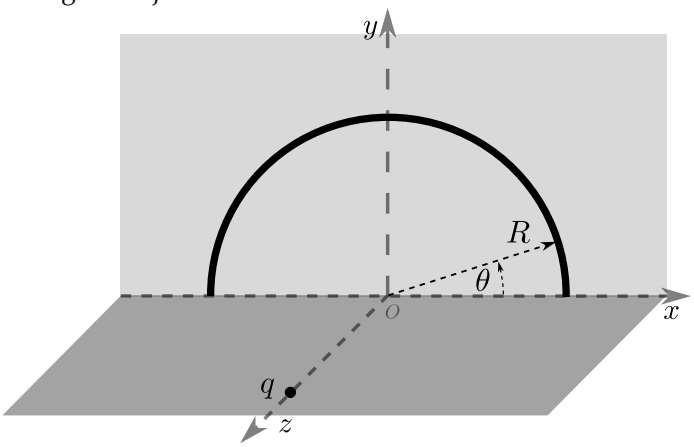
Interrogación I

Fecha: 11 de octubre 2024

1. En la figura adjunta se muestra un semi anillo de plástico en el plano xy de radio R que posee una distribución lineal de carga determinada por $\lambda = \lambda_0 cos(\theta)$ [C/m], y a una carga puntual q ubicada a una distancia R a lo largo del eje z del centro de curvatura O.



Determinar:

a) La energía potencial a la cual se encuentra la carga q. (2 puntos)

b) El trabajo necesario para mover la carga q desde $z = R$ hasta $z = 0$ por el eje. (2 puntos)

c) El valor de la carga contenida en el semi anillo. (2 puntos)

Solución:
a) La energía potencial almacenada en el sistema está dada por

$$U = qV(z = R) \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

donde, $V(z = R)$ es el potencial electrostático generado por el anillo en la posición de la carga q, el cual está dado por:

$$V(z = R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi} \frac{dq(\theta)}{r} \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

donde

$$dq(\theta) = \lambda_0 cos(\theta) R d\theta \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

$$r = R\sqrt{2}\,.$$

Finalmente el potencial está dado por:

$$V(z = R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda_0 cos(\theta) R d\theta}{R\sqrt{2}} = 0\,. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

En consecuencia, la energía almacenada en el sistema es cero.

■

b) El trabajo necesario está dado por

$$W = q\left(V(z=0) - V(z=R)\right) = qV(z=0)\,. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Luego el potencial en $z=0$ está dado por

$$V(z=0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{dq(\theta)}{r} \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

donde

$$dq(\theta) = \lambda_0 cos(\theta) R d\theta \qquad \text{(0.5 pts.)}$$
$$r = R\,.$$

Finalmente el potencial está dado por:

$$V(z=0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda_0 cos(\theta) R d\theta}{R} = 0\,.$$

De esta forma

$$W = 0\,. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

■

c) La carga eléctrica dq contenida en una longitud $ds = Rd\theta$ está determinada por:

$$dq(\theta) = \lambda_0 cos(\theta) R d\theta\,. \qquad \text{(1.0 pts.)}$$

La carga total del semi anillo está dada por:

$$Q = \lambda_0 R\int_0^{\pi} cos(\theta) d\theta = 0\,. \qquad \text{(1.0 pts.)}$$

■

2. Considere un segmento recto muy delgado de longitud L el cual esta cargado con una carga Q uniformemente distribuida a lo largo de este. Suponga que el segmento descansa horizontalmente como se muestra en la figura, donde un extremo esta en la posición $x = 0$ y el otro en la posición $x = L$.



a) Calcule el campo eléctrico, $\vec{E}$, en un punto P, ubicado sobre el eje x con $x > L$. (2 puntos)

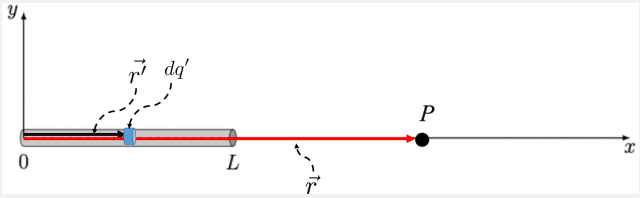
b) Suponga que en el punto P se fija una carga puntual q, del mismo signo de la carga Q. Calcule la energía potencial de la carga q debido a la presencia del segmento cargado. (2 puntos)

c) Suponga que la carga q esta fija en la posición $x = 2\,L$ y además tiene una masa m. Si q se suelta del reposo, se moverá libremente. Determine la velocidad (magnitud y sentido) de la carga q después de que ha transcurrido un tiempo infinito. (2 puntos)

Solución:
a) Para calcular el campo eléctrico en el punto P es necesario usar la fórmula

$$\vec{E} = k \int_{\Omega} \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

donde los vectores posición $\vec{r}$ y $\vec{r}'$ señalan la posición del punto P y del diferencial de carga dq', respectivamente (ver figura).



Se observa que

$$\vec{r} = x\hat{\imath} \qquad \text{y} \qquad \vec{r}' = x'\hat{\imath}$$

con

$$x > L \qquad \text{y} \qquad 0 \leq x' \leq L.$$

La carga, Q, en el segmento esta uniformemente distribuida, por tanto el diferencial de carga se puede expresar como

$$dq' = \lambda\, d\ell$$

donde

$$\lambda = \frac{Q}{L} \qquad \text{y} \qquad d\ell = dx'. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Sustituyendo las definiciones en la fórmula del campo se obtiene

$$\vec{E} = k \int_0^L \frac{\lambda\, dx'}{|x\hat{\imath} - x'\hat{\imath}|^3} (x - x')\hat{\imath} \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Ya que $x > x'$ entonces

$$\vec{E} = k\,\lambda \int_0^L \frac{dx'}{(x - x')^2} \hat{\imath} = k\,\lambda \left(\frac{1}{x - L} - \frac{1}{x} \right) \hat{\imath}. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

■

b) La energía potencial de una carga puntual q, situada en el punto P, es debida a la presencia del segmento cargado. La energía potencial obedece la expresión

$$U = q\,V \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

donde V es el potencial que percibe la carga q en el punto P, es decir

$$V = k \int_{\Omega} \frac{dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Sustituyendo las correspondientes definiciones de los vectores posición y diferencial de carga se obtiene que, para $x > x'$,

$$V = k\,\lambda \int_0^L \frac{dx'}{x - x'} = k\,\lambda\,\ln\left|\frac{x}{x-L}\right|. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Nótese que el mismo resultado se puede obtener usando la expresión $\Delta V = -\int \vec{E}\cdot d\vec{r}$.

Entonces la energía potencial que percibe la carga q toma la forma

$$U \;=\; U(x) \;=\; k\,q\,\lambda\,\ln\left|\frac{x}{x-L}\right| \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,Q}{L}\ln\left|\frac{x}{x-L}\right| \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

■

c) Para calcular la rapidez en el infinito se puede usar la conservación de la energía, es decir

$$U(x = 2L) = K(x = \infty) \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

donde K es la energía cinética.
Para $x = 2L$ se obtiene

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,Q}{L}\ln\left|\frac{2L}{2L-L}\right| = \frac{m\,v_\infty^2}{2}. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Por tanto

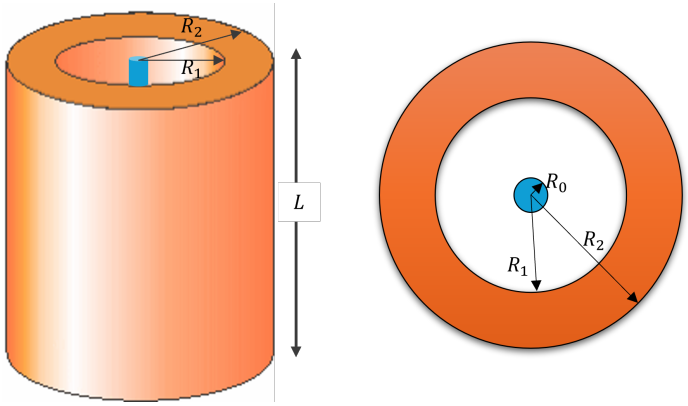
$$v_\infty = \sqrt{\frac{q\,Q\,\ln 2}{2\pi\varepsilon_0\,m\,L}}. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Como las cargas tienen el mismo signo se repelen. Esto implica que la carga q se desplaza en el sentido positivo del eje x. Por tanto

$$\vec{v}_\infty = \sqrt{\frac{q\,Q\,\ln 2}{2\pi\varepsilon_0\,m\,L}}\;\hat{\imath}. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

■

3. Una carga $+Q$ se encuentra distribuida uniformemente a lo largo de un alambre conductor de largo L y radio R_0. Un cascarón cilíndrico conductor con carga $-Q$, radio interno R_1, radio externo R_2 y largo L es ubicado concéntrico al alambre (ver figura). Nótese que: $R_0 < R_1 < R_2 \ll L$.



Calcule:

a) Las densidades de carga superficiales en las capas interna y externa del cascarón, y también la densidad volumétrica dentro de éste. (2 puntos)

b) El campo eléctrico en todo el espacio externo al alambre ($r > R_0$). Para facilitar el cálculo suponga que los largos del alambre y el cilindro son infinitos ($L \to \infty$) pero su densidad de carga permanece inalterada. (2 puntos)

c) La diferencia de potencial, $\Delta V = V_{\text{cilindro}} - V_{\text{alambre}}$, entre el cilindro y el alambre, la capacitancia del sistema y la energía almacenada. (2 puntos)

Solución:
a) La densidad de carga superficial en el radio interno R_1 está dado por:

$$\sigma_1 = \frac{-Q}{2\pi R_1 L}\,. \qquad \text{(1 pto.)}$$

Ya que la carga total el en cilindro es $-Q$, la densidad de carga superficial en el radio externo R_2 es:

$$\sigma_2 = 0 \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

y la densidad de carga volumétrica $\rho = 0$. Esto se debe a que, en equilibrio, el campo eléctrico en el interior de un conductor es cero, lo que significa que no hay carga presente en esa región. En un material conductor todas las cargas se distribuyen en su superficie. (0.5 pts.)

■

b) Para calcular el campo eléctrico en todo el espacio vamos a utilizar la ley de Gauss:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} .$$

1. En la región $r < R_1$: Escogemos una superficie Gaussiana cilíndrica de radio $r < R_1$. La carga encerrada en esta superficie es $+Q$. Así:

$$E(r)(2\pi rL) = \frac{Q}{\epsilon_0} .$$

Por lo tanto:

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 rL} . \quad (0.5 \text{ pts.})$$

2. En la región $R_1 < r < R_2$: La superficie Gaussiana se encuentra dentro del conductor, por lo tanto el campo eléctrico es cero.

$$\vec{E}(r) = 0 . \quad (0.5 \text{ pts.})$$

3. En la región $r > R_2$: La carga encerrada por la superficie Gaussiana es cero, por lo tanto el campo eléctrico es cero

$$Q_{enc} = +Q - Q = 0 . \quad (0.5 \text{ pts.})$$

Por lo tanto:

$$\vec{E}(r) = 0 . \quad (0.5 \text{ pts.})$$

■

c) La diferencia de potencial entre el cilindro y el alambre es

$$\Delta V = V_{cilindro} - V_{alambre} = -\int_{R_0}^{R_1} \vec{E}(r) \cdot d\vec{r}$$

es decir

$$\Delta V = -\int_{R_0}^{R_1} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 rL}\, dr = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 rL}\int_{R_0}^{R_1} \frac{dr}{r} \quad (0.5 \text{ pts.})$$

y pro lo tanto

$$\Delta V = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L}[\ln R_1 - \ln R_0] = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L}\ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right) . \quad (0.5 \text{ pts.})$$

La capacitancia se define como:

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L}\ln(R_1/R_0)} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_1/R_0)} . \quad (0.5 \text{ pts.})$$

La energía almacenada en el capacitor está dado por:

$$U = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

así que

$$U = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 L}\ln(R_1/R_0) . \quad (0.5 \text{ pts.})$$

■