Examen

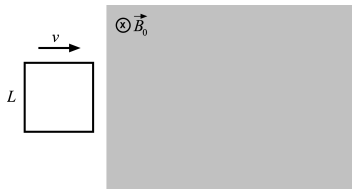
Fecha: 30 noviembre 2022

- **Nombre:** .....

- **RUT:** ..... **Sección:** .....

- Escriba su nombre, RUT, y sección de forma clara y legible en cada hoja.
- Debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
- Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
- La prueba consta de 12 preguntas de selección múltiple.
- Debe seleccionar solo una respuesta para cada pregunta. Para ello debe rellenar completamente el círculo de la respuesta seleccionada con lápiz pasta, de lo contrario su respuesta se considerará inválida. El desarrollo de las preguntas de selección múltiple no se considera en la corrección.
- Esta prueba tiene una duración de 150 minutos, incluyendo en este plazo el tiempo necesario para entregar su hoja de respuestas.
- El trabajo es individual y está absolutamente prohibida la colaboración o la copia.
- Se aceptan preguntas de enunciado solo dirigidas al profesor(a).

1. Una bobina cuadrada de lado L, N vueltas y resistencia total R, que se mueve con rapidez constante v, ingresa a una zona con un campo magnético constante $\vec{B}_0$. El campo está orientado perpendicularmente al área de la bobina y apunta hacia adentro de la página, tal como se muestra en la figura.



La magnitud de la fuerza magnética total sobre la bobina a medida que esta entra en la zona de campo magnético es:

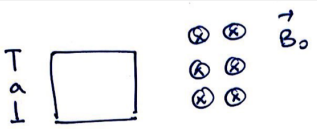
a) $\dfrac{N^2 B_0^2 L^2 v}{R}$

b) $\dfrac{4N^2 B_0^2 L^2 v}{R}$

c) $\dfrac{9N^2 B_0^2 L^2 v}{R}$

d) $\dfrac{16N^2 B_0^2 L^2 v}{R}$

P1)



Fuerza sobre el lado derecho de la bobina $F = NIaB_0$

Fuerzas sobre el lado superior e inferior de la bobina se anulan entre sí (apuntan en sentido contrario)

ley de Faraday $\mathcal{E} = N\dfrac{d\Phi}{dt} = NB_0 a \dfrac{dx}{dt} = NBav$

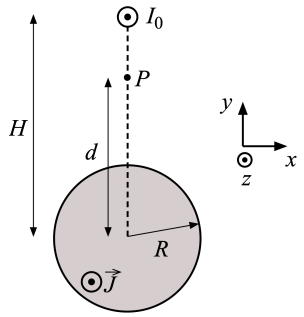
donde x es la distancia que la bobina ha entrado a la zona con $\vec{B}_0$

Pero $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R}$ entonces $I = \dfrac{NB_0 av}{R}$

por lo tanto $F = \dfrac{N^2 B_0^2 a^2 v}{R}$

■

2. Considere un sistema formado por un alambre con corriente constante I_0 que apunta en la dirección de $\hat{z}$ y un cilindro sólido de radio R que lleva una densidad de corriente $\vec{J} = \alpha r \hat{z}$, colocados como muestra la figura.



Determine la distancia d del punto P fuera del cilindro en donde el campo magnético total es cero.

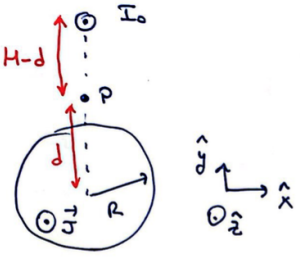
a) $d = \left(\dfrac{2\pi\alpha R^4}{2\pi\alpha R^4 + 4I_0}\right) H$

b) $d = \left(\dfrac{2\pi\alpha R^3}{2\pi\alpha R^3 + 3I_0}\right) H$

c) $d = \left(\dfrac{2\pi\alpha R^5}{2\pi\alpha R^5 + 5I_0}\right) H$

d) $d = \left(\dfrac{2\pi\alpha R^6}{2\pi\alpha R^6 + 6I_0}\right) H$

P2



El campo magnético total en B está dado por

$\vec{B} = \vec{B}_{alambre} + \vec{B}_{cilindro}$

donde

$\vec{B}_{alambre} = \dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi(H-d)}\hat{x}$

$\vec{J} = \alpha r^n \hat{z}$

$\vec{B}_{cilindro} = -\dfrac{\mu_0 I_{enc}}{2\pi d}\hat{x}$

con $I_{enc} = \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^R \alpha r^n \, r\,dr\,d\theta = \frac{2\pi\alpha}{n+2} R^{n+2}$

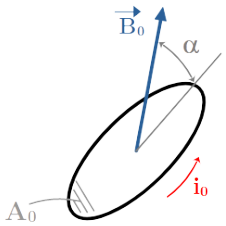
$\therefore \vec{B}_{cilindro} = -\dfrac{\mu_0 \alpha R^{n+2}}{(n+2)d}\hat{x}$

Entonces $\vec{B} = 0 \Rightarrow$

$\dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi(H-d)} - \dfrac{\mu_0 \alpha R^{n+2}}{(n+2)d} = 0$

$\therefore \boxed{d = \left[\dfrac{2\pi\alpha R^{n+2}}{2\pi\alpha R^{n+2} + (n+2)I_0}\right] H}$

3. Considera una espira circular de diámetro d por la cual circula una corriente i_0. La espira se encuentra sumergida en una región de campo magnético constante $\vec{B}_0$ el cual forma un ángulo α con el plano que contiene a la espira.
Si $\alpha = \pi/2$, el módulo del torque que experimenta la espira es:



a) 0

b) $\frac{\pi\sqrt{3}}{8}\, i_0 B_0 d^2$

c) $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\, i_0 B_0 d^2$

d) $\frac{\pi}{8}\, i_0 B_0 d^2$

PROBLEMA 3

$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = I_0 A \cdot B_0 \cos(\alpha)$

$\vec{\mu} \rightarrow IA$

$\operatorname{sen}(90-\alpha)$

$A = \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow \tau = \frac{\pi}{4} \cos(\alpha) \cdot I_0 B_0 d^2$

3. V1] $\alpha = \pi/2 \Rightarrow \tau = 0$ (a)

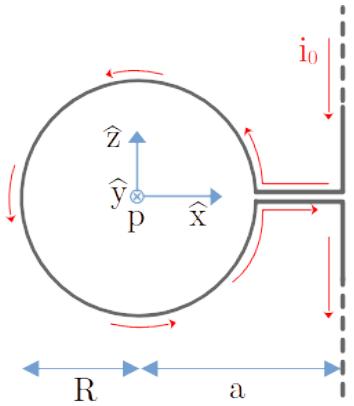
V2] $\alpha = \pi/4 \Rightarrow \tau = \frac{\pi}{\sqrt{2}\cdot 4} I_0 B d^2$ (c)

V3] $\alpha = \pi/3 \Rightarrow \tau = \frac{\pi}{8} I_0 B d^2$ (d)

V4] $\alpha = \pi/6 \quad \tau = \frac{\sqrt{3}\pi}{8} I_0 B d^2$ (b)

■

4. Un alambre infinito se dobla de tal forma de crear una espira redonda, perpendicular al alambre alejada una distancia a de la sección recta del alambre (ver figura: izq). Por el alambre circula una corriente i_0. Dado el sistema de referencia de la figura, si $a = R$, el campo magnético en el punto p (origen del sistema) es:



a) $\frac{\mu_0 i_0}{2R}\left(\frac{1}{2\pi}-1\right)\hat{y}$

b) $\frac{\mu_0 i_0}{2R}\left(\frac{2}{3\pi}-1\right)\hat{y}$

c) $\frac{\mu_0 i_0}{2R}\left(\frac{1}{\pi}-1\right)\hat{y}$

d) $\frac{\mu_0 i_0}{2R}\left(\frac{1}{3\pi}-1\right)\hat{y}$

PROBLEMA 4

* Calculando el campo del alambre utilizando la ley de Ampere

$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_0 \Rightarrow B\cdot 2\pi a = \mu_0 I_0 \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a}(+\hat{y})$

* calculando el campo del anillo utilizando Biot-Savart

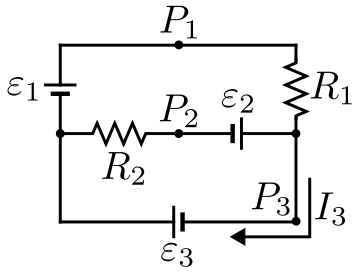
$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\, d\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$

$\Rightarrow \vec{B} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\, r\, d\phi}{r^2}(-\hat{y}) = \frac{\mu_0 I}{2r}(-\hat{y})$

Utilizando el principio de superposición, se obtiene:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2}\left(\frac{1}{\pi a}-\frac{1}{R_3}\right)\hat{y}$$

5. Considere el circuito mostrado en la figura en que tenemos las fem $\varepsilon_1 = 8\,\text{V}$, $\varepsilon_2 = 6\,\text{V}$ y la resistencia $R_2 = 8\,\Omega$. Los valores de la fem ε_3 y resistencia R_1 son desconocidos. Se mide que entre los puntos P_1 y P_2 hay una diferencia de potencial $\Delta V = V_2 - V_1 = -14\,\text{V}$, y que por el punto P_3 circula una corriente $I_3 = 1\,\text{A}$ en el sentido indicado en la figura. ¿Cuál es el valor de R_1?



a) $20\,\Omega$

b) $24\,\Omega$

c) $32\,\Omega$

d) $56\,\Omega$

Digamos que por los puntos P_1 y P_2 circulan corrientes I_1 e I_2, respectivamente, hacia la derecha. La diferencia de potencial entre los puntos 1 y 2 es conocida (ΔV). Recorriendo 1 a 2 por el camino derecho tenemos

$$\Delta V = -I_1 R_1 - \varepsilon_2\,,$$

Por el camino izquierdo tenemos

$$\Delta V = -\varepsilon_1 - I_2 R_2\,.$$

Despejando I_1 e I_2 de las anteriores nos da

$$I_1 = -(\Delta V + \varepsilon_2)/R_1\,,$$

$$I_2 = -(\Delta V + \varepsilon_1)/R_2\,.$$

Pero $I_3 = I_1 + I_2$. Reemplazando en lo anterior y despejando R_1 tenemos:

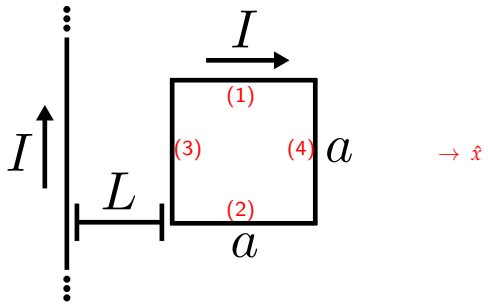
$$R_1 = \frac{-(\Delta V + \varepsilon_2)}{I_3 + (\Delta V + \varepsilon_1)/R_2}$$

Con los datos nos queda

$$R_1 = 32\Omega$$

■

6. Considere un alambre muy largo por el que circula una corriente I. Se coloca una espira cuadrada de lado a a una distancia $L = a/2$ de este, como se muestra en la figura. Si por la espira también circula una corriente I. La magnitud de la fuerza magnética sobre la espira es:



a) $(8/5)\mu_0 I^2/\pi$

b) $(2/3)\mu_0 I^2/\pi$

c) $(8/21)\mu_0 I^2/\pi$

d) $(1/4)\mu_0 I^2/\pi$

Fijamos el eje $\hat{z}$ a lo largo del cable muy largo, en la dirección de circulación de la corriente. Usando Ley de Ampère, es fácil mostrar que el campo generado por este cable tiene magnitud $B(r) = \mu_0 I/(2\pi r)$ y que en el plano de la hoja de la prueba, apunta hacia adentro de la hoja. La fuerza se puede calcular como $\vec{F} = \oint \vec{I}\, d\vec{l} \times \vec{B} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$, donde $\vec{F}_i$, $i = 1,..,4$ es la fuerza que siente cada tramo según los índices la figura.
Note que $F_1 + \vec{F}_2 = 0$, por otro lado:

$$\vec{F}_3 = -IaB(L)\hat{x} = -\mu_0 I^2 a/(2\pi L)\hat{x}\,,$$

$$\vec{F}_4 = IaB(L+a)\hat{x} = \mu_0 I^2 a/(2\pi(L+a))\hat{x}\,,$$

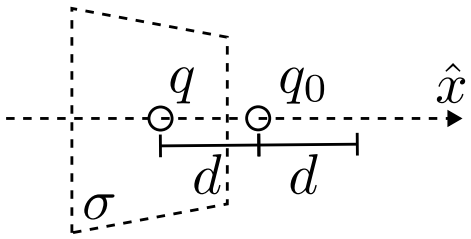
donde $\hat{x}$ apunta hacia la derecha.
Finalmente,

$$\vec{F} = \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = -\frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi L}\hat{x} + \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi(L+a)}\hat{x} = -\frac{a^2}{2L(L+a)}\frac{\mu_0 I^2}{\pi}\hat{x}\,.$$

Con los datos: $F = (2/3)\mu_0 I^2/\pi$.

■

7. Considere el arreglo mostrado en la figura, el cual consiste de una carga puntual q que se encuentra fija en medio de un plano uniformemente cargado con densidad de carga σ. Considere que $\sigma = q/(4\pi d^2)$ y que el plano es muy grande, tal que su área $A \gg d^2$. El trabajo hecho por el campo eléctrico al mover una carga de prueba q_0 desde una distancia d a una $2d$ al plano por el eje ortogonal que pasa por la carga q (eje x en la figura) es:



a) $\frac{5qq_0}{8\pi\varepsilon_0 d}$

b) $\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 d}$

c) $\frac{3qq_0}{8\pi\varepsilon_0 d}$

d) $\frac{3qq_0}{16\pi\varepsilon_0 d}$

Por superposición, el campo eléctrico generado por el plano y la carga q a una distancia x en el eje $x > 0$ es:

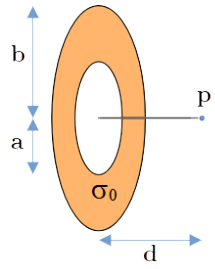
$$\vec{E}(x) = \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}\right)\hat{x} = \left(\frac{q}{8\pi\epsilon_0 d^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}\right)\hat{x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{2d^2} + \frac{1}{x^2}\right)\hat{x}$$

Luego, el trabajo hecho por el campo para mover la carga q_0 desde $x = d$ a $x = 2d$ es:

$$W = \int_d^{2d} q_0 E(x)\,dx = \int_d^{2d} \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{2d^2} + \frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{d}{2d^2} - \frac{1}{2d} + \frac{1}{d}\right) = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 d}$$

■

8. Se tiene un disco con densidad de carga superficial σ_0 de radio interno a y radio externo b. Se pide calcular el módulo del campo eléctrico en un punto **p**, ubicado a una distancia perpendicular d desde el centro del disco (ver figura), si $a = d$ y $b = 2d$.



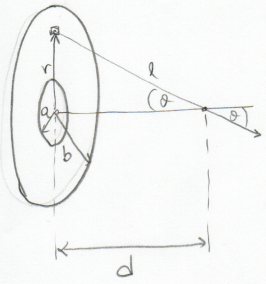
a) $\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

b) $\frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

c) $\frac{\sigma_0}{2\sqrt{2}\epsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

d) $\frac{\sigma_0}{2\sqrt{5}\epsilon_0}$

PROBLEMA 8



$$dE = \frac{k\,dq}{\ell^2} \quad ; \quad dq = \sigma_0\, dA$$

$$\ell^2 = r^2 + d^2 \quad , \quad dA = r\,d\phi\,dr$$

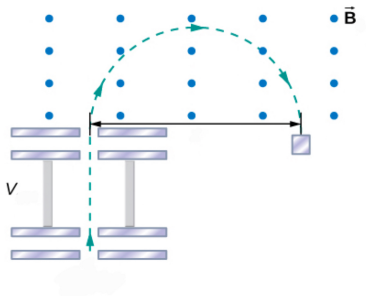
$$E_x = \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{k\,\sigma_0 \cdot r\,d\phi\,dr}{(r^2+d^2)} \underbrace{\cos(\theta)}_{d/\ell}$$

$$\Rightarrow E_x = 2\pi\, k\, d\, \sigma_0 \underbrace{\int_a^b \frac{r\,dr}{(r^2+d^2)^{3/2}}}_{\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+d^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2+d^2}}\right)}$$

$$\therefore E_x = 2\pi \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma_0 \left[\frac{d}{d\sqrt{\left(\frac{a}{d}\right)^2+1}} - \frac{d}{d\sqrt{\left(\frac{b}{d}\right)^2+1}}\right]$$

$$\Rightarrow E_x = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{d}\right)^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{b}{d}\right)^2+1}}\right)$$

9. Una partícula de carga q y masa m es acelerada desde el reposo debido a una diferencia de potencial ΔV. Luego entra en una cámara con un campo magnético $\vec{B}$ siguiendo una trayectoria circular como indica la figura. Suponga que $\Delta V = 1,5\, V_0$, entonces la expresión que describe al radio de la trayectoria circular en las unidades usuales es



a) $\sqrt{\frac{4mV_0}{qB^2}}$

b) $\sqrt{\frac{5mV_0}{qB^2}}$

c) $\sqrt{\frac{3mV_0}{qB^2}}$

d) $\sqrt{\frac{6mV_0}{qB^2}}$

En la región de interés la carga sentirá una fuerza de magnitud $F = quB$, donde u es la rapidez de la carga. Como sabemos, esta fuerza actúa como fuerza centrípeta, luego $F = mu^2/R$, donde R es el radio de la trayectoria. Igualando ambas ecuaciones y despejando R encontramos $R = mu/qB$. Por otro, antes de entrar a la región, la carga es acelerada desde el reposo por la diferencia de potencial. El trabajo neto $q\Delta V$ produce un cambio en su energía cinética, luego $q\Delta V = (1/2)mu^2$, de donde despejamos $u = \sqrt{2q\Delta V/m}$. Reemplazando esto en la ecuación para el radio nos queda:

$$R = \frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2m\Delta V}{qB^2}} = \sqrt{\frac{3mV_0}{qB^2}}$$

■

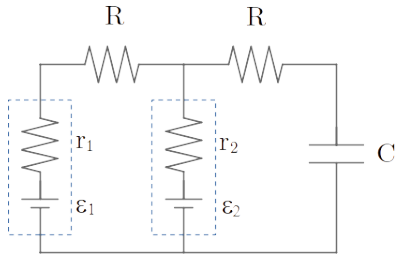
10. Se tiene un circuito RC compuesto por dos fuentes **no ideales** (demarcadas con rectángulos de línea segmentada), una con fem ϵ_1 y resistencia interna r_1, y la otra con fem ϵ_2 y resistencia interna r_2, dispuestas tal como se muestra en la figura. Considere que: $\epsilon_2 = 2\,\epsilon_1$; $\epsilon_1 = 1$ V; $r_1 = r_2 = 2\,\Omega$; $R = 10\,r_2$.
Determine la diferencia de potencial entre los terminales del condensador cuando *ha pasado mucho tiempo* desde que éste (inicialmente descargado) se conectó al circuito.

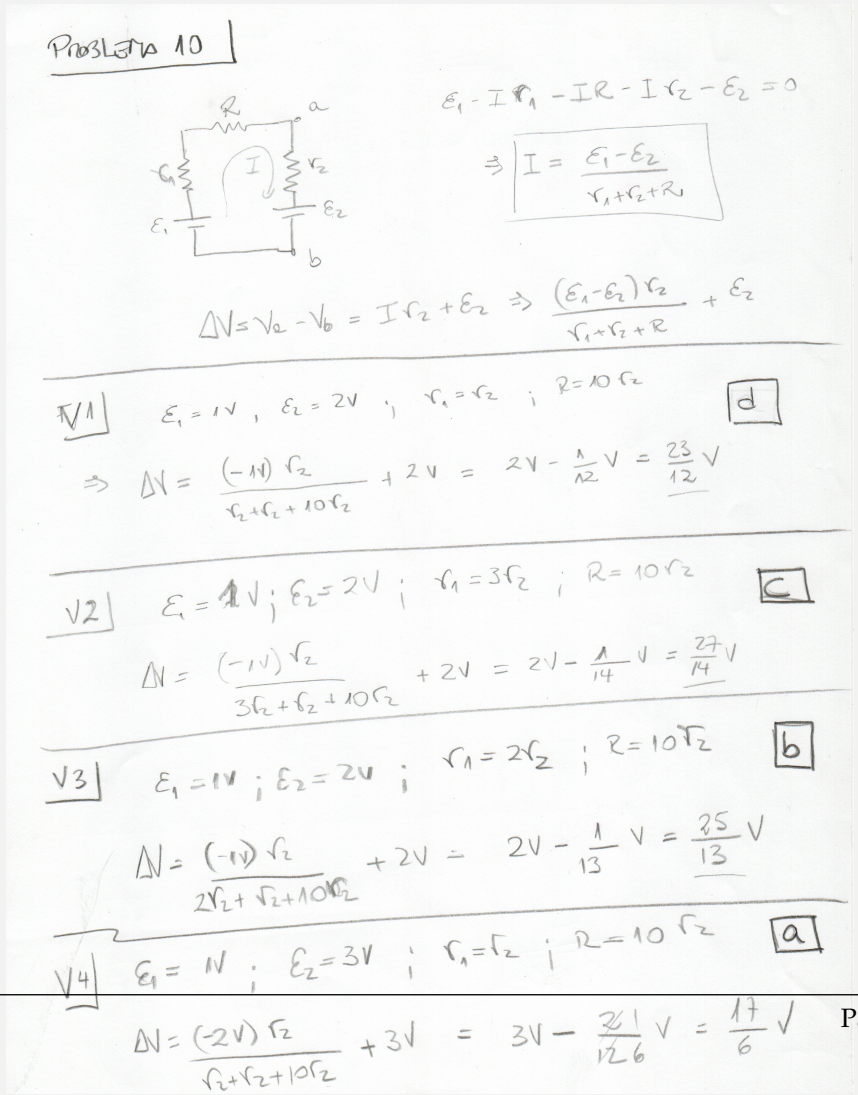
a) $\frac{17}{6}$ V

b) $\frac{25}{13}$ V

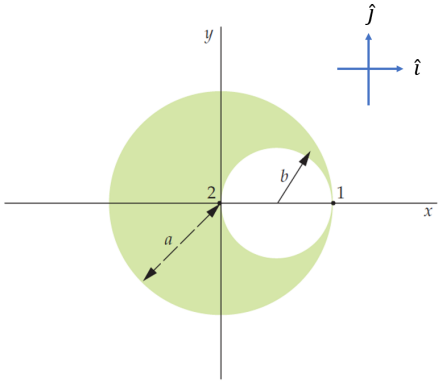
c) $\frac{27}{14}$ V

d) $\frac{23}{12}$ V





11. Una esfera sólida no conductora, centrada en el origen coordenado y de radio R posee una densidad volumétrica de carga constante ρ. Cierta cantidad de material es removida de la esfera cargada dejando una cavidad esférica con un radio que satisface $R = 2b$. La cavidad es rellenada con un material no conductor uniformemente cargado y con carga total Q.



Calcular el campo eléctrico resultante en el punto 1 mostrado en la figura.

a) $\vec{E}_1 = \left(\frac{\rho b}{3\varepsilon_0} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b^2}\right)\hat{\imath}$

b) $\vec{E}_1 = -\left(\frac{\rho b}{3\varepsilon_0} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b^2}\right)\hat{\imath}$

c) $\vec{E}_1 = \left(\frac{\rho b}{3\varepsilon_0} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b^2}\right)\hat{\imath}$

d) $\vec{E}_1 = -\left(\frac{\rho b}{3\varepsilon_0} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b^2}\right)\hat{\imath}$

El campo eléctrico a una distancia r, desde el centro de la uniformemente esfera no conductora cargada es dada por:

$$\vec{E}_{rho} = E\hat{r} \tag{1}$$

donde $\hat{r}$ es un vector unitario que apunta radialmente hacia afuera.
Aplicamos la ley de Gauss a una esfera superficie de radio r centrada en el origen para obtener:

$$E\left(4\pi r^2\right) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \tag{2}$$

Relacionamos la carga Q con la densidad volumétrica de carga eléctrica ρ y sustituímos por Q_{int}

$$\rho = \frac{Q_{int}}{\frac{4}{3}\pi r^3} \tag{3}$$

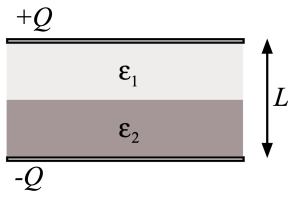
$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\hat{r} \tag{4}$$

lo cual representa el campo eléctrico de $\vec{E}_\rho + \vec{E}_{-\rho}$ las cuales dependen de r y r' respectivamente y donde r' es la distancia desde el centro de la esfera que se encuentra centrada en $x = b = R/2$. Escribiendo esta ecuación en términos de las coordenadas cartesianas para los puntos al interior de la esfera tenemos

$$\vec{E}_\rho + \vec{E}_{-\rho} + \vec{E}_Q = \frac{\rho b}{3\varepsilon_0}\hat{\imath} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b^3}\left[(x-b)\,\hat{\imath} + y\hat{\jmath}\right] \tag{5}$$

Donde $\vec{E}_Q$ es el campo eléctrico que genera el material con que se rellena a cavidad. Esta ecuación es válida para todos los puntos que comprenden la cavidad (rellena) y por tanto podemos evaluarla en el punto $P_1 = (2b, 0)$ o $P_2 = (0, 0)$ obteniendo la respuesta final. ■

12. Un condensador de placas paralelas de área A y separación L es llenado con dos materiales dielétricos con permitividades ε_1 y ε_2 tal como muestra la figura.



Si los dos materiales tienen igual espesor, $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$ y $\varepsilon_2 = 3\varepsilon_0$, la capacitancia del sistema es:

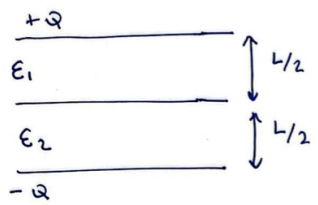
a) $\frac{8A\varepsilon_0}{3L}$

b) $\frac{24A\varepsilon_0}{7L}$

c) $\frac{12A\varepsilon_0}{5L}$

d) $\frac{40A\varepsilon_0}{9L}$

P12)



Usando ley de Gauss en el medio 1

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{a} = \frac{QS}{A} = \sigma_f S$$

$$DS = \frac{QS}{A}$$

$$\Rightarrow D = \frac{Q}{A}$$

entonces $E_1 = \frac{Q}{A\varepsilon_1}$

Análogamente, para el medio 2: $E_2 = \frac{Q}{A\varepsilon_2}$

Los dos medios son equivalentes a dos condensadores conectados en serie

$$\Delta V = \frac{L}{2}E_1 + \frac{L}{2}E_2 = \frac{LQ}{2A}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right)$$

entonces

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2A}{L}\,\frac{1}{\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right)}$$

$$\therefore \quad C = \frac{2A}{L}\left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right)$$