Electricidad y magnetismo - FIS1533

Examen

C. Arenas, E. Arevalo, F. Castillo, M. Domínguez,
D. Goyeneche, P. Urrejola, S. Wallentowitz
13 de diciembre de 2023

Instrucciones generales

- La evaluación tiene una duración de **120 minutos**.
- La evaluación tiene un total de **18 puntos**. Su nota se calculará como: Nota $= 1 +$ Puntaje$/3$.
- La evaluación consiste en **tres ejercicios**. El ejercicio 1 comprende preguntas de selección múltiple. Los ejercicios 2 y 3 son problemas de desarrollo.
- El **ejercicio 1 tiene un total de 6 puntos** (1 punto por cada pregunta de selección múltiple).
- En el caso de las preguntas de selección múltiple debe **seleccionar solo una respuesta para cada pregunta**. Para ello debe **rellenar completamente el círculo** de la respuesta seleccionada en la hoja de respuestas, de lo contrario su respuesta se considerará inválida. El desarrollo de las preguntas de selección múltiple no se considera en la corrección.
- Debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
- Debe escribir su **nombre, RUN y sección de forma clara y legible en cada hoja** que entregue. Cuando el encargado pase la lista, escriba también su número de lista.
- Al finalizar la interrogación, **entregue el desarrollo de los ejercicios 2 y 3 en hojas separadas**, además de la **hoja de respuestas de las preguntas de selección múltiple**.
- El orden y las explicaciones son requisitos para obtener puntaje en cada problema de desarrollo.
- No puede usar ningún tipo de aparato electrónico. El uso de calculadora, celular, tableta y dispositivos similares será sancionado.
- No puede prestar nada.
- La evaluación es individual y está absolutamente prohibida la colaboración o la copia. Cualquier acto que vaya en contra del *código de honor* se sancionará con nota final 1.0 en el curso.
- Se aceptan preguntas de enunciado solo dirigidas al profesor(a), durante la primera hora de la evaluación.

Ejercicio 1

1. Una corriente $2I$ circula por un cable conductor proveniente desde infinito por la diagonal $x = y$. Al llegar al origen se divide en dos cables (de corriente I cada uno) que se alejan hacia infinito por los ejes x e y. Considere un punto P sobre la diagonal $x = y$ tal como se muestra en la figura. Sea $B_{\text{horizontal}}$, B_{vertical} y B_{diagonal} los valores absolutos de los campos magnéticos en el punto P originados por las corrientes que circulan por los cables horizontal, vertical y diagonal respectivamente.

   Sea B_T el valor absoluto del campo magnético total en el punto P. ¿Cuál de la siguientes afirmaciones es correcta?

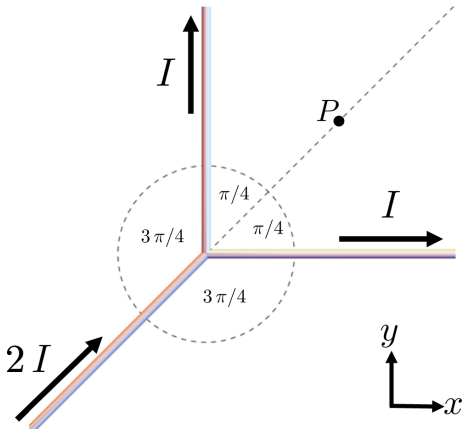
   (a) $B_T = B_{\text{horizontal}} + B_{\text{vertical}} - B_{\text{diagonal}}$

   (b) $B_T = 0$

   (c) $B_T = B_{\text{horizontal}} + B_{\text{vertical}}$

   (d) $B_T = B_{\text{diagonal}} - B_{\text{horizontal}} - B_{\text{vertical}}$

   (e) $B_T = B_{\text{horizontal}} + B_{\text{vertical}} + B_{\text{diagonal}}$



2. Un electrón con masa m_{e} y carga eléctrica $q_{\text{e}} = -e$ entra con velocidad $\vec{v}$ a una región con campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ y campo magnético uniforme $\vec{B}$, con $\vec{E} \parallel \vec{B}$. Antes de salir de esta región, el electrón se mueve por un largo L en dirección del campo eléctrico, en una trayectoria helicoidal con radio R.
   ¿Cual es el trabajo W que realizan los campos al electrón?

   (a) No entregan trabajo.
   (b) $W = eEL$.
   (c) $W = evBL$.
   (d) $W = B^2/(2\mu_0)$.
   (e) $W = (2\pi R)e\vec{v} \times \vec{B}$.

3. El circuito de la figura tiene un voltaje de batería, $\mathcal{E}$, dos interruptores S_1 y S_2, tres resistencias, R_1, R_2 y R_3, una inductancia L y una capacitancia C. Inicialmente los interruptores están en posición neutral (N) y la capacitancia, C, está descargada. En el tiempo $t = 0$ los interruptores, S_1 y S_2, se mueven simultáneamente a la posición a. Después de un tiempo $t = R_1\,C$ los interruptores se mueven simultáneamente a la posición b. Para $t \geq R_1\,C$ ¿cuál es el sentido positivo de las corrientes i_2 e i_3? (entiéndase por sentido positivo aquel para el cual el valor de la corriente es positivo).

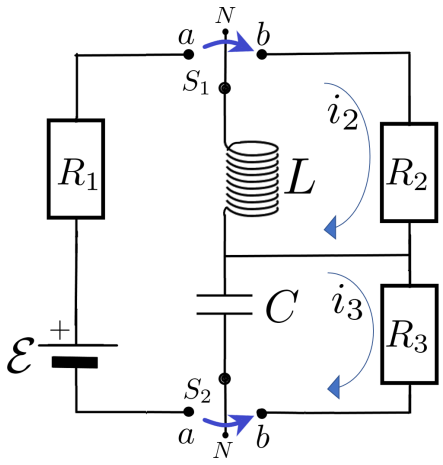
   (a) El sentido positivo de la corriente i_2 es igual al mostrado en la figura y el de la corriente i_3 es opuesto.

   (b) El sentido positivo de la corriente i_3 es igual al mostrado en la figura y el de la corriente i_2 es opuesto.

   (c) Los sentidos positivos de las corrientes i_2 e i_3 son iguales a los mostrados en la figura.

   (d) La corriente $i_2 = 0$ y el sentido positivo de la corriente i_3 es igual al mostrado en la figura.

   (e) Los sentidos positivos de las corrientes i_2 e i_3 son opuestos a los mostrados en la figura.



4. La regla de Lenz dice:

   (a) Antes del big bang solamente había una corriente eléctrica circular girando alrededor de la creciente singularidad.
   (b) La dirección del campo magnético generado por una corriente se obtiene con la regla de la mano derecha.
   (c) No existen monopolos magnéticos.
   (d) Las corrientes inducidas generan campos magnéticos que tratan de compensar el cambio del flujo magnético.
   (e) La corriente eléctrica es estacionaria.

5. Considere el circuito de la figura, con resistencias y autoinductancias ideales. En t=0 se conecta la fuente de voltaje constante E_0. Bajo estos supuestos, cual es la tensión en R_2 si ha transcurrido mucho tiempo desde que se conecto la fuente?

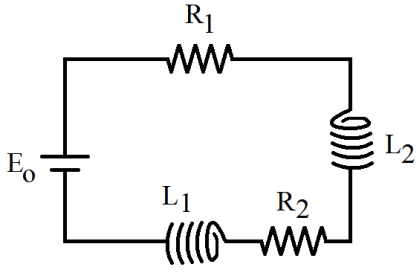
   (a) $\frac{R_1}{R_2}\frac{L_1}{L_2}E_0$

   (b) $\frac{R_1}{R_1+R_2}E_0$

   (c) $\frac{R_2}{R_1+R_2}E_0$

   (d) $\frac{2R_2}{R_1}E_0$

   (e) $\frac{2R_1}{R_2}E_0$



6. En la figura se muestra cuatro configuraciones (I, II, III, IV) de un alambre con 2 estructuras cónicas solidas, todo conectado y hecho del mismo material conductor de conductividad constante. Todas las dimensiones del conductor, incluyendo las estructuras cónicas solidas (longitudes y radios), son iguales en todas las configuraciones. Suponga que la corriente eléctrica fluye del punto a hacia el punto b. Sea R_j con $j = I, II, III, IV$ la resistencia entre los puntos a y b de las diferentes configuraciones. Considerando que el valor de la resistencia depende de la geometría del sistema, diga cuál de las siguientes afirmaciones es correcta.

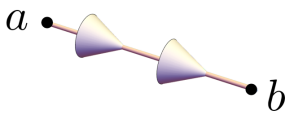
(a) $R_{II} < R_I$

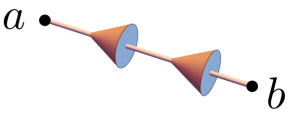
(b) $R_{IV} < R_{III}$

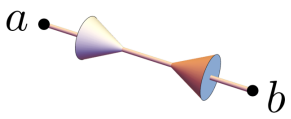
(c) $R_I < R_{II}$

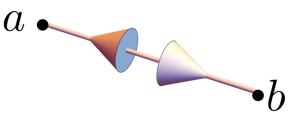
(d) $R_{II} = R_{IV}$

(e) $R_{III} < R_{IV}$

(I) 

(II) 

(III) 

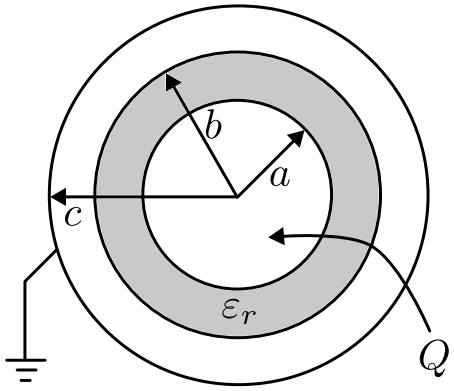
(IV) 

Ejercicio 1

Forma	I	II	III	IV
Pregunta				
1	(b)	(d)	(e)	(e)
2	(b)	(a)	(e)	(d)
3	(e)	(a)	(e)	(b)
4	(d)	(b)	(d)	(a)
5	(c)	(e)	(d)	(d)
6	(d)	(b)	(b)	(e)

Ejercicio 2

Una esfera conductora sólida de radio a está rodeada por un cascarón esférico grueso de radio interno a y radio externo $b = (3/2)a$, hecho de un material dieléctrico con permitividad relativa ε_r. El conjunto está rodeado por una capa esférica concéntrica muy delgada de radio $c = 2a$, hecha de un material conductor, que está conectada a tierra, tal como muestra la figura.



Si en la esfera sólida se deposita una carga Q:

I) Calcule los vectores $\vec{D}$ y $\vec{E}$ en todo el espacio. (3 ptos.)

II) Determine las densidades de carga sobre las superficies de los conductores (radios $r = a$ y $r = c$). (1 pto.)

III) Calcule la densidad de carga de polarización (ligada) sobre las superficies interior y exterior del material dieléctrico (radios $r = a$ y $r = b$). (1 pto.)

IV) Calcule la energía eléctrica del sistema. (1 pto.)

Solución:

I) El sistema tiene simetría esférica. Tomamos $\vec{D} = D(r)\hat{r}$ con r medido desde el centro de las esferas. Aplicamos ley de Gauss sobre un cascarón esférico de radio r:

Región $0 < r < a$: Conductor $\Rightarrow \vec{D}(r) = 0$; $\vec{E}(r) = 0$. 0,4 pts. 0,4 pts.

Región $a < r < c$:

$$\int_{\text{cascarón}} \vec{D} \cdot d\vec{a} = 4\pi r^2 D = Q \quad (Q \text{ está en la superficie } r = a).$$

$$\Rightarrow \vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r} \; ; \; a < r < c. \quad 0,4 \text{ pts.}$$

Región $a < r < b$: (Dieléctrico)

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r} \quad a < r < b. \quad 0,5 \text{ pts.}$$

Región $b < r < c$: (Vacío)

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \quad b < r < c. \quad 0,5 \text{ pts.}$$

Región $r > c$: Digamos que desde la tierra "sube" una carga q a la capa conductora. por Ley de Gauss:

$$\int_{\text{cascarón}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = 4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0}(q + Q) \Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q+q}{r^2} \quad r > c.$$

Fijando el 0 de potencial en infinito nos queda:

$$\varphi(r) = -\int_{\infty}^{r} E\,dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q+q}{r} \; ;$$

pero al estar conectado a tierra $\varphi(c) = 0 \Rightarrow q = -Q$.

Finalmente

$$\vec{E}(r) = 0 \text{ y } \vec{D}(r) = 0 \; ; \quad r > c.$$

0,4 pts. 0,4 pts.

II) $\sigma(r=a) = \dfrac{Q}{4\pi a^2}$ 0,5 pts.

$\sigma(r=c) = \dfrac{-Q}{4\pi c^2} = \dfrac{-Q}{16\pi a^2}$ 0,5 pts.

III) Tenemos que en $a<r<b$:

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} = \left[\frac{Q}{4\pi r^2} - \varepsilon_0 \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \right] \hat{r} = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

Las densidades de carga son:

$\sigma_p(r=a) = \vec{P}(a)\cdot(-\hat{r}) = -\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \frac{Q}{4\pi a^2}$ 0,5 pts.

$\sigma_p(r=b) = \vec{P}(b)\cdot\hat{r} = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \frac{Q}{4\pi b^2} = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \frac{Q}{9\pi a^2}$

Otra forma: Desde la discontinuidad de $\vec{E}$: 0,5 pts.

$$\sigma_p(a) + \sigma(a) = \varepsilon_0 \left[E(a^+) - E(a^-) \right] = \varepsilon_0 \left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon a^2} - 0 \right]$$

$$\Rightarrow \sigma_p(a) = \frac{\varepsilon_0 Q}{4\pi\varepsilon a^2} - \frac{Q}{4\pi a^2} = -\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \frac{Q}{4\pi a^2}$$ 0,5 pts.

$$\sigma_p(b) = \varepsilon_0 \left[E(b^+) - E(b^-) \right] = \varepsilon_0 \left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b^2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon b^2} \right]$$

$$= \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \frac{Q}{4\pi b^2} = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \frac{Q}{9\pi a^2}$$

0,5 pts.

IV) $U = \frac{1}{2}\int_V \vec{D}\cdot\vec{E}\, d^3r = \frac{1}{2}\int_a^c DE\cdot 4\pi r^2 dr$

$= \frac{1}{2}\left[\int_a^b \left(\frac{Q}{4\pi r^2}\right)\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\right)4\pi r^2 dr + \int_b^c \left(\frac{Q}{4\pi r^2}\right)\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)4\pi r^2 dr\right]$ 0,5 pts.

$= \frac{1}{2}\left[-\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right) - \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)\right]$

$= \frac{Q^2}{8\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{2}{3a}\right) + \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{2}{3a}-\frac{1}{2a}\right)\right]$

$= \frac{Q^2}{24\pi a}\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{2\varepsilon_0}\right)$ 0,5 pts.

Otra forma: El sistema se puede pensar como dos condensadores esféricos en serie con capacidades:

$C_1 = \frac{4\pi\varepsilon ab}{b-a} = \frac{4\pi\varepsilon a\cdot\frac{3}{2}a}{\frac{3}{2}a-a} = 12\pi\varepsilon a$ 0,2 pts.

y $C_2 = \frac{4\pi\varepsilon_0 bc}{c-b} = \frac{4\pi\varepsilon_0\frac{3}{2}a\cdot 2a}{2a-\frac{3}{2}a} = 24\pi\varepsilon_0 a$ 0,2 pts.

Capacidad equivalente:

$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{12\pi\varepsilon a} + \frac{1}{24\pi\varepsilon_0 a} = \frac{1}{12\pi a}\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{2\varepsilon_0}\right)$

Por tanto, su energía almacenada será

$U = \frac{Q^2}{2C_{eq}} = \frac{Q^2}{24\pi a}\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{2\varepsilon_0}\right)$ 0,6 pts.

Ejercicio 3

Un conductor cilíndrico infinito de radio R conduce una densidad de corriente no uniforme $\vec{j} = br^2\hat{k}$, donde b es una constante desconocida y r es la distancia radial al eje de simetría del cilindro.

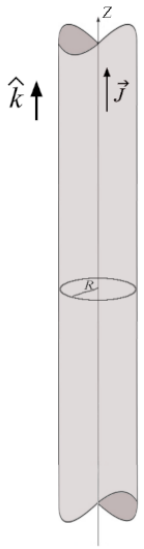


Figura 1

Si el cilindro conduce una intensidad de corriente total I:

I) Determine la constante b en función de I y R. (2 ptos.)

II) Encuentre el campo magnético en cada punto del espacio. (2 ptos.)

Ahora suponga que se se sitúa una espira de largo ℓ y ancho a a una distancia c del eje del conductor ($c > R$) de modo que el plano de la espira es paralelo al eje de simetría del cilindro, tal como se muestra en la figura 2.

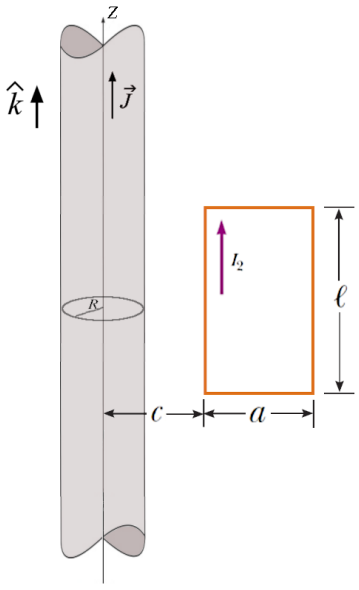


Figura 2

III) Si por la espira circula una corriente I_2, determine la magnitud y dirección de la fuerza neta ejercida sobre la espira por el campo magnético creado por el conductor cilíndrico. (2 ptos.)

Solución:

i) Para encontrar b conociendo I se puede integrar J en $d\vec{A}$ para encontrar I:

$$I = \int \vec{J}\cdot d\vec{A} = \int J(\hat{k})\cdot dA(\hat{k}) \quad (0,5)$$

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^R br^2 r dr d\theta \quad (0,5)$$

$$I = 2\pi b\int_0^R r^3 dr$$

$$I = \frac{b\pi R^4}{2} \quad (0,5)$$

$$b = \frac{2I}{\pi R^4} \quad (0,5)$$

ii) El campo magnético puede ser encontrado usando la ley de Ampere. Pero dependiendo si $r < R$ o si $r > R$ cuánta corriente es encerrada por el loop amperiano:

Caso 1: $r \leq R$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int \vec{J}\cdot d\vec{A}$$

$$2\pi r B = 2\pi\mu_0 b\int_0^r r^3 dr \quad (0,5)$$

$$2\pi r B = \frac{2\pi\mu_0 b r^4}{4}$$

$$B = \frac{\mu_0 b r^3}{4}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I r^3}{2\pi R^4}\hat{\theta} \qquad (r \leq R) \quad (0,5)$$

Caso 2: $r > R$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

$$2\pi r B = \mu_0 I \quad (0,5)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\theta} \qquad (r > R) \quad (0,5)$$

iii) Para encontrar la fuerza sobre la espira, se calcula la fuerza sobre cada cable con I_2 debido al campo producdo por J. Como la espira está fuera del cable, el campo producido ya fue calculado en (ii). Sólo queda encontrar la fuerza sobre ambos cables paralelos al cilindro, pues la fuerza sobre los campo perpendiculares a éste se anulan. La fuerza magnética sobre el cables vertical izquierdo la espira debido al campo B producido por I está dado por:

$$\vec{F}_M^{izq} = \int I_2(d\vec{\ell}\times\vec{B}) = \int_0^\ell I_2 B d\ell(-\hat{\imath}) = -I_2\frac{\mu_0 I}{2\pi c}\ell\,\hat{\imath} \quad (0,5)$$

Del mismo modo, la fuerza sobre el cable vertical de la derecha estará dado por:

$$\vec{F}_M^{der} = \int I_2(d\vec{\ell}\times\vec{B}) = \int_0^\ell I_2 B d\ell\hat{\imath} = I_2\frac{\mu_0 I}{2\pi(a+c)}\ell\,\hat{\imath} \quad (0,5)$$

Y la fuerza neta es entonces:

$$\vec{F}_N = (F_{der} - F_{izq})\hat{\imath} = \frac{\mu_0\ell I I_2}{2\pi}\left(\frac{1}{a+c} - \frac{1}{c}\right) \quad (0,5)$$

$$\vec{F}_N = -\frac{\mu_0 a\ell I I_2}{2\pi c(a+c)}\hat{\imath} \quad (0,5)$$

La fuerza neta apunta desde la espira hacia el cilindro, es decir es atractiva.

Si no indica el sentido de $\vec{F}$ $-0,5$