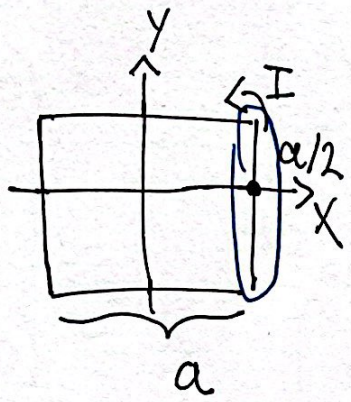
Ayudantía 22

1.



¿B(0)? → = La suma del campo producido por los 4 alambres.

Notando que van todos en el mismo sentido se tiene que: $\vec{B}(0) = 4 \cdot B_a(0)$ → son todos iguales.

Tomando como referencia el alambre

$$X = a/2 \; ; \; y \in [-a/2 \; ; \; a/2]$$

Se tiene que:

$$B(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|^3}$$

$\vec{r} = 0$

$\vec{R} = (a/2)\,\hat{i} + y\,\hat{j}$; $|\vec{R}| = (y^2 + a^2/4)^{1/2}$.

$d\vec{l} = dy\,\hat{j}$

impulsado por CamScanner

Reemplazamos:

$$\vec{B}_a(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{dy\,\hat{\jmath} \times (0 - \vec{R})}{|-\vec{R}|^3}$$

$$\vec{B}_a(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{dy\,\hat{\jmath} \times (-a/2\,\hat{\imath} - y\hat{\jmath})}{(y^2 + a^2/4)^{3/2}}$$

El producto cruz es: $\hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = 0$ y $\hat{\jmath} \times -\hat{\imath} = \hat{K}$

$y = a/2 \tan\alpha$.

$$B_a(0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\alpha \, d\alpha$$

$$B_a(0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \sin(\alpha)\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{2\pi a} \hat{K}$$

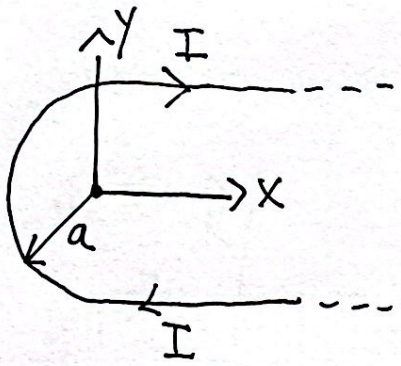
$\times 4$.

Luego:

$$\vec{B}(0) = 2\sqrt{2}\, \frac{\mu_0 I}{\pi a} \hat{K}$$

impulsado por CamScanner

2.



$$\vec{B}(0) = 2B_a(0) + B_c(0)$$

$B_a(0)$ ↓ alambre

$B_c(0)$ ↓ Semi circunferencia

- Alambre: (Superior).

$$B_a(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\vec{dl} \times (0 - \vec{R})}{|\vec{R}|^3}$$

Donde: $\vec{r} = 0$

$\vec{R} = a\hat{j} + x\hat{i}$ con $x \in [0, \infty)$

$|\vec{R}|^3 = (a^2 + x^2)^{3/2}$

$\vec{dl} = dx\hat{i}$

$$\vec{dl} \times (-\vec{R}) \Rightarrow dx\hat{i} \times (-a\hat{j} - x\hat{i}) = -a\,dx\,\hat{k}$$

Reemplazando todo en la ecuación:

$$B_a(0) = \frac{-\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{a\,dx\,\hat{k}}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

Sea $x = a\tan(\alpha)$

impulsado por CamScanner

Luego

$$\boxed{B_a = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\hat{k}}$$

- Semi circunferencia:

$\vec{r} = 0$

$\vec{R} = a(-\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j})$ → En cartesianas.

$d\vec{R} = a(\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j})\,d\theta$

$d\vec{R} \times -\vec{R} = -a^2\,\underbrace{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}_{1}\,d\theta\,\hat{k} = -a^2\,d\theta\,\hat{k}$

Luego:

$$B_c(0) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta\,\hat{k}$$

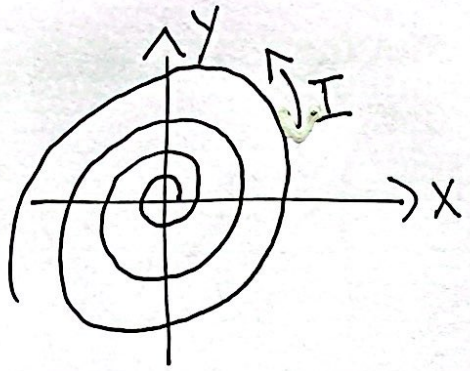
$$\boxed{B_c(0) = -\frac{\mu_0 I\,\hat{k}}{4a}}$$, luego:

$$B(0) = 2B_a(0) + B_c(0) \Rightarrow \boxed{\vec{B}(0) = -\frac{\mu_0 I}{2a}\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\right)\hat{k}}$$

↳ campo total.

impulsado por CamScanner

3.



$r(\theta) = \frac{\theta}{2\pi} + 1$ Con n vueltas.

Recordando:

$$B(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|^3}$$

En el origen:

$\vec{r} = 0$

$\vec{R} = r\hat{r}$

$d\vec{l} = dr\hat{r} + r d\theta \hat{\theta}$ → definición de polares.

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi \cdot N} \frac{(dr\hat{r} + r d\theta \hat{\theta}) \times (-r\hat{r})}{|-r\hat{r}|^3}$$; Sólo sobrevive $\hat{\theta} \times -\hat{r} = \hat{K}$.

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi n} \frac{d\theta}{r} \hat{K}$$

impulsado por CamScanner

Reemplazo la expresión de $r(\theta)$:

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 I \hat{K}}{4\pi} \int_0^{2\pi n} \frac{d\theta}{\frac{\theta}{2\pi} + 1}$$

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 I \hat{K}}{4\pi} \cdot 2\pi \ln\left(\frac{\theta}{2\pi} + 1\right)\Big|_0^{2\pi n}$$

$$\boxed{\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 I}{2} \ln(n+1)\, \hat{K}.}$$

impulsado por CamScanner