La corriente viene dada, en términos de la carga, $I = \frac{dQ}{dt}$. Además, se sabe que $C = \frac{Q}{V} \Rightarrow Q = CV$

Como es un capacitor plano, se tiene la siguiente relación $C = \frac{A\varepsilon}{d}$ y en este caso la batería entrega un $V = V_0$

Ahora, a medida que entra el dieléctrico, se tendrán dos capacitores en paralelo (ya que al tener un dieléctrico entre placas aumenta C_{eq}) y la C aumenta si los capacitores se conectan en $\parallel$ (se suman las capacitancias)

En síntesis, $C_{eq} = \overbrace{C_0}^{\text{Vacío}} + \overbrace{C_d}^{\text{dieléctrico}}$, con $C_0 = \frac{A_0\varepsilon_0}{d}$ y $C_d = \frac{A_d\varepsilon}{d}$. Así $A_d = \frac{x^2}{2}$ y $A_0 = a^2 - \frac{x^2}{2}$

$$\Rightarrow C_{eq} = (a^2 - \tfrac{x^2}{2})\frac{\varepsilon_0}{d} + \frac{x^2 K\varepsilon_0}{2d} = \frac{\varepsilon_0}{d}\left(a^2 - \frac{x^2}{2}(K-1)\right)$$

Notar que $\varepsilon = K\varepsilon_0$, donde K es la cte dieléctrica.

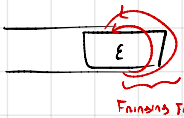
Como $I = \frac{d}{dt}(C_{eq}V_0) \Rightarrow I = V_0\frac{d}{dt}\left(\frac{\varepsilon_0}{d}\left(a^2 - \frac{x^2}{2}(K-1)\right)\right) \Rightarrow I = V_0\frac{\varepsilon_0}{d} \times \frac{dx}{dt}(K-1)$, Pero $\frac{dx}{dt} = v$!!!

Entonces $\boxed{I(x) = \frac{V_0\varepsilon_0(K-1)vx}{d}}$

Para el trabajo realizado, solo será la diferencia de energía almacenada entre el estado inicial y final ($x=0$ $x=a$)

$$W = W_{x=a} - W_{x=0} = \frac{1}{2}\left(\overbrace{C_{eq}}^{\text{en } x=a}V_0^2 - C_0V_0^2\right) \Rightarrow W = \frac{\varepsilon_0}{2d}V_0^2\left(a^2 - \frac{a^2}{2}(K-1) - a^2\right) = \boxed{\frac{\varepsilon_0 a^2(K-1)V_0^2}{4d}}$$

Tal como un conductor "va hacia" un campo eléctrico, un dieléctrico es "succionado" hacia el condensador cada vez que se intenta retirar



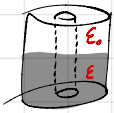
Ahora, en este ejercicio se tiene un capacitor cilíndrico con centro macizo que se sumerge en un dieléctrico



Así, el Δh se genera al tener en equilibrio la fuerza electrostática y el peso del dieléctrico mojado ///

Formalmente, $U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(x)}$ (variable por el dieléctrico a altura x) $\Rightarrow F_x\uparrow = -\frac{\partial U}{\partial x}\uparrow$

En equilibrio, se tiene



que es lo mismo que



Dos capacitores conectados en paralelo

Calculemos la capacitancia del condensador con dieléctrico a altura x con una carga q_x

$$C_x = \frac{q_x}{V_x} \qquad \text{Buscamos } V_x = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{r} \ldots \text{¿Cuál es } \vec{E}?$$

Ley de Gauss en dieléctricos $\rightsquigarrow$ $\oint \vec{D}\cdot d\vec{D} = q_{\text{libre}}$ (cilindro gaussiano de radio r y altura x)

$$\Rightarrow \vec{D}\,2\pi r x = q_x \Rightarrow \vec{D} = \frac{q_x}{2\pi r x}\hat{r}$$

Como $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{E} = \frac{q_x}{2\pi r x \varepsilon}\hat{r}$

Ahora V_x es $-\int_b^a \frac{q_x}{2\pi r x \varepsilon}dr \Rightarrow V_x = \frac{q_x}{2\pi\varepsilon x}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

Entonces $C_x = \frac{q_x}{\frac{q_x}{2\pi\varepsilon x}\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon x}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$

De forma análoga la otra capacitancia es

$$C_{l-x} = \frac{2\pi \varepsilon_0 (l-x)}{\ln(b/a)} \quad \rightarrow \text{Vacío}$$

$$\Rightarrow C_{eq} = C_x + C_{l-x} = \frac{2\pi}{\ln(\frac{b}{a})} \left(\varepsilon x + \varepsilon_0 (l-x) \right)$$

La energía es: $U(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{Q^2 \ln(b/a)}{x(\varepsilon - \varepsilon_0) + \varepsilon_0 l}$

Fuerza: $-\frac{\partial U(x)}{\partial x} = \frac{1}{4\pi} \frac{Q^2 \ln(b/a)(\varepsilon - \varepsilon_0)}{(x(\varepsilon - \varepsilon_0) + \varepsilon_0 l)^2}$

El peso del líquido es: $VS \Rightarrow Peso = \pi(b^2 - a^2) S (x - h)$

Finalmente, por equilibrio de fuerzas, la ecuación para x es

$$(x-h)\pi(b^2-a^2)S = \frac{1}{4\pi} \frac{Q^2 \ln(b/a)(\varepsilon - \varepsilon_0)}{(x(\varepsilon - \varepsilon_0) + \varepsilon_0 l)^2}$$

Como es un medio continuo, la energía es $U = \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \|\vec{E}\|^2 dV$, con $\varepsilon = K\varepsilon_0$

Ya que para $r<\delta$ el campo es 0 (conductor), se tienen 3 zonas

$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$
$= \varepsilon_0\vec{E} + \vec{E}\chi_e$
$= \vec{E}(\varepsilon_0 + \chi_e)$
$= \vec{E}\varepsilon$

$\delta < r < a$

$E 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$

$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\hat{r}$

$a < r < b$

$\oint \vec{D}\cdot ds = q_{libre}$

$D 4\pi r^2 = q$

$D = \frac{q}{4\pi r^2}$ $\quad (D = \varepsilon E)$

$\vec{E} = \frac{q}{4\pi r^2 K\varepsilon_0}\hat{r}$

$r > b$

$E 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$

$\vec{E} = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\hat{r}$

Integrando para Energía

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{\delta}^{a}\left(\frac{q}{4\pi K\varepsilon_0}\right)^2 \frac{1}{r^4} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{a}^{b}\left(\frac{q}{4\pi K\varepsilon_0}\right)^2 \frac{1}{r^4} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{b}^{\infty}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{1}{r^4} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$\Rightarrow \frac{q^2}{4\pi K^2\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{a}\right) + \frac{q^2}{4\pi K\varepsilon_0}\left(\frac{b-a}{K^2 ab}\right) + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0^2}\frac{1}{b}$$

$$\Rightarrow U = \int_{\mathbb{R}^3}\|\vec{E}\|^2 dV = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{a} + \frac{b-a}{Kab} + \frac{1}{b}\right)$$

b) $\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n}$ ... ¿$\vec{P}$?

$\vec{P} = \vec{E}\varepsilon_0(K-1) \quad \Rightarrow \vec{P} = \frac{K-1}{4\pi K}\frac{q}{r^2}\hat{r}$

Así $\sigma_{r=a}$: $\frac{K-1}{4\pi K}\frac{q}{a^2}\hat{r}\cdot(-\hat{r})$ $\qquad \sigma_{r=b}$ $\frac{K-1}{4\pi K}\frac{q}{b^2}\hat{r}\cdot\hat{r}$

c) $\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$ ... Diferencia en esferas!

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi}$$

Como $\vec{P}$ no depende de θ y ϕ, tenemos

$$\rho_p = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{K-1}{4\pi K}\frac{q}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{K-1}{4\pi K}q^2\right) = 0 \,//$$

Como hay un V_0 entre los conductores, se tiene un capacitor con carga Q y $-Q$

En los conductores $\vec{E}=0$

Para $a<r<b$: $\vec{D}\,2\pi rL = q_{inc} \Rightarrow \vec{D} = \frac{Q}{2\pi rL}\hat{r}$, como $\vec{D}=\varepsilon_1\vec{E}$ $\Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{2\pi rL\varepsilon_1}\hat{r}$

Para $b<r<c$: $\vec{D}\,2\pi rL = q_{inc} \Rightarrow \vec{D} = \frac{Q}{2\pi rL}\hat{r}$, como $\vec{D}=\varepsilon_2\vec{E}$ $\Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{2\pi rL\varepsilon_2}\hat{r}$

Se sabe que $V_0 = -\int_c^a \vec{E}\cdot d\vec{r} \Rightarrow V_0 = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r} + \int_b^c \vec{E}\,d\vec{r} \Rightarrow V_0 = \int_a^b \frac{Q}{2\pi rL\varepsilon_1}dr + \int_b^c \frac{Q}{2\pi rL\varepsilon_2}dr$

$V_0 = \frac{Q}{L}\left(\frac{1}{2\pi\varepsilon_1}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{2\pi\varepsilon_2}\ln\left(\frac{c}{b}\right)\right) \Rightarrow \frac{Q}{L} = \frac{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_2\ln(b/a)+\varepsilon_1\ln(c/b)}V_0$

Entonces

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \vec{0} & r<a \\ \frac{V_0}{r}\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2\ln(b/a)+\varepsilon_1\ln(c/b)}\hat{r} & a<r<b \\ \frac{V_0}{r}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2\ln(b/a)+\varepsilon_1\ln(c/b)}\hat{r} & b<r<c \\ \vec{0} & r>c \end{cases}$$

$$\vec{D}(r) = \begin{cases} \vec{0} & r<a \\ \frac{V_0}{r}\frac{\varepsilon_2\varepsilon_1}{\varepsilon_2\ln(b/a)+\varepsilon_1\ln(c/b)}\hat{r} & a<r<b \\ \frac{V_0}{r}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_2\ln(b/a)+\varepsilon_1\ln(c/b)}\hat{r} & b<r<c \\ \vec{0} & r>c \end{cases}$$

Como $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}+\vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D}-\varepsilon_0\vec{E}$

$$\vec{P}(r) = \begin{cases} \vec{0} & r<a \\ \frac{V_0}{r}\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_0)}{\varepsilon_2\ln(b/a)+\varepsilon_1\ln(c/b)}\hat{r} & a<r<b \\ \frac{V_0}{r}\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_0)}{\varepsilon_2\ln(b/a)+\varepsilon_1\ln(c/b)}\hat{r} & b<r<c \\ \vec{0} & r>c \end{cases}$$