P1	P2	P3	P4	Nota

FIS1533/FIZ0221 - Interrogación 1

Facultad de Física
Pontificia Universidad Católica de Chile
Primer Semestre 2014
1 de Abril 2014
Tiempo para responder: 90 minutos

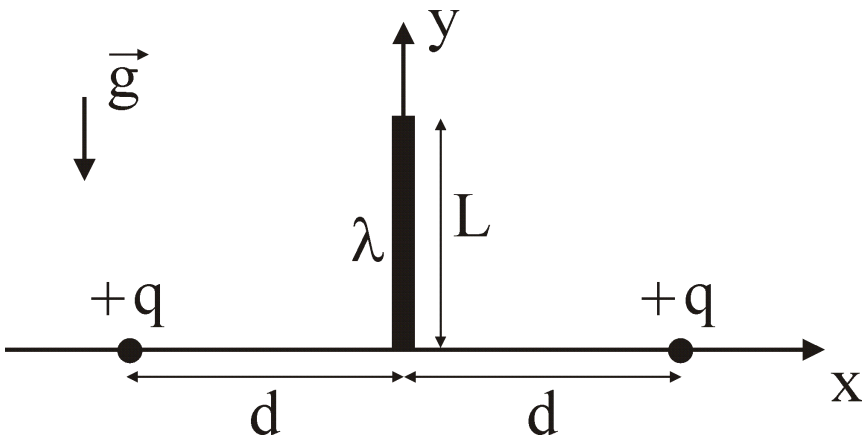
Nombre: _____**Sección:** _____

Atención!

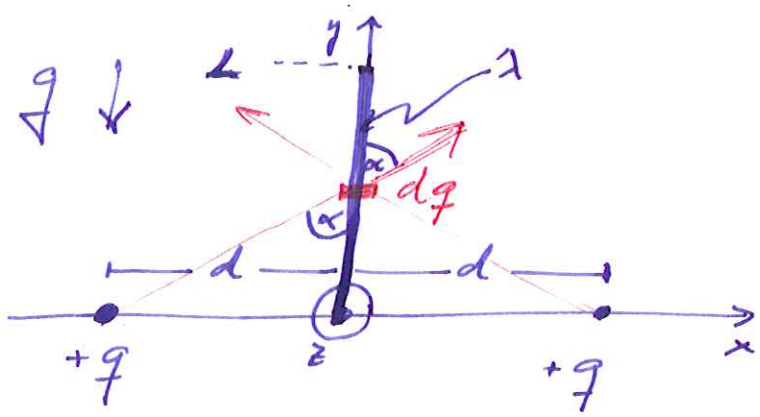
- Si utiliza lápiz de grafito, perderá la posibilidad de reclamar errores de corrección.
- Se puede utilizar la calculadora.
- El profesor no se hace responsable de las respuestas que los ayudantes puedan dar a sus consultas durante el examen.

Problema 1

En presencia de gravedad se tiene un alambre a lo largo del eje y de ancho depreciable y largo L, como indica la figura. El alambre está cargado con densidad uniforme $\lambda > 0$. En los puntos $-d$ y $+d$ del eje x se tienen dos cargas puntuales positivas q fijas. Si el alambre tiene una masa m calcule la razón m/λ para que el alambre se encuentre en equilibrio.



1.



Calculamos la fuerza de las cargas sobre el alambre. La fuerza sobre un elemento dq apunta, por simetría, en la dirección "y":

$$\Rightarrow \vec{F}_q = F_y \hat{y} \quad (1)$$

$$dF_y = \frac{z}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{y^2+d^2} \cdot \cos\alpha \cdot dq \quad (1)$$

Usamos: $dq = \lambda\, dy$ y $\cos\alpha = \dfrac{y}{\sqrt{y^2+d^2}}$.

$$\Rightarrow F_y = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \int_0^L \frac{y}{(y^2+d^2)^{3/2}}\, dy$$

$$= \frac{d}{dy}\left[\frac{-1}{\sqrt{y^2+d^2}}\right] \quad (1)$$

$$\Rightarrow \underline{F_y = \frac{q\lambda}{2\varepsilon_0\pi}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\sqrt{L^2+d^2}}\right)} \quad (1)$$

La condición de equilibrio es que la suma de las fuerzas sobre la barra sea igual a cero. Esto es

$$\frac{q\lambda}{2\varepsilon_0\pi}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{\sqrt{L^2+d^2}}\right)=mg$$

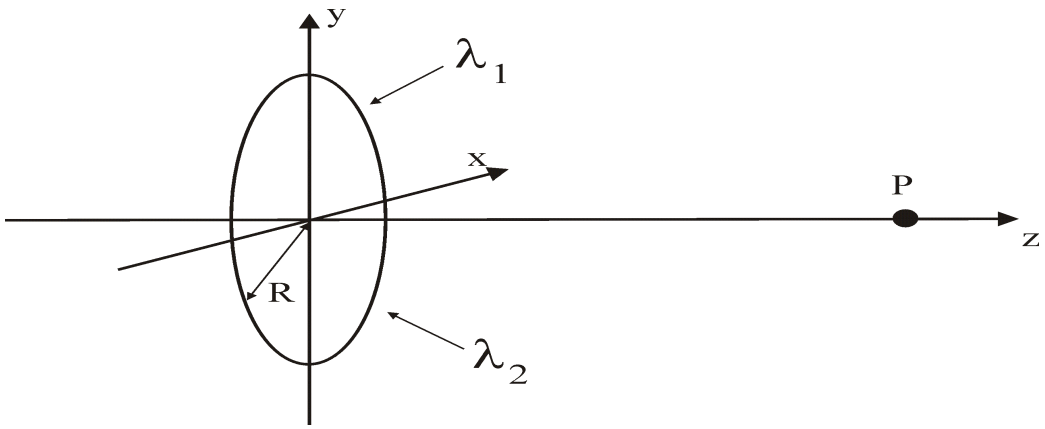
$$\Rightarrow \boxed{\frac{m}{\lambda}=\frac{q}{2g\varepsilon_0\pi}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{\sqrt{L^2+d^2}}\right)}.$$

1

1

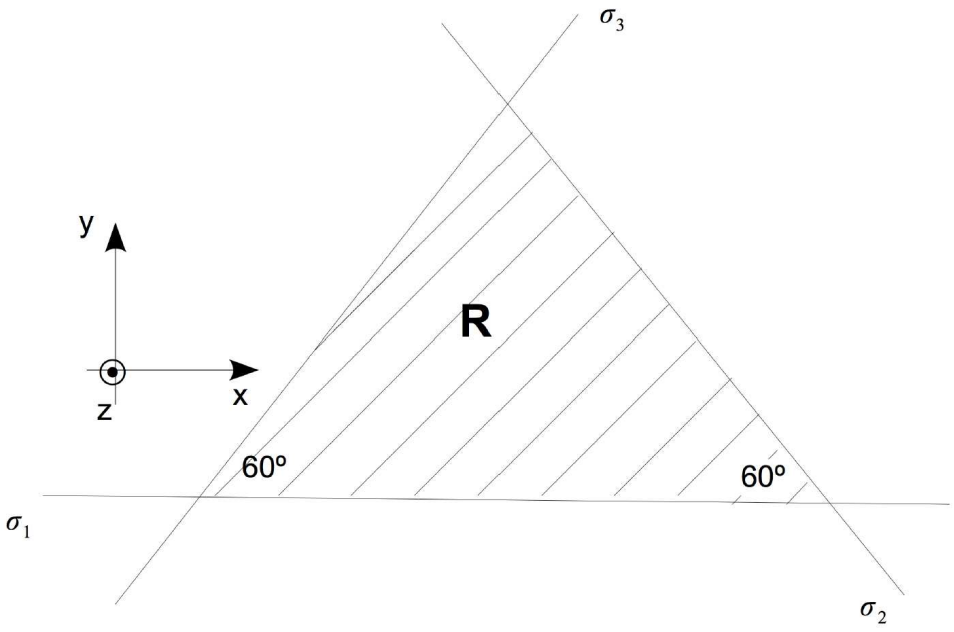
Problema 2

Se tiene un anillo de radio R y de espesor despreciable en el plano $x - y$ centrado en $x = y = 0$. El anillo tiene una densidad de carga lineal uniforme λ_1 para $y > 0$ y λ_2 para $y < 0$ ($\lambda_1 \neq \lambda_2$). Calcule el campo eléctrico producido por el anillo en cualquier punto del eje de simetría z.



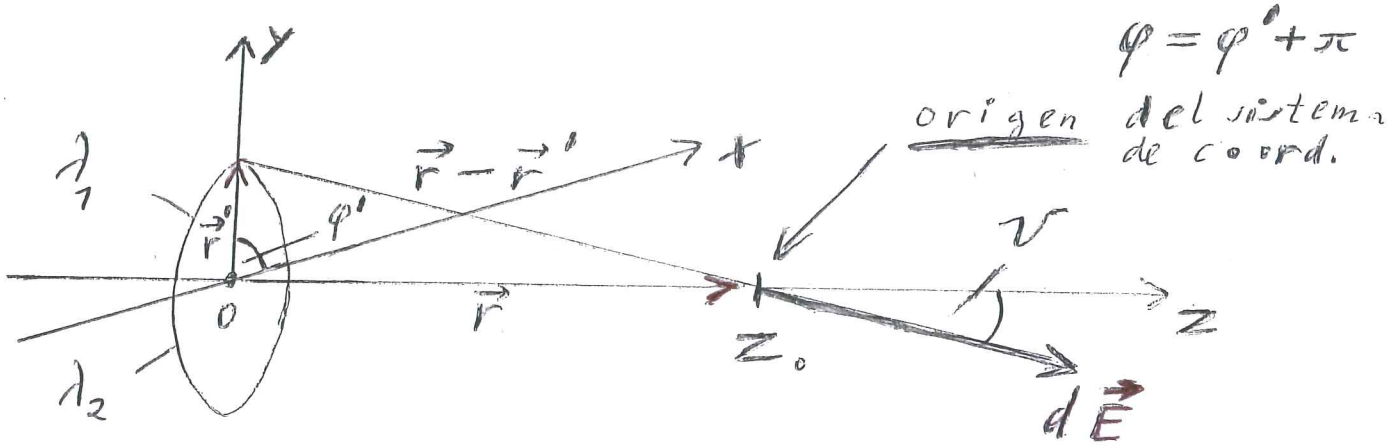
Problema 3

Se tienen tres planos infinitos que se intersectan en un ángulo de 60º con densidad de carga uniforme σ_1, σ_2 y σ_3 como indica la figura. Suponiendo que $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ y $\sigma_3 = 2\sigma$ calcule el vector campo eléctrico en la región R en términos de σ.



Tres planos infinitos cargados todos ortogonales al plano x-y.

Problema 2



$$R = |\vec{r}'| \quad , \quad d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$ (1P)

Coordenadas esféricas: (r, ν, φ)

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|\vec{r}-\vec{r}'| \begin{pmatrix} \sin\nu\cos\varphi \\ \sin\nu\sin\varphi \\ \cos\nu \end{pmatrix}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$= \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\begin{pmatrix} \sin\nu\cos\varphi \\ \sin\nu\sin\varphi \\ \cos\nu \end{pmatrix}}{R^2 + z_0^2}$$

$$dq = \lambda\, d\ell = \lambda R\, d\varphi$$ (1P)

$$d\vec{E} = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+z_0^2)} \begin{pmatrix} \sin\nu\cos\varphi \\ \sin\nu\sin\varphi \\ \cos\nu \end{pmatrix} d\varphi$$

$$\vec{E}_1 = \int d\vec{E}_1 = \frac{\lambda_1 R}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+z_0^2)} \int_{\pi}^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} d\varphi$$

(1P) $$\vec{E}_1 = \frac{\lambda_1 R}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+z_0^2)} \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sin\varphi \\ \pi\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 < \varphi' < \pi \\ \pi < \varphi < 2\pi \end{matrix}$$

(1P) $$\vec{E}_2 = \frac{\lambda_2 R}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+z_0^2)} \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sin\varphi \\ \pi\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \pi < \varphi' < 2\pi \\ 0 < \varphi < \pi \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ (1P) $$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$= \frac{R}{2\pi\varepsilon_0 (R^2+z_0^2)} \begin{pmatrix} 0 \\ (\lambda_2-\lambda_1)\sin\varphi \\ (\lambda_2+\lambda_1)\frac{\pi}{2}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Nota: $$\sin^2\varphi = \frac{R^2}{R^2+z_0^2}$$

$\Rightarrow$ $$\vec{E} = \frac{\sin^2\varphi}{2\pi\varepsilon_0 R} \begin{pmatrix} 0 \\ (\lambda_2-\lambda_1)\sin\varphi \\ (\lambda_2+\lambda_1)\frac{\pi}{2}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

(1P)

también:

$$\vec{E} = \frac{R^2}{2\pi\varepsilon_0 (R^2+z_0^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2-\lambda_1 \\ (\lambda_2+\lambda_1)\frac{\pi}{2} z_0 R^{-1} \end{pmatrix}$$

Problema 3

Se tienen tres planos infinitos que se intersectan en un ángulo de 60° con densidad de carga uniforme σ_1, σ_2 y σ_3 como indica la figura. Suponiendo que $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ y $\sigma_3 = 2\sigma$ calcule el vector campo eléctrico en la región R en términos de σ.

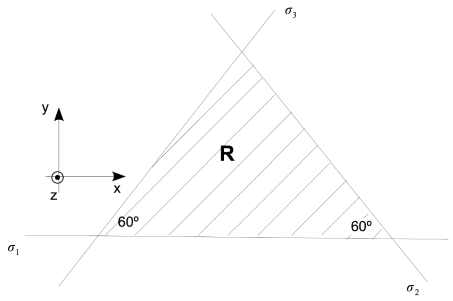


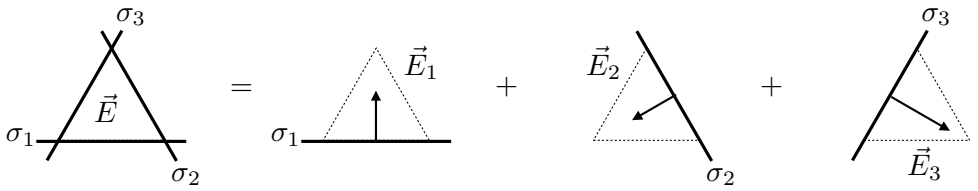
Figure 1: **title.** Description

Solución

El campo eléctrico $\vec{E}$ en el volumen delimitado por los tres planos se puede calcular por superposiciń (2 puntos),

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 \tag{1}$$

donde $\vec{E}_i$ es el campo eléctrico producido por cada uno de los tres planos que muestra la figura.



El campo eléctrico de cada uno de ellos esta dado por (2 puntos),

$$\vec{E}_i = \frac{\sigma_i}{2\varepsilon_0}\hat{n}_i \tag{2}$$

donde σ_i es la densidad superficial de carga del plano i y $\hat{n}_i$ es la normal al plano i.

Las densidades de carga superficiales estan dadas en el enunciado y las normales de cada plano estan dadas por (1 punto),

$$\hat{n}_1 = \hat{\jmath} \tag{3}$$

$$\hat{n}_2 = -\cos(30^\circ)\hat{\imath} - \sin(30^\circ)\hat{\jmath} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\imath} - \frac{1}{2}\hat{\jmath} \tag{4}$$

$$\hat{n}_3 = +\cos(30^\circ)\hat{\imath} - \sin(30^\circ)\hat{\jmath} = +\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\imath} - \frac{1}{2}\hat{\jmath} \tag{5}$$

Reemplazando (1 punto)

$$\vec{E} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\hat{n}_1 + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\hat{n}_2 + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}\hat{n}_3 \tag{6}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\jmath} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\imath} - \frac{1}{2}\hat{\jmath}\right) + \frac{2\sigma}{2\varepsilon_0}\left(+\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\imath} - \frac{1}{2}\hat{\jmath}\right) \tag{7}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\left(\sqrt{3}\hat{\imath} - \hat{\jmath}\right) \tag{8}$$

o bien

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}_3 \tag{9}$$

Problema 4

Un cilindro sólido C_0 de longitud infinita y radio R_0 tiene una densidad de carga volumétrica $\rho(r) = \gamma_0/r$, donde γ_0 es una constante. C_0 está dentro de un cascarón cilíndrico C_1 de largo infinito y de espesor despreciable. C_1 tiene radio R_1 y densidad de carga superficial uniforme σ_1, y es concéntrico con C_0. Se tiene que $R_1 > R_0$, y que $\gamma_0 > 0$.

a) Determine la magnitud y dirección del campo eléctrico en la región $r < R_0$

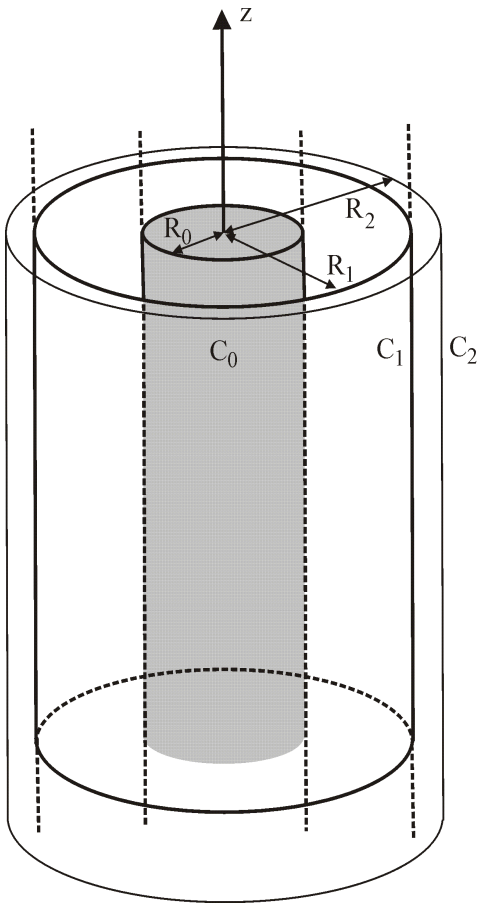
b) Determine la magnitud y dirección del campo eléctrico en la región $R_0 < r < R_1$

c) Determine el valor que σ_1 debe tener de tal forma que el campo eléctrico en la región $r > R_1$ sea cero.

Al sistema se añade otro cascarón cilíndrico C_2 de largo infinito y de espesor despreciable, con radio R_2 y densidad de carga superficial uniforme $\sigma_2 > 0$. Todos los cilindros son concéntricos, y $R_2 > R_1$. Asuma que σ_1 tiene el valor que usted determinó en (c).

d) Determine la magnitud y dirección del campo eléctrico en la región $R_1 < r < R_2$

e) Determine la magnitud y dirección del campo eléctrico en la región $r > R_2$.



Problema 4

Un cilindro sólido C_0 de longitud infinita y radio R_0 tiene una densidad de carga volumétrica $\rho(r) = \gamma_0/r$, donde γ_0 es una constante. C_0 está dentro de un cascarón cilíndrico C_1 de largo infinito y de espesor despreciable. C_1 tiene radio R_1 y densidad de carga superficial uniforme σ_1, y es concéntrico con C_0. Se tiene que $R_1 > R_0$, y que $\rho_0 > 0$.

(a) Determine la magnitud y dirección del campo eléctrico en la región $r < R_0$
(b) Determine la magnitud y dirección del campo eléctrico en la región $R_0 < r < R_1$
(c) Determine el valor que σ_1 debe tener de tal forma que el campo eléctrico en la región $r > R_1$ sea cero.

Al sistema se añade otro cascarón cilíndrico C_2 de largo infinito y de espesor despreciable, con radio R_2 y densidad de carga superficial uniforme $\sigma_2 > 0$. Todos los cilindros son concéntricos, y $R_2 > R_1$. Asuma que σ_1 tiene el valor que usted determinó en (c).

(d) Determine la magnitud y dirección del campo eléctrico en la región $R_1 < r < R_2$
(e) Determine la magnitud y dirección del campo eléctrico en la región $r > R_2$.

Solución

(a) Puesto que ρ es sólo una función de r, que los cilindros tienen longitud infinita, y que σ_1 y σ_2 son uniformes, el problema tiene simetría cilíndrica. Esto significa que si se realiza una rotación o una translación respecto al eje z, la distribución de carga observada será la misma. Por tanto, el campo eléctrico resultante puede tener sólo una componente radial. [1 punto]

Consideremos una superficie gaussiana formada por la superficie de un cilindro de radio r y de longitud L, concéntrico con C_0. Esta va a ser el tipo de superficie gaussiana considerado durante todo el problema. La ley de Gauss nos indica que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Se observa que el campo eléctrico $\vec{E}$ es paralelo al diferencial de area $d\vec{A}$ a lo largo del cuerpo del cilindro gaussiano, lo que da $\vec{E} \cdot d\vec{A} = EdA$ (donde estas cantidades son las magnitudes de los vectores). En las tapas estos dos vectores son ortogonales y por ende $\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$. También se observa que $\vec{E}$ tiene una magnitud constante a lo largo del cuerpo del cilindro gaussiano. Por ende, se tiene que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint EdA = E \int dA = E \int_0^L \int_0^{2\pi} r d\theta dz = E(2\pi rL),$$

donde $(2\pi rL)$ es el area superficial del cilindro gaussiano sin tomar en cuenta las tapas.

Para encontrar la carga encerrada por la superficie gaussiana es necesario integrar la densidad de carga volumétrica de 0 a r, donde $r < R_0$:

$$\begin{aligned} Q_{enc} &= \int \rho(r) dV \\ &= \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{\gamma_0}{r} r dr d\theta dz \\ &= \int_0^L \int_0^{2\pi} \gamma_0 r d\theta dz \\ &= 2\pi\gamma_0 rL \end{aligned}$$

Juntando ambos lados de la ecuación de Gauss, tenemos que:

$$E(2\pi rL) = \frac{2\pi\gamma_0 rL}{\epsilon_0}$$

lo que da:

$$E = \frac{\gamma_0}{\epsilon_0}$$

Puesto que $\gamma_0 > 0$, el campo es radial hacia afuera:

$$\vec{E} = \frac{\gamma_0}{\epsilon_0}\hat{r} \text{ (para } r < R_0) \text{ [1 punto]}$$

(b) La estrategia es la misma que en (a), pero ahora la carga encerrada es

una constante:

$$\begin{aligned} Q_{enc} &= \int \rho(r) dV \\ &= \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} \frac{\gamma_0}{r} r dr d\theta dz \\ &= \int_0^L \int_0^{2\pi} \gamma_0 R_0 d\theta dz \\ &= 2\pi\gamma_0 R_0 L \end{aligned}$$

Y tenemos que:

$$E(2\pi r L) = \frac{2\pi\gamma_0 R_0 L}{\epsilon_0}$$

de donde:

$$\vec{E} = \frac{\gamma_0 R_0}{\epsilon_0 r}\hat{r} \text{ (para } R_0 < r < R_1\text{)} \text{ [1 punto]}$$

(c) Si queremos que la magnitud del campo sea cero para $r > R_1$, necesitamos que la carga encerrada sea cero. En otras palabras, la carga en C_1 debe de ser de la misma magnitud pero signo opuesto que en C_0.

Vimos que la carga encerrada en una sección de longitud L de C_0 esta dada por $2\pi\gamma_0 R_0 L$. Si Q_1 es la carga en una sección de longitud L de C_1 entonces queremos que:

$$Q_1 = -2\pi\gamma_0 R_0 L$$

Por definición,

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{Q_1}{2\pi R_1 L}$$

donde A_1 es el área de la superficie de un trozo de longitud L de C_1. Nos queda que:

$$\sigma_1 = -\frac{\gamma_0 R_0}{R_1} \text{ [1 punto]}$$

(d) La adición de C_2 no cambia nada al hecho de que la carga encerrada es cero para $R_1 < r < R_2$, y tampoco afecta la simetría del problema ya que σ_2 es uniforme. Por ende el razonamiento seguido hasta ahora sigue siendo válido, y el campo eléctrico es cero en esa región:

$$\vec{E} = \vec{0} \text{ (para } R_1 < r < R_2\text{)} \text{ [1 punto]}$$

(e) Seguimos la misma filosofía que hasta ahora. Las cargas de C_0 y C_1 se cancelan, y entonces la carga encerrada para $r > R_2$ depende solo de σ_2:

$$Q_{enc} \quad = \quad \sigma_2 A_2 = \sigma_2 (2\pi R_2 L)$$

Entonces tenemos que:

$$E(2\pi r L) = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_2 (2\pi R_2 L)}{\epsilon_0}$$

Concluímos que:

$$\vec{E} = \frac{\sigma_2 R_2}{\epsilon_0 r} \hat{r} \text{ (para } r > R_2) \text{ [1 punto]}$$

Como $\sigma_2 > 0$, el campo en esta región es radial hacia afuera.