P1]

a) Usando ley de Gauss en los materiales dieléctricos

$a < r < b$: $\oint \vec{D}_1 \cdot d\vec{a} = Q$

$D_1 2\pi r L = Q \Rightarrow \vec{D}_1 = \frac{Q}{2\pi r L}\hat{r}$

$\therefore \vec{E}_1 = \frac{\vec{D}_1}{\varepsilon_1} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_1 r L}\hat{r}$

$b < r < c$: $\oint \vec{D}_2 \cdot d\vec{a} = Q$

$D_2 2\pi r L = Q \Rightarrow \vec{D}_2 = \frac{Q}{2\pi r L}\hat{r}$

$\therefore \vec{E}_2 = \frac{\vec{D}_2}{\varepsilon_2} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_2 r L}\hat{r}$ 1p

La polarización está dada por

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}$

Entonces

$\vec{P}_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\vec{E}_1 = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)Q}{2\pi\varepsilon_1 L r}\hat{r}$

$\vec{P}_2 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\vec{E}_2 = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)Q}{2\pi\varepsilon_2 L r}\hat{r}$ 1p

b) La densidad de carga de polarización en cada medio está dada por $\sigma_1 = \vec{P}_1 \cdot \hat{n}\Big|_{r=b}$ y $\sigma_2 = \vec{P}_2 \cdot \hat{n}\Big|_{r=b}$

$$\Rightarrow \quad \sigma_1 = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) Q}{2\pi \varepsilon_1 L b} \hat{r} \cdot (\hat{r}) = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) Q}{2\pi \varepsilon_1 L b} \quad 1p$$

$$\sigma_2 = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)}{2\pi \varepsilon_2 L b} \hat{r} \cdot (-\hat{r}) = -\frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_0) Q}{2\pi \varepsilon_2 L b} \quad 1p$$

c) La capacitancia del sistema esta dada por $C = \frac{Q}{\Delta V}$

donde $\Delta V = \int_c^c \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}$

$$\Delta V = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_1 L} \int_a^b \frac{dr}{r} + \frac{Q}{2\pi \varepsilon_2 L} \int_b^c \frac{dr}{r}$$

$$\Delta V = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_1 L} \ln(b/a) + \frac{Q}{2\pi \varepsilon_2 L} \ln(c/b) \quad 1p$$

Por lo tanto

$$C = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi L}\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\ln(b/a) + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln(c/b)\right]} = \frac{2\pi L}{\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln\left(\frac{c}{b}\right)}$$

1p

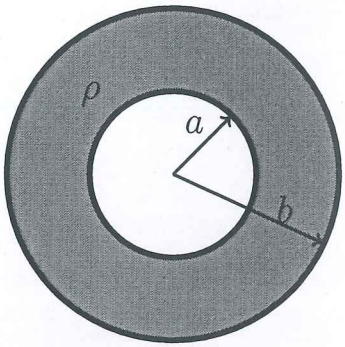
Nombre: _____

RUT: _____

N lista: _____

Problema 2 [6 puntos]

Se tienen dos objetos concéntricos conductores de radios a y b ($a < b$). Estos objetos se mantienen cada uno a potenciales constantes. El espacio entre los objetos se llena con un material Ohmico de resistividad ρ como se muestra en la figura. Suponga que entre los conductores concéntricos circula una densidad corriente estacionaria $\vec{J} = \frac{k}{r^2}\hat{r}$, donde k es una constante positiva ($k > 0$).



a) Usando $\vec{J}$ y la ley de la conservación de carga determine y argumente si los objetos son cascarones esféricos o cilíndricos (*considere r como la distancia al centro del sistema de referencia en coordenadas esféricas y como la distancia al eje z en coordenadas cilíndricas*)[1.5 puntos].

b) Calcule la corriente total I entre a y b [1.5 puntos].

c) Si el campo eléctrico en la región entre a y b es $\vec{E} = \frac{C}{r^2}\hat{r}$, donde C es una constante positiva ($C > 0$). ¿cuánto vale entonces la resistividad ρ? [1 punto]

d) Calcule la diferencia de potencial en la región entre entre a y b [1 punto].

e) Calcule la resistencia total del sistema [1 punto].

a) & b)

$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{a}$

Cilindro: $d\vec{a}_c \sim r \, d\varphi \cdot \hat{r} \, dz$

esfera: $d\vec{a}_e \sim r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi \cdot \hat{r}$ } 1

1 $\Rightarrow$ $\vec{j} \cdot d\vec{a}_c \sim \frac{1}{r}$ ↯ no puede ser por conservacion de carga

$\vec{j} \cdot d\vec{a}_e \sim$ cte. ✓ No depende de "r"

$\Rightarrow$ es una esfera

1 $I = \int \vec{j} \cdot d\vec{a}_e = 4\pi \cdot k$

c) $\vec{E} = \frac{C}{r^2}\hat{r}$

$\vec{E} = \rho \vec{J}$ $\frac{1}{2}$

$\frac{C}{r^2}\hat{r} = \rho \frac{K}{r^2}\hat{r} \Rightarrow \rho = \frac{C}{K}$ $\frac{1}{2}$

d) $\Delta V \overset{\frac{1}{2}}{=} \int_a^b d\vec{s}\, \vec{E} = \int_a^b dr\, \hat{r}\cdot\hat{r}\, \frac{C}{r^2}$

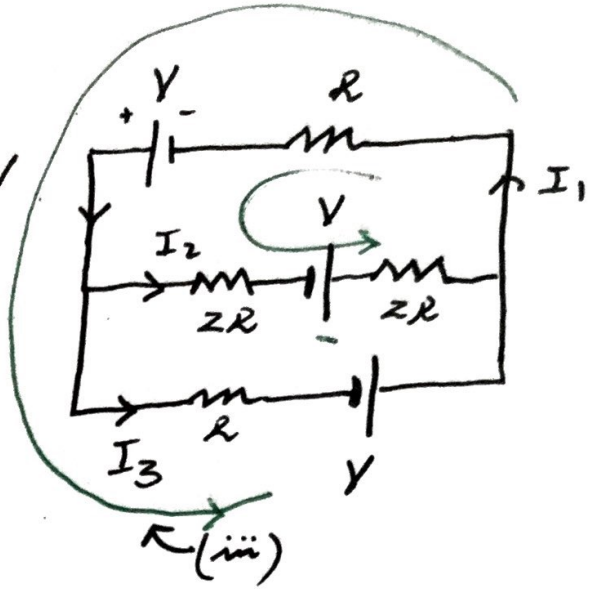
$= C \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$ $\frac{1}{2}$

e) $R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{C}{4\pi K} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$ 1

$\left[= \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \right]$ no es necesario

3.

a) Tomamos de las leyes de Kirchhoff



(i) $I_1 = I_2 + I_3$

1/2 (Ec. de corrientes)

(ii) $V - 2I_2R + V - 2I_2R - I_1R = 0$ 3/4

(iii) $V - I_3R + V - I_1R = 0$ 3/4

De (ii) y (iii) mantenemos:

$$I_3R = 4I_2R$$

$$\Rightarrow \quad I_3 = 4I_2 \quad (iv)$$

Usando en (i): $I_1 = I_2 + 4I_2 = 5I_2$ (v)

Usando otra en (ii):

$$2V = 4I_2R + I_1R = 9I_2R$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{2}{9}\frac{V}{R}$$

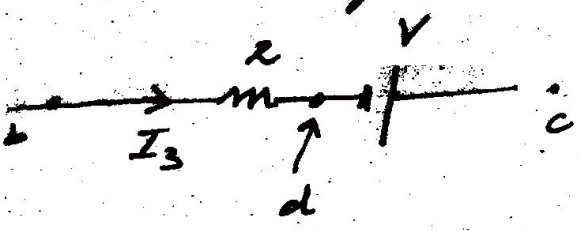
Usando (iv) y (v):

$$I_1 = \frac{10}{9}\frac{V}{R},$$

$$I_3 = \frac{8}{9}\frac{V}{R}.$$

Si el desarrollo está correcto, pon 1punto
Si encuentra una sóla corriente correctamente pon 0.5.
Si encuentra sólo dos corrientes, pon 0.75
Si no encuentra corrientes, pero el desarrollo tiene sentido pon 0.3 puntos.

b) Es el voltaje entre



1punto

$$V_c - V_b = V + (V_a - V_b) = V - I_3 R .$$

1 punto

c)

$$P = I_1 \cdot (V_c - V_a) = I_1^2 \cdot R .$$

1 punto

4.

a) Las resistencias están en serie

$$R_{ab} = R_1 + R_2 + R_3 \qquad 0.5$$

$$= \rho\left(\frac{\ell}{A} + \frac{\ell/2}{2A/3} + \frac{\ell}{A}\right) \qquad 0.5$$

$$= \frac{\rho\ell}{A}\left(2 + \frac{3}{4}\right). \qquad 0.5$$

b) De la ley de Ohm

$$E = \rho J \qquad 0.5$$

donde $J = \frac{I}{A}$ es la densidad de corriente. 0.5

$$\Rightarrow \quad E = \rho\frac{I}{A}. \qquad 0.5$$

5.

a) En equilibrio C_1 y C_2 están a la misma diferencia de potencial.

Esta observación tiene 0.5 puntos que corresponden a la parte b).

$$\Rightarrow \quad V_1 = V_2$$

Por la fórmula de capacitancia: $C = \frac{Q}{V}$

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \Rightarrow Q_1 = \frac{C_1}{C_2} Q_2 \cdot \quad 0.5$$

Además, $Q = Q_1 + Q_2 \cdot \quad 0.5$

$$\Rightarrow \quad Q = \frac{C_1}{C_2} Q_2 + Q_2 = \left(\frac{C_1 + C_2}{C_2}\right) Q_2$$

$$\Rightarrow \quad Q_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} Q \cdot$$

y $\quad Q_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} Q \cdot \quad 0.5$

b) $\quad V_1 = V_2 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q}{C_1 + C_2}$ 1 punto