Examen

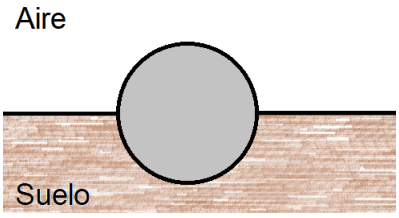
Fecha: 8 de Mayo 2024

1. Una esfera conductora de radio a esta enterrada en el suelo hasta la mitad y se mantiene a potencial V_0. El aire tiene constante dieléctrica relativa ≈ 1, mientras que el suelo tiene constante dieléctrica relativa ε_r y se puede considerar como un medio semi-infinito limitado por una superficie plana.

   (a) Calcule el campo eléctrico en todo el espacio. Suponga a priori que dicho campo tiene simetría esférica. [2 pto.]

   (b) Calcule la densidad de carga libre sobre cada hemisferio conductor. [2 ptos.]

   (c) Calcule la capacidad de la esfera con respecto al infinito. [2 ptos.]



(a) Basado en el supuesto inicial de la forma del campo electrico en general, se puede escribir que $\vec{E} = E\hat{r}$; por otro lado en el modelo lineal de dieléctricos, se puede asumir tambien $\vec{D} = D\hat{r}$.
Entonces, por la division en dominios del problema ($r < a$, $r > a$ hemisferios superior e inferior) se puede escribir una expresion para el campo electrico como funcion de los angulos (en coordenadas esfericas) y del radio en cuestion.
Dado que no hay cargas libres, salvo en la superficie de la esfera, se puede aplicar Gauss para las semi esferas superior e inferior:

$$\oint \vec{D}_i \cdot d\vec{S} \;=\; D_i(r) 2\pi r^2 \;=\; 2\pi a^2 \sigma_i$$

donde i corresponde al hemisferio superior ($i = 0$) o inferior ($i = 1$); en dicho calculo se asume que las densidades de carga son distintas pues enfrentan distintos medios. Con esto:

$$D_i(r) \;=\; \frac{\sigma_i a^2}{r^2}$$

$$\vec{E}_i(r) \;=\; \frac{\sigma_i a^2}{\varepsilon_i r^2}\hat{r}$$

Para $r > a$, y cero para $r < a$ (por ser esfera conductora)

(b) No conocemos la densidad de carga en la superficie de la esfera, pero sabemos que esta a diferencia de potencial con la referencia (en infinito)

$$\Delta V \;=\; V(r = a) - V(r \to \infty) \;=\; V_0 \;=\; -\int_{\infty}^{a} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

ahora bien la integral de linea se puede hacer por el aire o el suelo de manera directa:

$$V_0 = \int_a^{\infty} \frac{\sigma_i a^2}{\varepsilon_i r^2} dr \;=\; \frac{\sigma_i a}{\varepsilon_i}$$

por lo que las densidades seran:

$$\sigma_i \;=\; \frac{V_0 \varepsilon_i}{a}$$

donde i corresponde al hemisferio superior ($i = 0$) o inferior ($i = 1$);

(c) Para obtener la capacitancia se considera la carga total en la esfera, dividida por la diferencia de potencial

$$Q_{tot} \;=\; 2\pi a^2 \sigma_0 + 2\pi a^2 \sigma_1 \;=\; 2\pi a^2 \left(\frac{V_0 \varepsilon_0}{a} + \frac{V_0 \varepsilon_1}{a}\right) \;=\; 2\pi a V_0 (\varepsilon_0 + \varepsilon_1)$$

Finalmente la capacitancia sera:

$$C \;=\; \frac{Q_{tot}}{V_0} \;=\; 2\pi a(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)$$

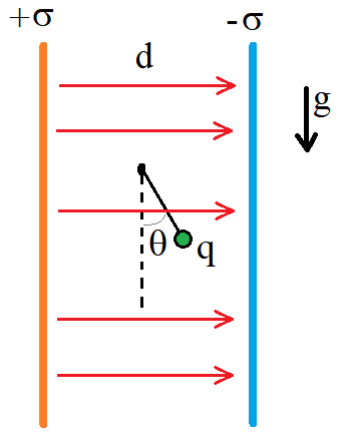
■

2. Un pequeño objeto de masa m tiene una carga q y está suspendido por un hilo inextensible entre dos planos infinitos verticales de densidad de carga (superficiales) σ y $-\sigma$ con $\sigma > 0$. La separación entre planos es d. El hilo forma un ángulo θ con la vertical como se muestra en la figura.

   (a) Describir el campo eléctrico dentro del sistema generado por los planos. [2 pto.]

   (b) Describir la fuerza de Coulomb que actúa sobre el objeto. [2 pto.]

   (c) Calcular el valor de σ en función de los otros parámetros. [2 pto.]



(a) Cada plano infinito produce un campo eléctrico perpendicular al plano mismo y de módulo constante $\sigma/2\varepsilon_0$. Recuerde que el campo sale del plano cargado positivamente y entra al plano cargado negativamente. Por lo tanto, por el principio de superposición, el campo eléctrico total dentro del sistema vale

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{x}$$

donde $\hat{x}$ es el vector unitario del eje horizontal.

(b) Recordamos que la relación entre el campo eléctrico y la fuerza de Coulomb es $\vec{F}_c = q\vec{E}$. Por lo tanto resulta que

$$\vec{F}_c = \frac{q\sigma}{\varepsilon_0}\hat{x}$$

(c) Otras dos fuerzas actúan sobre el objeto. Una es la fuerza gravitacional que es igual a

$$\vec{F}_g = -mg\hat{y}$$

donde g es la aceleración estándar de caída libre y $\hat{y}$ es el vector unitario del eje vertical. La segunda es la tensión del hilo que es igual

$$\vec{T} = T[(\cos\theta)\hat{y} - (\sin\theta)\hat{x}] .$$

Imponiendo la condición de equilibrio $\vec{F}_c + \vec{F}_g + T = 0$ se obtienen dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = \frac{q\sigma}{\varepsilon_0} - T(\sin\theta) \\ 0 = -mg + T(\cos\theta) . \end{cases}$$

Dividiendo las dos ecuaciones obtenemos

$$\frac{q\sigma}{mg\varepsilon_0} = \tan\theta$$

y consecuentemente

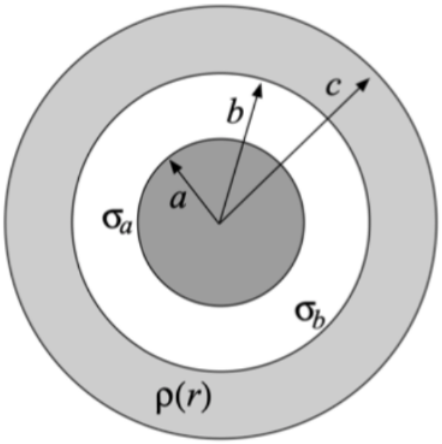
$$\sigma = \frac{mg\varepsilon_0}{q}\tan\theta .$$

■

3. Una esfera conductora de radio a, con densidad de carga superficial σ_a, está rodeada por un cascarón esférico de radios interno b y externo c. El cascarón posee una densidad de carga volumétrica $\rho(r) = -\alpha\, r^{1/2}$, donde r es la distancia al centro y α es una constante positiva conocida, mientras que en su cara interior $(r = b)$ tiene una densidad de carga superficial σ_b.

   (a) Calcule el campo electrico en todo el espacio. [3 ptos.]

   (b) Calcule la diferencia de potencial entre $r = a$ y $r = c$ [3 ptos.]



(a) Como todo el sistema tiene simetría esférica y las densidades de carga comparten dicha simetría, la Ley de Gauss es aplicable para hallar el campo eléctrico. Así, para cualquier superficie gaussiana esférica de radio r, se tiene que

$$\vec{E} = \frac{q_{enc}}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{e}}_r, \tag{1}$$

en donde q_{enc} es la carga encerrada por cada superficie gaussiana.

- **Para $r < a$:** Ya que la esfera interna es conductora, la carga se distribuye en su superficie y por lo tanto $q_{enc} = 0$, entonces,

$$\vec{E} = 0. \tag{2}$$

- **Para $a \leq r < b$:** La carga encerrerrada viene dada por:

$$q_{enc} = \int \sigma_a dS = 4\pi a^2 \sigma_a. \tag{3}$$

Así:

$$\vec{E} = \frac{4\pi a^2\sigma_a}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{e}}_r = \frac{a^2\sigma_a}{\epsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{e}}_r. \tag{4}$$

■

- **Para $b \leq r < c$:** La carga encerrada será:

$$\begin{aligned} q_{enc} &= q_{\text{esfera de radio } a} + q_{\text{esfera de radio } b} + q_{\text{porción } b<r<c} \\ &= 4\pi a^2\sigma_a + 4\pi b^2\sigma_b + \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_b^r r'^2 \left(-\alpha r'^{1/2}\right) dr' \\ &= 4\pi(a^2\sigma_a + b^2\sigma_b) - \frac{8\pi\alpha}{7}\left(r^{5/7} - b^{5/7}\right) \\ &= 4\pi\left[a^2\sigma_a + b^2\sigma_b - \frac{2\alpha}{7}\left(r^{5/7} - b^{5/7}\right)\right], \end{aligned} \tag{5}$$

con lo que

$$\vec{E} = \frac{4\pi\left[a^2\sigma_a + b^2\sigma_b - \frac{2\alpha}{7}\left(r^{5/7} - b^{5/7}\right)\right]}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{e}}_r = \frac{a^2\sigma_a + b^2\sigma_b - \frac{2\alpha}{7}\left(r^{5/7} - b^{5/7}\right)}{\epsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{e}}_r. \tag{6}$$

Nótese que

$$E_{ext}^{\perp} - E_{int}^{\perp}\Big|_{r=b} = \frac{\sigma_b}{\epsilon_0}, \tag{7}$$

en cumplimiento con las condiciones de frontera del campo eléctrico.

- **Para $r \geq c$:** La carga encerrada es la carta total del sistema, es decir:

$$\begin{aligned} q_{enc} &= 4\pi a^2\sigma_a + 4\pi b^2\sigma_b + \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_b^c r^2 \left(-\alpha r^{1/2}\right) dr \\ &= 4\pi\left[a^2\sigma_a + b^2\sigma_b - \frac{2\alpha}{7}\left(c^{5/7} - b^{5/7}\right)\right], \end{aligned} \tag{8}$$

con lo cual

$$\vec{E} = \frac{4\pi\left[a^2\sigma_a + b^2\sigma_b - \frac{2\alpha}{7}\left(c^{5/7} - b^{5/7}\right)\right]}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{e}}_r = \frac{a^2\sigma_a + b^2\sigma_b - \frac{2\alpha}{7}\left(c^{5/7} - b^{5/7}\right)}{\epsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{e}}_r. \tag{9}$$

(b) Eligiendo el infinito como Tierra, el potencial en un punto $\vec{r}$ viene dado por:

$$\phi(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{\ell}, \tag{10}$$

tal que el potencial total será la superposición de los potenciales asociados a cada campo en el punto dado. Ahora bien, dado que el campo eléctrostático producido es conservativo, se puede escoger una trayectoria en linea recta y radial, con lo que

$$\phi(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{r} E(r)dr, \tag{11}$$

- **Para $r < a$:**

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= -\int_{\infty}^{c} \frac{a^2\sigma_a + b^2\sigma_b - \frac{2\alpha}{7}\left(c^{5/7} - b^{5/7}\right)}{\epsilon_0 r^2} dr - \int_c^b \frac{a^2\sigma_a + b^2\sigma_b - \frac{2\alpha}{7}\left(r^{5/7} - b^{5/7}\right)}{\epsilon_0 r^2} dr \\ &- \int_b^a \frac{a^2\sigma_a}{\epsilon_0 r^2} dr - \int_a^r (0) dr \\ &= \frac{a^2\sigma_a + b^2\sigma_b - \frac{2\alpha}{7}\left(c^{5/7} - b^{5/7}\right)}{\epsilon_0 c} + \frac{a^2\sigma_a + b^2\sigma_b + \frac{2\alpha}{7}b^{5/7}}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) \\ &- \frac{\alpha}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{b^{2/7}} - \frac{1}{c^{2/7}}\right) + \frac{a^2\sigma_a}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \\ &= \frac{a\sigma_a + b\sigma_b}{\epsilon_0} + \frac{5\alpha}{7\epsilon_0}\left(\frac{1}{c^{2/7}} - \frac{1}{b^{2/7}}\right) \end{aligned} \tag{12}$$

■

- **Para** $a \leq r < b$**:**

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{r}) &= -\int_{\infty}^{c} \frac{a^2\sigma_a + b^2\sigma_b - \frac{2\alpha}{7}\left(c^{5/7} - b^{5/7}\right)}{\epsilon_0 r^2} dr - \int_{c}^{b} \frac{a^2\sigma_a + b^2\sigma_b - \frac{2\alpha}{7}\left(r^{5/7} - b^{5/7}\right)}{\epsilon_0 r^2} dr \\
&- \int_{b}^{r} \frac{a^2\sigma_a}{\epsilon_0 r^2} dr \\
&= \frac{a^2\sigma_a + b^2\sigma_b - \frac{2\alpha}{7}\left(c^{5/7} - b^{5/7}\right)}{\epsilon_0 c} + \frac{a^2\sigma_a + b^2\sigma_b + \frac{2\alpha}{7}b^{5/7}}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) \\
&- \frac{\alpha}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{b^{2/7}} - \frac{1}{c^{2/7}}\right) + \frac{a^2\sigma_a}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right) \\
&= \frac{\sigma_a a^2}{\epsilon_0 r} + \frac{\sigma_b b}{\epsilon_0} + \frac{5\alpha}{7\epsilon_0}\left(\frac{1}{c^{2/7}} - \frac{1}{b^{2/7}}\right) \qquad (13)
\end{aligned}$$

- **Para** $b \leq r < c$**:**

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{r}) &= -\int_{\infty}^{c} \frac{a^2\sigma_a + b^2\sigma_b - \frac{2\alpha}{7}\left(c^{5/7} - b^{5/7}\right)}{\epsilon_0 r^2} dr - \int_{c}^{r} \frac{a^2\sigma_a + b^2\sigma_b - \frac{2\alpha}{7}\left(r^{5/7} - b^{5/7}\right)}{\epsilon_0 r^2} dr \\
&= \frac{a^2\sigma_a + b^2\sigma_b - \frac{2\alpha}{7}\left(c^{5/7} - b^{5/7}\right)}{\epsilon_0 c} \frac{a^2\sigma_a + b^2\sigma_b + \frac{2\alpha}{7}b^{5/7}}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{c}\right) \\
&- \frac{\alpha}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^{2/7}} - \frac{1}{c^{2/7}}\right) \\
&= \frac{a^2\sigma_a + b^2\sigma_b + \frac{2\alpha}{7}b^{5/7}}{\epsilon_0 r} - \frac{\alpha}{\epsilon_0 r^{2/7}} + \frac{5\alpha}{7\epsilon_0 c^{2/7}} \qquad (14)
\end{aligned}$$

- **Para** $r \geq c$**:**

$$\phi(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{r} \frac{a^2\sigma_a + b^2\sigma_b - \frac{2\alpha}{7}\left(c^{5/7} - b^{5/7}\right)}{\epsilon_0 r^2} dr = \frac{a^2\sigma_a + b^2\sigma_b - \frac{2\alpha}{7}\left(c^{5/7} - b^{5/7}\right)}{\epsilon_0 r} \qquad (15)$$

(c) La diferencia de potencial pedida es:

$$\begin{aligned}
\phi(a) - \phi(c) &= \frac{\sigma_a a^2}{\epsilon_0 a} + \frac{\sigma_b b}{\epsilon_0} + \frac{5\alpha}{7\epsilon_0}\left(\frac{1}{c^{2/7}} - \frac{1}{b^{2/7}}\right) - \frac{a^2\sigma_a + b^2\sigma_b - \frac{2\alpha}{7}\left(c^{5/7} - b^{5/7}\right)}{\epsilon_0 c} \\
&= \frac{(1 - a/c)a\sigma_a}{\epsilon_0} + \frac{(1 - b/c)b\sigma_b}{\epsilon_0} + \frac{\alpha}{\epsilon_0 c^{2/7}}\left[1 - \frac{2}{7}\left(\frac{b}{c}\right)^{5/7} - \frac{5}{7}\left(\frac{c}{b}\right)^{2/7}\right]. \qquad (16)
\end{aligned}$$

■