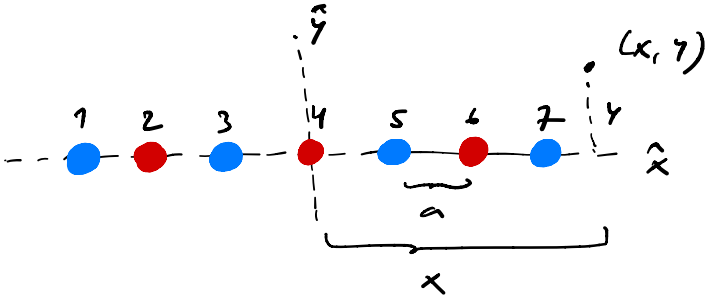
EJ. 1:



a)

Tomamos el punto (x,y). Las contribuciones al potencial de cada carga al potencial total, según la nomenclatura mostrada en la figura, son:

$$\varphi_1(x,y) = \frac{-ke}{\sqrt{(x+3a)^2+y^2}}, \qquad \varphi_2(x,y) = \frac{+ke}{\sqrt{(x+2a)^2+y^2}}$$

$$\varphi_3(x,y) = \frac{-ke}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}, \qquad \varphi_4(x,y) = \frac{ke}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\varphi_5(x,y) = \frac{-ke}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}, \qquad \varphi_6(x,y) = \frac{ke}{(x-2a)^2+y^2}$$

$$\varphi_7(x,y) = \frac{-ke}{\sqrt{(x-3a)^2+y^2}}$$

(0.2 puntos por cada uno)

(0.1 por sumarlos)

Finalmente

$$\varphi(x,y) = \frac{ke}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{ke}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} - \frac{ke}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}$$

$$\frac{ke}{(x-2a)^2+y^2} + \frac{ke}{\sqrt{(x+2a)^2+y^2}} - \frac{ke}{\sqrt{(x-3a)^2+y^2}} - \frac{ke}{\sqrt{(x+3a)^2+y^2}}$$

Note que esto se puede escribir

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{7} \frac{(-1)^i k\, e}{\sqrt{(x+(4-i)a)^2 + y^2}}$$

(o 1.5 si lo escribe así)

b) El campo está dado por

$$\vec{E}(x,y) = -\vec{\nabla}\varphi = -\sum_{i=1}^{7} \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(-1)^i k\, e}{\sqrt{(x+(4-i)a)^2 + y^2}}\right]\hat{x}$$

$$-\sum_{i=1}^{7} \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(-1)^i k\, e}{\sqrt{(x+(4-i)a)^2 + y^2}}\right]\hat{y}$$

$$= \sum_{i=1}^{7} \frac{(-1)^i k e\,(x+(4-i)a)}{\left[(x+(4-i)a)^2 + y^2\right]^{3/2}}\hat{x} + \frac{(-1)^i k\, e\, y}{\left[(x+(4-i)a)^2 + y^2\right]^{3/2}}\hat{y}$$

0.75 puntos por componente ya sea lo escriba explícito o con sumatoria.

o por componentes:

$$E_x(x,y) = \sum_{i=1}^{7} \frac{(-1)^i k e\,(x+(4-i)a)}{\left[(x+(4-i)a)^2 + y^2\right]^{3/2}}$$

$$= -\frac{ke(x+3a)}{\left[(x+3a)^2+y^2\right]^{3/2}} + \frac{ke(x+2a)}{\left[(x+2a)^2+y^2\right]^{3/2}} - \frac{ke(x+a)}{\left[(x+a)^2+y^2\right]^{3/2}} + \frac{kex}{(x^2+y^2)}$$

$$- \frac{ke(x-a)}{\left[(x-a)^2+y^2\right]^{3/2}} + \frac{ke(x-2a)}{\left[(x-2a)^2+y^2\right]^{3/2}} - \frac{ke(x-3a)}{\left[(x-3a)^2+y^2\right]^{3/2}}$$

$$E_y(x,y) = \sum_{i=1}^{7} \frac{(-1)^i k e y}{\left[(x+(4-i)a)^2 + y^2\right]^{3/2}}$$

$$= -\frac{key}{\left[(x+3a)^2+y^2\right]^{3/2}} + \frac{key}{\left[(x+2a)^2+y^2\right]^{3/2}} - \frac{key}{\left[(x+a)^2+y^2\right]^{3/2}} + \frac{key}{(x^2+y^2)}$$
$$- \frac{key}{\left[(x-a)^2+y^2\right]^{3/2}} + \frac{key}{\left[(x-2a)^2+y^2\right]^{3/2}} - \frac{key}{\left[(x-3a)^2+y^2\right]^{3/2}}$$

c) La carga sentirá una fuerza

$$\vec{F} = -e\,\vec{E}(2a, 2a)$$

$$= -e\left[\sum_{i=1}^{7} \frac{(-1)^i k e (2a+(4-i)a)}{\left[(2a+(4-i)a)^2+(2a)^2\right]^{3/2}}\hat{x} + \frac{(-1)^i k e (2a)}{\left[(2a+(4-i)a)^2+(2a)^2\right]^{3/2}}\hat{y}\right]$$

$$= -\frac{ke^2}{a^2}\sum_{i=1}^{7} \frac{(-1)^i (6-i)}{\left[(6-i)^2+4\right]^{3/2}}\hat{x} + \frac{(-1)^i \cdot 2}{\left[(6-i)^2+4\right]^{3/2}}\hat{y}$$

Por componentes:

(0.5 puntos por componente ya sea lo escriba explícito o con sumatoria.)

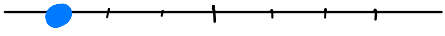
$$F_x = -\frac{ke^2}{a^2}\left[-\frac{5}{(5^2+4)^{3/2}} + \frac{4}{(4^2+4)^{3/2}} - \frac{3}{(3^2+4)^{3/2}} + \frac{2}{(2^2+4)^{3/2}} - \frac{1}{(1+4)^{3/2}} + 0 - \frac{(-1)}{((-1)^2+4)^{3/2}}\right]$$

$$= \frac{ke^2}{a^2}\left(\frac{5}{29^{3/2}} - \frac{4}{20^{3/2}} + \frac{3}{13^{3/2}} - \frac{2}{8^{3/2}}\right)$$

$$F_y = -\frac{ke^2}{a^2}\left[-\frac{2}{(5^2+4)^{3/2}} + \frac{2}{(4^2+4)^{3/2}} - \frac{2}{(3^2+4)^{3/2}} + \frac{2}{(2^2+4)^{3/2}} - \frac{2}{(1+4)^{3/2}} + \frac{2}{4^{3/2}} - \frac{2}{((-1)^2+4)^{3/2}}\right]$$

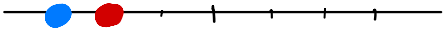
$$= \frac{2ke^2}{a^2}\left(\frac{1}{29^{3/2}} - \frac{1}{20^{3/2}} + \frac{1}{13^{3/2}} - \frac{1}{8^{3/2}} + \frac{2}{5^{3/2}} - \frac{1}{4^{3/2}}\right)$$

d) Calculemos los trabajos necesarios para traer cada carga:



Carga 1:

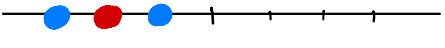
$W_1 = 0$ (no hay $\vec{E}$ al traerla)



Carga 2:

$$W_2 = e\,\varphi_1 = e\,\frac{k(-e)}{a}$$

$$= -\frac{ke^2}{a}$$



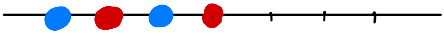
Carga 3:

El campo lo genera 2 cargas.

$$W_3 = -e\,\varphi_1 - e\,\varphi_2$$

$$= -e\cdot\left(\frac{-e}{2a}\right) - e\left(\frac{e}{a}\right)$$

$$= \frac{ke^2}{2a} - \frac{ke^2}{a}$$



Carga 4:

$$W_4 = \frac{-ke^2}{3a} + \frac{ke^2}{2a} - \frac{ke^2}{a}$$



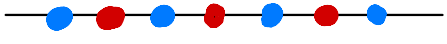
Carga 5:

$$W_5 = \frac{ke^2}{4a} - \frac{ke^2}{3a} + \frac{ke^2}{2a} - \frac{ke^2}{a}$$



Carga 6:

$$W_6 = -\frac{ke^2}{5a} + \frac{ke^2}{4a} - \frac{ke^2}{3a} + \frac{ke^2}{2a} - \frac{ke^2}{a}$$



Carga 7:

$$W_7 = \frac{ke^2}{6a} - \frac{ke^2}{5a} + \frac{ke^2}{4a} - \frac{ke^2}{3a} + \frac{ke^2}{2a} - \frac{ke^2}{a}$$

El trabajo total para formar la configuración es:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 + W_6 + W_7$$

$$= \frac{ke^2}{6a} - \frac{ke^2}{5a} + \frac{ke^2}{4a} - \frac{ke^2}{3a} + \frac{ke^2}{2a} - \frac{ke^2}{a}$$
$$- \frac{ke^2}{5a} + \frac{ke^2}{4a} - \frac{ke^2}{3a} + \frac{ke^2}{2a} - \frac{ke^2}{a}$$
$$+ \frac{ke^2}{4a} - \frac{ke^2}{3a} + \frac{ke^2}{2a} - \frac{ke^2}{a}$$
$$- \frac{ke^2}{3a} + \frac{ke^2}{2a} - \frac{ke^2}{a}$$
$$+ \frac{ke^2}{2a} - \frac{ke^2}{a}$$
$$- \frac{ke^2}{a}$$

* 0.15 por cada W (entre $W_2 \ldots, W_7$) 0.1 por sumarlos.

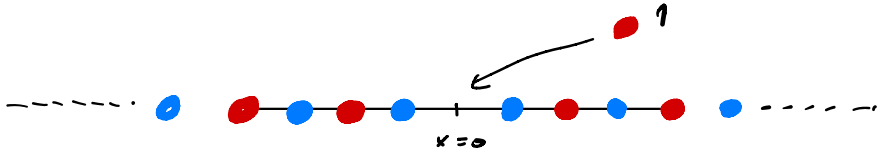
* 0 ó 1 punto si escribe la suma en un paso, de forma correcta. (sin escribir los $\{W_i\}$).

Es decir:

$$W = \frac{ke^2}{6a} - \frac{2ke^2}{5a} + \frac{3ke^2}{4a} - \frac{4ke^2}{3a} + \frac{5ke^2}{2a} - \frac{6ke^2}{a}$$

$$= \frac{ke^2}{a}\left[-6 + \frac{5}{2} - \frac{4}{3} + \frac{3}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6}\right]$$

e) tomamos $x=0$ como referencia



El trabajo necesario para poner la carga en ese punto será:

$$W = e\,\varphi(x=0) = e\left[2\cdot\frac{k(-e)}{a} + 2\cdot\frac{ke}{2a} + 2\cdot\frac{k(-e)}{3a} + 2\cdot\frac{ke}{4a} + 2\cdot\frac{k(-e)}{5a} + \cdots\right]$$

0.5 pts

El factor 2 viene de que hay cargas a ambos lados a la misma distancia.

Entonces:

$$W = -\frac{2ke^2}{a}\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots\right]$$

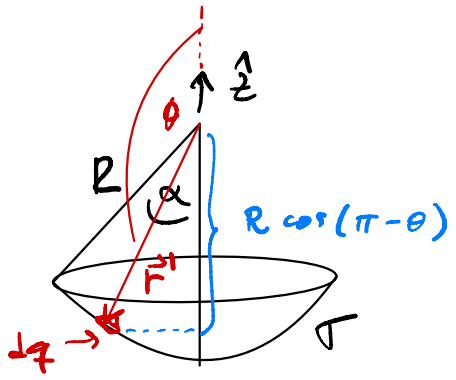
0.4 pts.

Es decir:

$$W = -\frac{2ke^2}{a} \ln 2 \quad .$$

0.1 pts.

Ej. 2:



a) Tomemos un elemento del cascarón en la posición $\vec{r}'$, formando un ángulo θ con el eje $\hat{z}$. Contribuye al campo total en $\vec{r}=0$ con:

$$d\vec{E} = k\frac{dq}{R^3}(-\vec{r}').$$

Por simetría, en ese punto, el campo solo puede apuntar en $\hat{z}$. Pero la componente $\hat{z}$ de $\vec{r}'$ es $-R\cos(\pi-\theta) = R\cos\theta$ (ver figura), Luego

$$\vec{E}(\vec{r}=0) = \int d\vec{E} = \int \frac{k\,dq}{R^3}\cdot -R\cos\theta\ \hat{z}$$

por otro lado $dq = \sigma R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$, Luego

$$\vec{E}(\vec{r}=0) = -\int_0^{2\pi}\int_{\pi-\alpha}^{\pi} \frac{k\sigma R\cos\theta}{R^3}\cdot R^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi\ (\hat{z})$$

$$= -2\pi k\sigma \int_{\pi-\alpha}^{\pi} \sin\theta\cos\theta\, d\theta\ \hat{z} = \pi k\sigma \cos^2\theta\Big|_{\pi-\alpha}^{\pi}\hat{z}$$

$$= \pi k\sigma\left(1-\cos^2(\pi-\alpha)\right)\hat{z} = \pi k\sigma \sin\alpha\ \hat{z}$$

$(-\cos\alpha)^2$

* Plantea integral en forma consistente 1.5 pts.
* Calcula integral y llega al resultado 1 pt.

b) Para el potencial:

$$\varphi = \int \frac{k\,dq}{R} = \int_0^{2\pi}\int_{\pi-\alpha}^{\pi} \frac{k\sigma \cdot R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi}{R}$$

$$= 2\pi k\sigma R \int_{\pi-\alpha}^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$= 2\pi k\sigma R\,(-\cos\theta)\Big|_{\pi-\alpha}^{\pi}$$

$$= 2\pi k\sigma R\,(1-\cos\alpha)$$

* Plantea integral en forma consistente 1.5 pts.
* Calcula integral y llega al resultado 1 pt.

c) Si $\alpha \to \pi$:

$$\vec{E} = 0 \qquad \text{0,5 pts.}$$

$$\varphi = 4\pi k\sigma R \qquad \text{0,5 pts.}$$

Si la esfera tiene carga total Q:

$$\varphi = 4\pi k \left(\frac{Q}{4\pi R^2}\right) R = \frac{kQ}{R}$$

Pauta de desarrollo ejercicio 3 I1

FIS1533

El campo eléctrico resultante en el interior de la cavidad es la superposición de los dos campos uno E_+ debido a una esfera uniforme de carga neta positiva y radio R $= 2a$ y otro campo $E_$ debido otra esfera uniforme de radio R $= a$, centrada en la cavidad.

Sabiendo que:

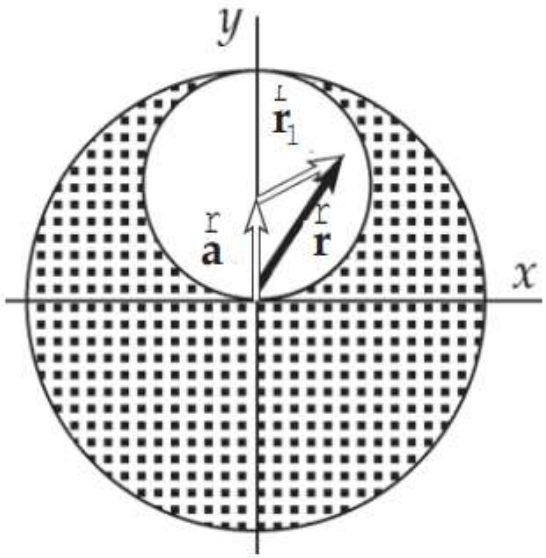
1. $A_{esf} = 4\pi r^2$
2. $V_{esf} = \frac{4}{3}\pi r^3$

Usamos la ley de Gauss para las esferas de carga neta positiva y negativa obteniendo respectivamente:

$$\frac{4}{3}\frac{\pi r^3 \rho}{\varepsilon_0} = 4\pi r^2 E_+ \longrightarrow \frac{1}{3}\frac{r\rho}{\varepsilon_0}\hat{r} = \vec{E}_+ = \frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0}\vec{r} \quad \text{(1pt)}$$

$$-\frac{4}{3}\frac{\pi r_1^3 \rho}{\varepsilon_0} = 4\pi r_1^2 E_- \longrightarrow \frac{1}{3}\frac{r_1\rho}{\varepsilon_0}(-\hat{r}) = \vec{E}_- = \frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0}(-\vec{r}_1) \quad \text{(1pt)}$$

Considerando el esquema, procedemos a construir el vector de posición relativa:



$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{r}_1 \qquad (1\text{pt})$$

Con esto podemos escribir el campo del a esfera de carga neta negativa en función de $\vec{r}$ y $\vec{a}$,

$$\vec{E}_- = \frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0}(-\vec{r}_1) = -\frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0}(\vec{r} - \vec{a}) \qquad (1\text{pt})$$

Entonces implemente sumando ambos campos obtenemos el campo neto en cualquier punto dentro de la cavidad, esto es:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0}\vec{r} - \frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0}(\vec{r} - \vec{a}) = 0\hat{\imath} + \frac{1}{3}\frac{\rho a}{\varepsilon_0}\hat{\jmath} \ \left(\frac{N}{C}\right) \qquad (2\text{pt})$$

Ej. 4

a) Dada la simetría cilíndrica del problema, es posible usar la Ley de Gauss. Para encontrar las densidades de cargas inducidas en las superficies conductoras σ_a y σ_b se aplica Gauss para un $r \in [a, b]$ 2.0

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_a \cdot 2\pi a L}{\varepsilon_0}$$

Por una parte dentro de un conductor siempre $\vec{E} = 0$, por lo que $\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$. Luego se debe cumplir que

$$\frac{\sigma_a \cdot 2\pi a L}{\varepsilon_0} = 0 \Longrightarrow \sigma_a = 0 \qquad 0.5$$

Como el conductor interior está cargado con $+Q$, las densidades de sobre sus superficies deben cumplir que

$$\sigma_a \cdot 2\pi a L + \sigma_b \cdot 2\pi b L = Q \Longrightarrow \sigma_b = \frac{Q}{2\pi b L} \qquad 0.5$$

Análogamente, al aplicar Gauss para $r \in [c, d]$ se tiene que

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{Q + \sigma_c \cdot 2\pi c L}{\varepsilon_0} = 0 \Longrightarrow \sigma_c = -\frac{Q}{2\pi c L} \qquad 0.5$$

Finalmente como el conductor está cargado $-Q$ se tiene que

$$\sigma_c \cdot 2\pi c L + \sigma_d \cdot 2\pi d L = -Q \Longrightarrow \sigma_d = 0 \qquad 0.5$$

b) Para determinar el potencial, previamente hay que determinar el campo eléctrico. En base a lo anterior para $r < b$ se tiene $q_{enc} = 0$, luego 2.0

$$\vec{E} = 0 \qquad 0.2$$

Para $r \in (b, c)$ se tiene $q_{enc} = Q$, por lo que

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E(r) \cdot 2\pi r L = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \vec{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r L}\hat{r} \qquad 0.3$$

Luego para $r > c$ nuevamente $q_{enc} = 0$ (notar que toda la carga $-Q$ se acumula en la superficie en $r = c$), entonces

$$\vec{E} = 0 \qquad 0.2$$

Entonces tomando el potencial $V(r \longrightarrow \infty) = 0$, se obtiene que

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Para un $r > c$ se tiene que

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}(r > c) \cdot d\vec{l} = 0 \qquad 0.3$$

Para $r \in [b, c]$ se tiene que

$$V(r) = -\int_{\infty}^{c} \vec{E}(r > c) \cdot d\vec{l} - \int_{c}^{r} \vec{E}(b < r < c) \cdot d\vec{l} = -\int_{c}^{r} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r L} dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln\left(\frac{c}{r}\right) \qquad 0.5$$

Finalmente para $r < b$

$$V(r) = -\int_{\infty}^{c} \vec{E}(r > c) \cdot d\vec{l} - \int_{c}^{b} \vec{E}(b < r < c) \cdot d\vec{l} - \int_{b}^{r} \vec{E}(r < b) \cdot d\vec{l} = -\int_{c}^{b} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L r} dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln\left(\frac{c}{b}\right) \qquad 0.5$$

c) La diferencia de potencial está dada por

$$V(c) - V(b) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln\left(\frac{c}{b}\right) \qquad 2.0$$