Interrogación 1

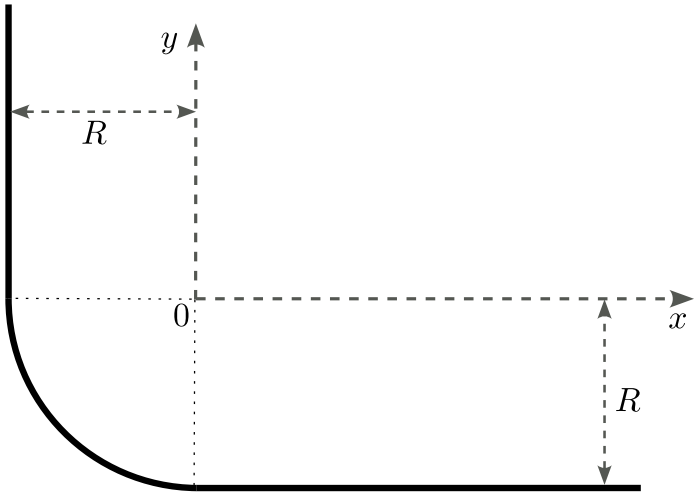
Fecha: 03 de abril del 2025

1. Un alambre infinito con densidad lineal de carga λ se dobla en forma de horquilla como se muestra en la figura. Determine el campo eléctrico en el centro del sistema de referencia generado por:

   a) (3 pts.) Las porciones rectas vertical y horizontal.

   b) (2 pts.) La porción curva de radio R (un cuarto de circunferencia).

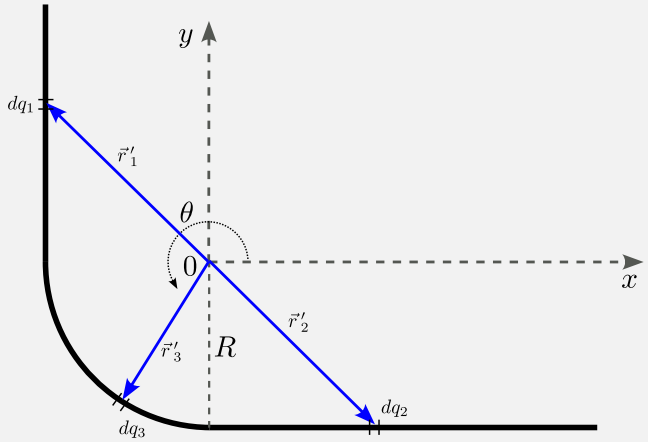
   c) (1 pto.) El alambre completo. Además, calcule la magnitud del campo eléctrico total.



Solución:

a) Utilizaremos la definición del campo eléctrico según,

$$\vec{E} = k\int \frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}(\vec{r}-\vec{r}\,')$$



Partiendo con la porción superior, tenemos que $\vec{r}_1 = 0$, $\vec{r}\,'_1 = -R\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}$ y $dq_1 = \lambda dy$ (0.3 pts.).
Reemplazando en la expresión para el campo, tenemos

$$\vec{E}_1 = -k\int_0^\infty \frac{\lambda dy}{(y^2+R^2)^{3/2}}(-R\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}),$$

$$\vec{E}_1 = -k\lambda\left[-\int_0^\infty \frac{R}{(y^2+R^2)^{3/2}}dy\,\hat{\imath} + \int_0^\infty \frac{y}{(y^2+R^2)^{3/2}}dy\,\hat{\jmath}\right], \quad \text{(0.4 pts.)}$$

$$\vec{E}_1 = -k\lambda\left[-\frac{R}{R^2}\,\hat{\imath} + \frac{1}{R}\,\hat{\jmath}\right].$$

■

Así,

$$\vec{E}_1 = \frac{k\lambda}{R}(\hat{\imath}-\hat{\jmath})\,. \qquad \text{(0.8 pts.)}$$

Repitiendo el procedimiento para la porción recta inferior, tenemos $\vec{r}_2 = 0$, $\vec{r}\,'_2 = x\,\hat{\imath} - R\,\hat{\jmath}$ y $dq_2 = \lambda dx$ (0.3 pts.). Luego, el campo eléctrico será

$$\begin{aligned}
\vec{E}_2 &= -k\int_0^\infty \frac{\lambda dx}{(x^2+R^2)^{3/2}}(x\,\hat{\imath} - R\,\hat{\jmath})\,,\\
\vec{E}_2 &= -k\lambda\left[\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}\,dx\,\hat{\imath} - R\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+R^2)^{3/2}}\,\hat{\jmath}\right]\,, \qquad \text{(0.4 pts.)}\\
\vec{E}_2 &= -k\lambda\left[\frac{1}{R}\,\hat{\imath} - R\frac{1}{R^2}\,\hat{\jmath}\right]\,.
\end{aligned}$$

Así,

$$\vec{E}_2 = -\frac{k\lambda}{R}(\hat{\imath}-\hat{\jmath})\,. \qquad \text{(0.8 pts.)}$$

b) Para el cuarto de circunferencia tenemos, $\vec{r}_3 = 0$, $\vec{r}\,'_3 = R\,\hat{\rho}$ y $dq_3 = \lambda R d\theta$ (0.3 pts.). Podemos escribir el vector unitario en la dirección radial utilizando coordenadas cartesianas, luego $\hat{\rho} = \cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}$ (0.3 pts.). Así, el campo será

$$\begin{aligned}
\vec{E}_3 &= -k\int_\pi^{3\pi/2} \frac{\lambda R d\theta}{R^3} R\,\hat{\rho}\,,\\
\vec{E}_3 &= -\frac{k\lambda}{R}\int_\pi^{3\pi/2}(\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath})d\theta\,, \qquad \text{(0.6 pts.)}\\
\vec{E}_3 &= -\frac{k\lambda}{R}(-\hat{\imath}-\hat{\jmath})\,,
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\vec{E}_3 = \frac{k\lambda}{R}\,(\hat{\imath}+\hat{\jmath})\,. \qquad \text{(0.8 pts.)}$$

c) El campo total será

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3\\
\vec{E} &= \frac{k\lambda}{R}\,(\hat{\imath}+\hat{\jmath})\,. \qquad \text{(0.5 pts.)}
\end{aligned}$$

La magnitud del campo eléctrico total será

$$|\vec{E}| = \frac{k\lambda}{R}\sqrt{2}\,. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

■

2. Considere un plano infinito el cual tiene un agujero circular de radio a. Sobre el plano existe una densidad superficial de carga dada por $\sigma(r) = \sigma_0 a/r$ donde r es la distancia desde el centro del agujero. A distancia b bajo el plano existe una barra de largo a, masa M y carga desconocida, la cual reposa inmóvil en esa posición a pesar de la gravedad. Suponiendo que la densidad de carga es uniforme en la barra, determine la carga que posee. Para esto:

   a) (3 pts.) Determine el campo eléctrico del plano en el eje del agujero.

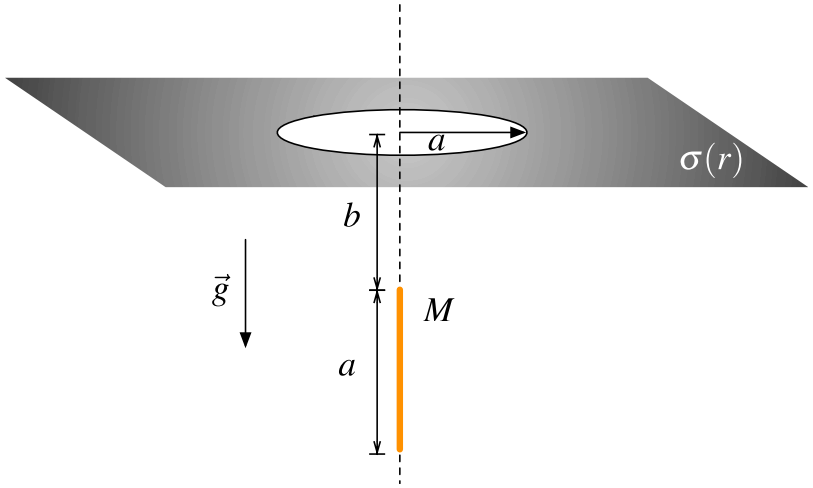
   b) (2 pts.) Escriba una expresión (integral) para determinar la fuerza que el plano ejerce sobre la barra.

   c) (1 pto.) Haga el balance de fuerzas y concluya determinando la carga total de la barra.

   Indicación:

$$\int \frac{du}{(u^2+1)^{3/2}} = \frac{u}{\sqrt{u^2+1}} + C$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+1}} = \ln\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+1}+1}\right) + C$$



Solución:

a) Para calcular el campo eléctrico, consideramos el uso de la formula por integración de la contribución de secciones de carga dq ubicados en el plano. El sistema de coordenadas, lo ubicamos en el centro del agujero, y medimos $\vec{r}'$ un punto en el plano cargado, y $\vec{r}$ apuntando a un punto cualquiera del eje de simetría del agujero. Como el plano no tiene densidad uniforme, se tiene que 1 pto..

$$dq(\vec{r}') = \sigma(\vec{r}')dS = a\sigma_0 d\theta' dr'$$

mientras que

$$\vec{r} = -z\hat{z}$$

Con estos elementos en la formula de campo eléctrico se calcula mediante la formula: 1 pto..

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_a^\infty \int_0^{2\pi} a\sigma_0 d\theta' dr' \frac{-z\hat{z} - r'\hat{r}'}{|-z\hat{z} - r'\hat{r}'|^3}$$

Si consideramos que la integral de $\hat{r}'$ entre 0 y 2π es cero la expresión, luego de integrar resulta en: 1 pto..

$$\vec{E} = -\frac{a\sigma_0}{2\epsilon_0}\frac{\hat{z}}{z}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$$

■

b) para esta parte debemos considerar la influencia del campo eléctrico sobre cada segmento de la barra. Si la barra tiene carga Q entonces: 2 pto..

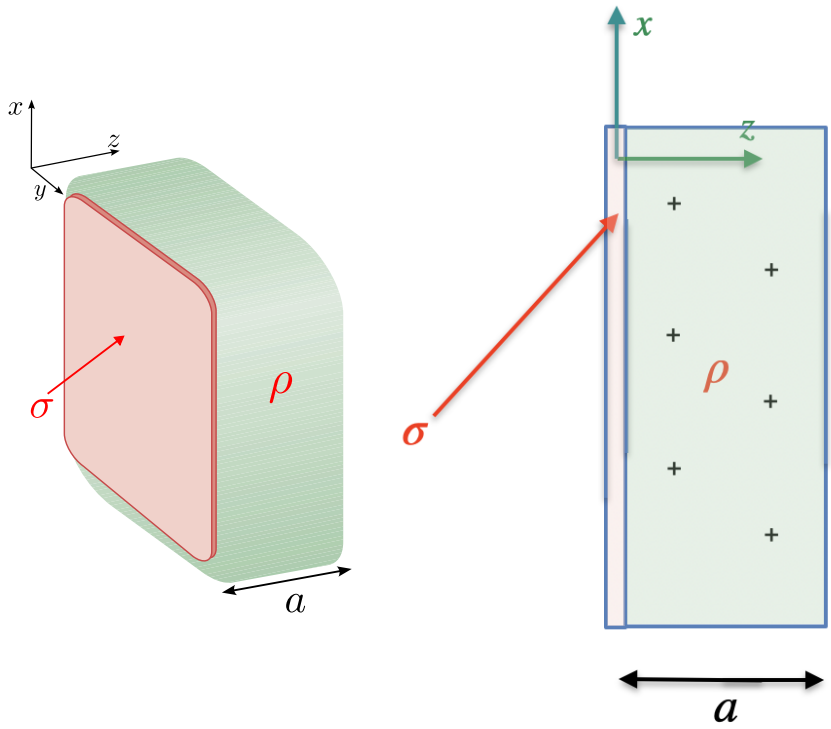
$$\vec{F} = \int_b^{b+a} dQ\vec{E}(z) = -\int_b^{b+a} dz \frac{Q}{a}\frac{a\sigma_0}{2\epsilon_0}\frac{\hat{z}}{z}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$$

c) Acá necesitamos manipular el resultado de la integral, tomando en cuenta los hints: 1 pto..

$$F = Mg \Rightarrow Q = \frac{2\epsilon_0 Mg}{\sigma_0 \ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a+\sqrt{a^2+(a+b)^2}}\right)}$$

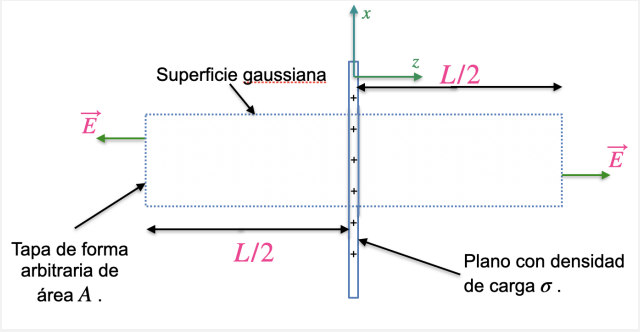
■

3. El plano xy (descrito por $z = 0$) está cubierto de una densidad de carga superficial σ uniforme (es decir, una placa de espesor infinitesimal). Inmediatamente al lado positivo del eje z hay una placa también infinita de espesor a con carga eléctrica de densidad volumétrica ρ uniforme en $0 < z < a$ (ver figura).



Use el teorema de Gauss para calcular el campo eléctrico en todo el espacio.

Solución:
No hay suficiente simetría para usar el teorema de Gauss de una sola vez, así que lo aplicamos en dos etapas y utilizamos superposición.
i) Primero calculamos el campo producido por el plano $z = 0$ (ver figura).



(0,4 pto.)
La superficie gaussiana inventada es tipo cilindro de largo L y tapas de forma arbitraria con área A, y ubicado de modo que el plano $z = 0$ lo corta por la mitad. ■

La ley de Gauss nos dice que,

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

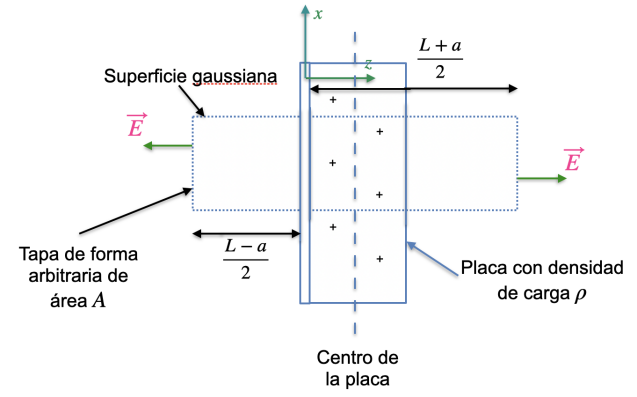
La simetría del problema nos indica que la dirección del campo eléctrico va según $\hat{z}$. En el manto del cilindro el campo eléctrico y el vector $d\vec{A}$ son perpendiculares, por lo que el manto no contribuye a la integral. En las tapas $\vec{E}$ y $d\vec{A}$ tienen la misma dirección por lo que cada tapa contribuye lo mismo. En cada tapa el campo eléctrico no cambia y puede salir fuera de la integral. La carga encerrada por la superficie gaussiana es $Q = \sigma A$. La ley de Gauss nos dice entonces,

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_m \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_{t1} \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_{t2} \vec{E}\cdot d\vec{A} = 0 + 2\int_t E\, dA = 2E\int_t dA = 2EA = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \quad \text{(0,4 pto.)} \tag{2}$$

ecuación de la cual deducimos que el módulo del campo es $E = \sigma/(2\varepsilon_0)$. Incluyendo la información de la dirección y de la posición tenemos,

$$\vec{E}_1 = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z} & \text{z>0} \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z} & \text{z<0} \end{cases} \quad \text{(0,4 pto.)} \tag{3}$$

donde el sub-índice 1 se refiere al campo producido por el plano.
ii) Luego calculamos el campo eléctrico producido por la placa de espesor a fuera de ella. La superficie gaussiana útil está dibujada en la figura,



(0,4 pto.)

La superficie gaussiana sigue siendo un cilindro de largo L y tapas de área A. El que estemos interesados en el campo fuera de la placa significa $L > a$.
La situación se parece al caso (i): La simetría nos dice que el campo en las dos tapas es igual. El campo el perpendicular a la placa. La contribución del manto es nula. La contribución de una tapa es igual a la contribución de la otra. El campo es constante en toda la tapa. Lo que es diferente es cuanta carga hay dentro de la superficie gaussiana,

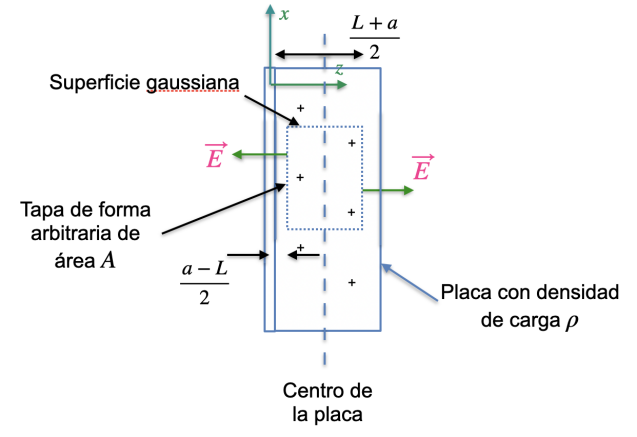
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = 2EA = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho A a}{\varepsilon_0} \quad \text{(0,4 pto.)} \tag{4}$$

con lo cual deducimos,

$$\vec{E}_{2f} = \begin{cases} \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}\hat{z} & \text{z>a} \\ -\frac{\rho a}{2\varepsilon_0}\hat{z} & \text{z<0} \end{cases} \quad \text{(0,4 pto.)} \tag{5}$$

La ecuación anterior no incluye cuanto vale el campo en el interior de la placa ($0 < z < a$). Eso lo calculamos ahora. ■

iii) Queremos calcular el campo eléctrico que produce la placa, dentro de la placa. Para ello inventamos una superficie gaussiana como las anteriores, pero con $L < a$ para que las tapas de la superficie tipo cilindro queden dentro de la placa, como indica la figura.



(0,3 pto.)

La ley de Gauss es análoga como en los casos anteriores, y nuevamente la diferencia radica en la carga eléctrica encerrada por la superficie gaussiana. Esta carga es la densidad por el volumen,

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = 2EA = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho AL}{\varepsilon_0} \qquad \text{(0,3 pto.)} \qquad (6)$$

Entonces, el campo en la tapa externa y en la interna tienen modulo $\rho L/(2\varepsilon_0)$. En la tapa externa $z = (a+L)/2$ y en la interna $z = (a-L)/2$, con lo cual el campo dentro de la placa queda,

$$\vec{E}_{2d} = \begin{cases} \frac{\rho(2z-a)}{2\varepsilon_0}\hat{z} & \text{a/2<z<a} \\ -\frac{\rho(a-2z)}{2\varepsilon_0}\hat{z} & \text{0<z<a/2} \end{cases} \qquad \text{(0,6 pto.)} \qquad (7)$$

iv) Juntamos el campo dentro y fuera producido por la placa (ecuaciones 5 y 7) obteniendo,

$$\vec{E}_2 = \begin{cases} \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}\hat{z} & \text{z>a} \\ \frac{\rho(2z-a)}{2\varepsilon_0}\hat{z} & \text{a/2<z<a} \\ -\frac{\rho(a-2z)}{2\varepsilon_0}\hat{z} & \text{0<z<a/2} \\ -\frac{\rho a}{2\varepsilon_0}\hat{z} & \text{z<0} \end{cases} \qquad \text{(1,2 pto.)} \qquad (8)$$

v) Finalmente sumamos (superposición) los campos del plano y de la placa (ecuaciones 3 y 9)

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma+\rho a}{2\varepsilon_0}\hat{z} & \text{z>a} \\ \frac{\sigma+\rho(2z-a)}{2\varepsilon_0}\hat{z} & \text{a/2<z<a} \\ \frac{\sigma-\rho(a-2z)}{2\varepsilon_0}\hat{z} & \text{0<z<a/2} \\ -\frac{\sigma+\rho a}{2\varepsilon_0}\hat{z} & \text{z<0} \end{cases} \qquad \text{(1,2 pto.)} \qquad (9)$$

que es el campo pedido. ■