &= \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R + i\omega L\left[1 - \left(\frac{\omega_{LC}}{\omega}\right)^2\right]}\right)^{-1} \\ &= R\,\frac{R + i\omega L\left[1 - \left(\frac{\omega_{LC}}{\omega}\right)^2\right]}{2R + i\omega L\left[1 - \left(\frac{\omega_{LC}}{\omega}\right)^2\right]} \qquad \text{(2 pto.)} \end{aligned}$$

■

2. Amplitudes complejas de voltaje $\tilde{U}_0$ y corriente $\tilde{I}_0$:

$$\begin{aligned} U(t) &= U_0\cos(\omega t) = \Re\left(\underbrace{U_0}_{=\tilde{U}_0}\, e^{i\omega t}\right) \\ I(t) &= I_0\cos(\omega t + \varphi) = \Re\left(\underbrace{I_0 e^{i\varphi}}_{=\tilde{I}_0}\, e^{i\omega t}\right) \end{aligned}$$

■

¨Ley de Ohm¨ para amplitudes complejas

$$\tilde{U}_0 = Z\,\tilde{I}_0$$

por lo tanto la amplitud es:

$$\begin{aligned} I_0 &= \left| \frac{U_0}{R}\, \frac{2R + i\omega L\left[1-\left(\frac{\omega_{LC}}{\omega}\right)^2\right]}{R + i\omega L\left[1-\left(\frac{\omega_{LC}}{\omega}\right)^2\right]} \right| \\ &= \frac{U_0}{R}\sqrt{\frac{(2R)^2 + (\omega L)^2\left[1-\left(\frac{\omega_{LC}}{\omega}\right)^2\right]^2}{R^2 + (\omega L)^2\left[1-\left(\frac{\omega_{LC}}{\omega}\right)^2\right]^2}} \end{aligned} \qquad \text{(2 pto.)}$$

3. Suponiendo correcta definición de frecuencia de resonancia $\omega_{LC} = 1/\sqrt{LC}$.
Sin cálculo: En resonancia voltajes de la capacitancia y de la inductancia de compensan (sin desfase), entonces es como un circuito con dos resistencias en paralelo:

$$\overline{P} = \frac{U_0 I_0}{2}\cos\varphi = \frac{U_0^2}{R}$$

para $\omega = \omega_{LC}$ la fase es $\varphi = 0$ y la amplitud es $I_0 = \frac{2U_0}{R}$ y resulta

$$\overline{P} = \frac{U_0 I_0}{2}\cos\varphi = \frac{U_0^2}{R} \qquad \text{(2 pto.)}$$

En otro caso, usando valor dado (pero incorrecto) $\omega = 1/(LC)$, aceptar cálculo que intenta calcular amplitud y fase de la corriente para obtener potencia promediada. ■