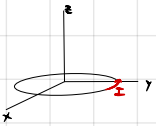
Comenzamos por el $\vec{B}$ de un anillo en el eje z



Vamos Rellenando $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{I}\times(\vec{P}-\vec{P'})}{|\vec{P}-\vec{P'}|^3}$

$\vec{P'} = z\,\hat{z}$ $\quad \vec{I} = ?$ $\longrightarrow$ La corriente se mueve circularmente (en dirección $\hat{\theta}$), así que $\vec{I} = I\vec{dl} \Rightarrow \vec{I} = IRd\theta\,\hat{\theta}$

$\vec{P} = R\,\hat{r}$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{IR\,d\theta\,\hat{\theta}\times(z\hat{z}-R\hat{r})}{(z^2+R^2)^{3/2}} \quad (\hat{\theta}\times\hat{r} = \hat{z}) \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z\,\hat{r}+R\,\hat{z}}{(z^2+R^2)^{3/2}}\,d\theta$$

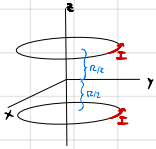
$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}}\,\hat{r} + \frac{R\,\hat{z}}{(z^2+R^2)^{3/2}}\,d\theta$$

(el primer término es 0, ya que si integro $\hat{r}$ en un periodo sale cero)

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2+R^2)^{3/2}}\,\hat{z}$$ //

Ahora, si es una espira de N vueltas, por superposición el campo será $\vec{B}(z) = \frac{N\mu_0 I R^2}{2(z^2+R^2)^{3/2}}\,\hat{z}$

Para la geometría del problema, basta con desplazar cada espira en $z = R/2$ y $z = -R/2$ y luego por superposición sumar los campos.



$$\Rightarrow \vec{B}(z) = \frac{N\mu_0 I R^2}{2\left((z+\frac{R}{2})^2+R^2\right)^{3/2}} + \frac{N\mu_0 I R^2}{2\left((z-\frac{R}{2})^2+R^2\right)^{3/2}}\,\hat{z}$$ //

Que lindo el Principio de Superposición ☺

A diferencia del ejercicio 1, aquí hay una corriente superficial. Así Biot-Savart queda $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{K}\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$

Como el disco tiene una densidad de carga σ, debo tener una corriente $\vec{J}$. Se sabe que la corriente es carga por velocidad, así $\vec{K} = \sigma\vec{v}$, donde $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$ (dinámica) $\Rightarrow \vec{K} = \sigma(\omega\hat{k}\times r\hat{r}) \Rightarrow \vec{K} = \sigma\omega r\hat{\theta}$ //

$\hat{r}\times\hat{k} = \hat{\theta}$

Para $\vec{r} = z\hat{z}$ $\quad \vec{r}' = r\hat{r}$ (r variable, ya que es superficie.)

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint \frac{\sigma\omega r\, dA\,\hat{\theta}\times(z\hat{z}-r\hat{r})}{(z^2+r^2)^{3/2}} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0\sigma\omega}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{z\hat{r}+r\hat{z}}{(z^2+r^2)^{3/2}}\, r\,dr\,d\theta \Rightarrow \vec{B} = \frac{\sigma\omega\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{zr^2}{(z^2+r^2)^{3/2}}\hat{r} + \frac{r^3}{(z^2+r^2)^{3/2}}\hat{z}\, dr\,d\theta$$

(0 ya que integro $\hat{r}$ en $0,2\pi$)

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\sigma\omega\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{r^3}{(z^2+r^2)^{3/2}}\, dr\,d\theta\,\hat{z} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\sigma\omega\mu_0}{2}\int_0^R \frac{r^3}{(z^2+r^2)^{3/2}}\, dr\,\hat{z}$$

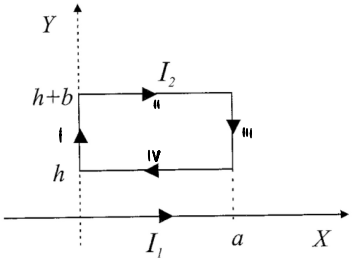
Sea $u = z^2+r^2 \Rightarrow \int_{z^2}^{z^2+R^2} \frac{u-z^2}{u^{3/2}}\, du\,\hat{z}$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{R^2+2z^2-2|z|(R^2+z^2)^{1/2}}{(R^2+z^2)^{1/2}}$$ //

Sirve para saber si es $z>0$ o $z<0$:)

Fuerza sobre la espira: $F = \int I \vec{dl} \times \vec{B}$

Como la espira tiene 4 partes, hacemos superposición para c/u



La F_I es: $\int \vec{I_2} \times \vec{B}_{\text{alambre}}$

$\Rightarrow \int I_2\, dy\, \hat{S} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi y}\, \hat{k}$

$\Rightarrow \frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi} \int_h^{h+b} \frac{1}{y}\, \uparrow$

$\Rightarrow \frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{h+b}{h}\right) \uparrow$

La F_2: $\int I_2\, dx \uparrow \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(h+b)}\, \hat{k}$

$\Rightarrow \frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi(h+b)} \int_0^a dx\, (-\hat{S})$

$\Rightarrow -\frac{I_1 I_2 \mu_0 a}{2\pi(h+b)}\, \hat{S}$

La F_{IV}: $\int_a^0 I_2\, dx\, (-\hat{\imath}) \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi h}\, \hat{k}$

$\Rightarrow \frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi h} \int_a^0 dx\, \hat{S}$

$\Rightarrow -\frac{I_1 I_2 \mu_0 a}{2\pi h}\, \hat{S}$

Notar que $F_3 = -F_1$

Finalmente, $F_T = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$

$\Rightarrow F_T = -\frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi h} a - \frac{I_1 I_2 \mu_0 a}{2\pi(h+b)}\, \hat{S}$ //