P1	P2	P3	P4	Nota

FIS1533/FIZ0221 - Interrogación 2

Facultad de Física
Pontificia Universidad Católica de Chile
Primer Semestre 2014 - 6 de Mayo
Tiempo para responder: 135 minutos

Nombre: _____ **Sección:** _____

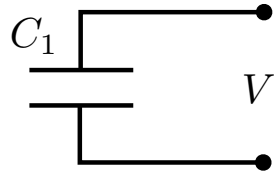
INSTRUCCIONES

- Si utiliza lápiz de grafito, perderá la posibilidad de reclamar errores de corrección.
- Se puede utilizar la calculadora.
- El profesor no se hace responsable de las respuestas que los ayudantes puedan dar a sus consultas durante el examen.
- Resolver cada problema en hojas separadas.
- Poner su nombre en cada una de las páginas de enunciado.
- Cada hoja extra debe contener el nombre y el número del problema que se está resolviendo.
- Al entregar la prueba, deberá depositar cada problema en su respectiva pila (montón). Para que el orden sea el mismo en todos los montones, es imprescindible que esto se haga de un estudiante a la vez (por favor respete a sus compañeros).

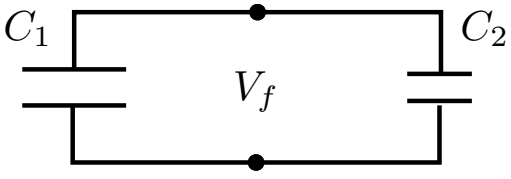
Problema 1

Un condensador de capacidad $C_1 = 100$ pF se carga a una diferencia de potencial $V = 100$ V (ver configuración inicial). Una vez cargada, se desconecta de la batería y se conecta en paralelo a otro condensador (ver configuración final). Si el voltaje final es $V_f = 30$ V, encuentre la capacidad C_2 del segundo condensador.

Configuración Inicial



Configuración Final



En primer lugar calculamos la carga almacenada en el condensador (1 punto),

$$Q_i = C_1 V = 100 p\text{F} \times 100 V = 10^4 \times 10^-12 \text{ C} = 10^{-8} \text{ C} \tag{1}$$

Luego se conecta en paralelo ambos condensadores. Por conservación de carga (1 punto),

$$Q_i = Q_1 + Q_2 \tag{2}$$

donde Q_1 y Q_2 son las cargas almacenadas finales en cada condensador. La diferencia de potencial en ambos condensadores debe ser la misma (1 punto),

$$V_f = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \tag{3}$$

De esta ecuación tenemos que

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad \rightarrow \frac{Q_1 + Q_2}{Q_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_2} \tag{4}$$

Luego,

$$\frac{Q_0}{Q_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_2} \qquad \rightarrow \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_0}{C_1 + C_2} = V_f \tag{5}$$

Entonces (2 puntos),

$$(C_1 + C_2) V_f = Q_0 \qquad \rightarrow C_2 = \frac{Q_0 - C_1 V_f}{V_f} \tag{6}$$

Reemplazando (1 punto),

$$C_2 = \frac{700}{3} \text{ pF} \tag{7}$$

FIS1533/FIZ0221 - Interrogación 2

Primer Semestre 2014 - 6 de Mayo

Nombre: _____ **Sección:** _____

Problema 2

Se tienen dos láminas metálicas a y b de ancho despreciable y con carga unformemente distribuida Q y $-Q$ respectivamente. Cada lámina tiene un área A y un largo L que es mucho mayor que la separación entre las láminas. Entre a y b se encuentra una placa conductora de ancho d a una distancia h de las placas a y b (ver figura). Calcule

a) El campo eléctrico $\vec{E}$ en todo el espacio entre las láminas a y b.

b) La diferencia de potencial entre las láminas a y b.

c) La capacitancia del sistema.

Ahora suponga que en lugar de la placa metálica hay un dieléctrico de permitividad ε que tiene las mismas dimensiones que la placa metálica anterior. En el espacio entre las láminas a y b calcule

d) El vector de desplazamiento $\vec{D}$.

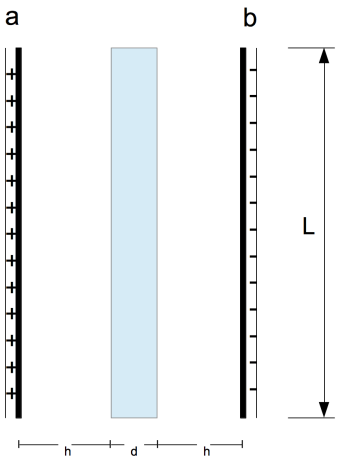
e) El campo eléctrico $\vec{E}$

f) El vector de polarización $\vec{P}$.

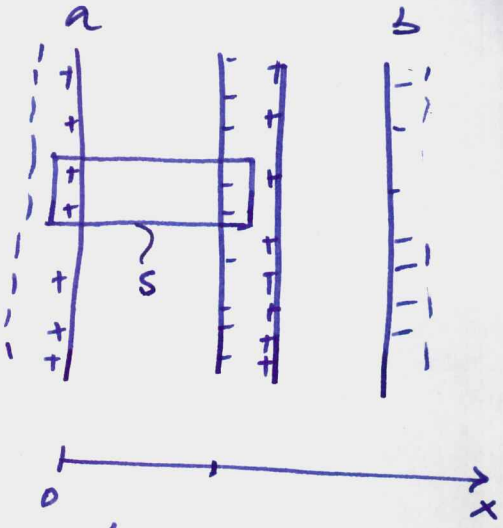
Calcule además

g) La carga inducida (o carga de polarización) en la superficie del dieléctrico.

h) La capacitancia del sistema.



Problema 2:



1/2

La placa metálica se polarizará.

Por ley de Gauss en la superficie S, la carga de polarización es la misma (en magnitud) que la carga en las placas a y b.

a) Por tanto tenemos que

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{x} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}\hat{x} \quad \text{para} \quad x \in (0, h) \quad \text{y} \quad x \in (h+d, 2h+d).$$

1/2

Dentro del conductor el campo eléctrico es cero, i.e.

1/2

$$E = 0 \quad , \text{ para } x \in (h, h+d).$$

b) La diferencia entre las placas a y b:

$$V_{ab} = V_a - V_b = \int_{a\to b} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_0^h \frac{Q}{\varepsilon_0 A}\,dx + \int_{h+d}^{2h+d} \frac{Q}{\varepsilon_0 A}\,dx$$

$$\Rightarrow V_{ab} = \frac{2Qh}{\varepsilon_0 A}$$

1/2

c) Por tanto $C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{\varepsilon_0 A}{2h}$.

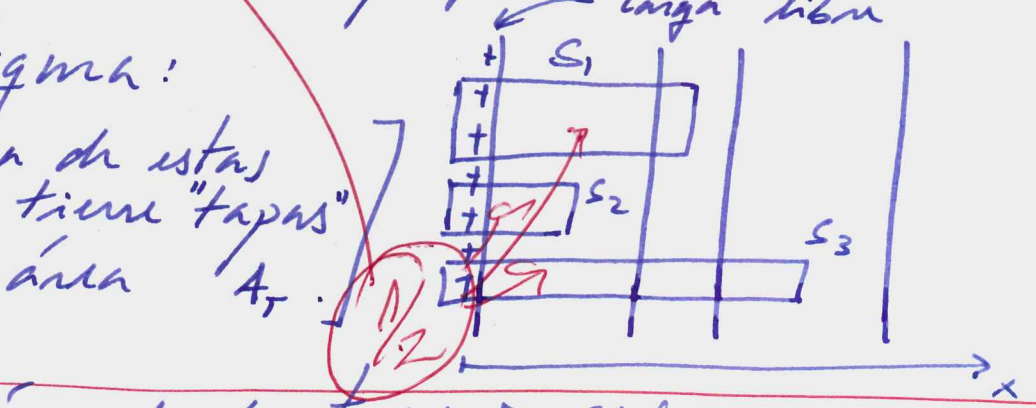
d) Usamos la ley de Gauss para dieléctricos

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{A} = Q_{libre}$$. Donde S puede ser

cualquiera de las superficies indicadas

en la figura:

[Cada una de estas superficies tiene "tapas" de misma área A_T.



1/2

Por simetría mostrado que

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{A} = D\cdot A_T = Q_{libre}$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \frac{Q_{libre}}{A_T} = \frac{Q}{A}\hat{x}.$$ 1/2

$\Rightarrow$ D es constante entre las placas a y b.

e) Usamos que: $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ en dieléctrico

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}\hat{x}$$ (vacío) y $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$ en el vacío.

1/2

$$\vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon A}\hat{x}$$ (en dieléctrico).

f) La polarización se encuentra usando que $\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\frac{Q}{\varepsilon A}\hat{x}$.

en el dieléctrico. 1/2

Obviamente $\vec{P} = 0$ en el vacío.

g) La densidad de carga inducida

$$\sigma_i = \vec{P}\cdot\hat{n} = \begin{cases} -\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon} Q/A & \text{(cara izquierda)} \\ +\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon} Q/A & \text{(cara derecha)} \end{cases}$$ 1/2 1/2

normal exterior al dieléctrico.

h) Calculamos la diferencia de potencial entre los conductores a y b:

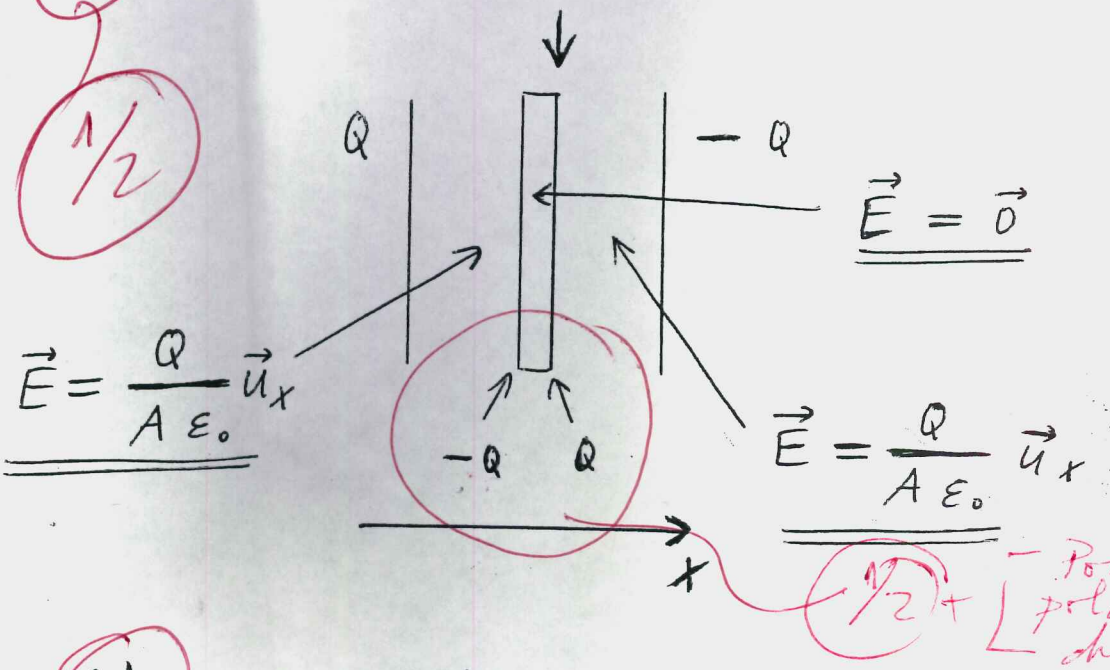
$$V_{ab} = \int_{a\to b} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \frac{Q\cdot h}{\varepsilon_0 A} + \frac{Q\cdot d}{\varepsilon A} + \frac{Q\,h}{\varepsilon_0 A}$$

$$\Rightarrow V_{ab} = \frac{Q}{A}\left(\frac{2h}{\varepsilon_0} + \frac{d}{\varepsilon}\right)$$ 1/2

$$\Rightarrow \quad C = A\left(\frac{2h}{\varepsilon_0} + \frac{d}{\varepsilon}\right)^{-1}$$ 1/2

Problema 2 (solución alternativa)

a) inducción electrostática



1/2 + [Por entender polarización del conductor]

b) $Q = C \cdot V$

$C_1 = C_2 = \varepsilon_0 \frac{A}{h}$

el campo es uniforme

1/2 $\Rightarrow V_1 = V_2 = \frac{Qh}{\varepsilon_0 A}$

$\Rightarrow V = V_1 + V_2 = 2\frac{Qh}{\varepsilon_0 A}$

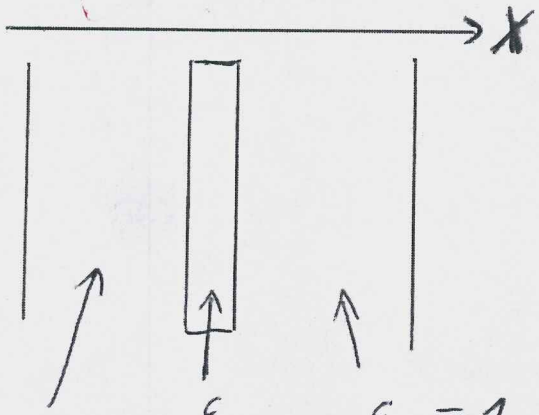
c) condensadores en serie

$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{2h}{\varepsilon_0 A} \Rightarrow C = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{A}{h}$

1/2

d)

$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$$



$\vec{D} = 1 \varepsilon_0 \vec{E}_{vac}$ $\quad \vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \dfrac{\vec{E}_{vac}}{\varepsilon_r} = \varepsilon_0 \vec{E}_{vac}$ $\quad \vec{D} = 1 \varepsilon_0 \vec{E}_{vac}$

el campo $\vec{E}$ está debilitado en el dieléctrico

1/2

$$\vec{E}_{vac} = \frac{Q}{A \varepsilon_0} \vec{u}_x$$

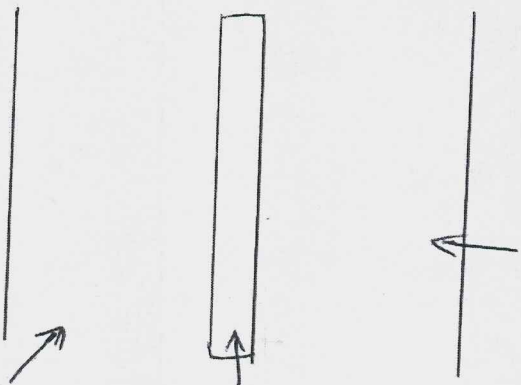
vacío

$$\Rightarrow \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_{vac} = \frac{Q}{A} \vec{u}_x$$

1/2 entre a y b

e)

1/2



$$\vec{E} = \frac{Q}{A \varepsilon_0} \vec{u}_x$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{A \varepsilon_0} \vec{u}_x$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{Q}{A \varepsilon_0} \vec{u}_x \quad \text{(debilitado)}$$

f) $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$

$\chi_e = \varepsilon_r - 1$

1/2

$\vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \vec{E}$

$= (\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E}$

$\Rightarrow \quad \vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{Q}{\varepsilon A} \vec{u}_x$

en el dieléctrico

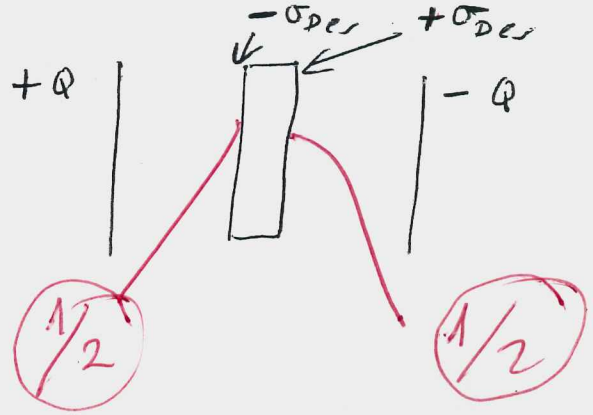
en el vacío: $\varepsilon = \varepsilon_0 \Rightarrow \vec{P} = \vec{0}$

g) $\vec{E}_{Des} = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{Des}}{A \varepsilon_0} (-\vec{u}_x)$

↑ despolarización

$\Rightarrow Q_{Des} = A \cdot P \Rightarrow \sigma_{Des} = \frac{Q_{Des}}{A} = P$

$= \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \frac{Q}{A}$



FIS1533/FIZ0221 - Interrogación 2

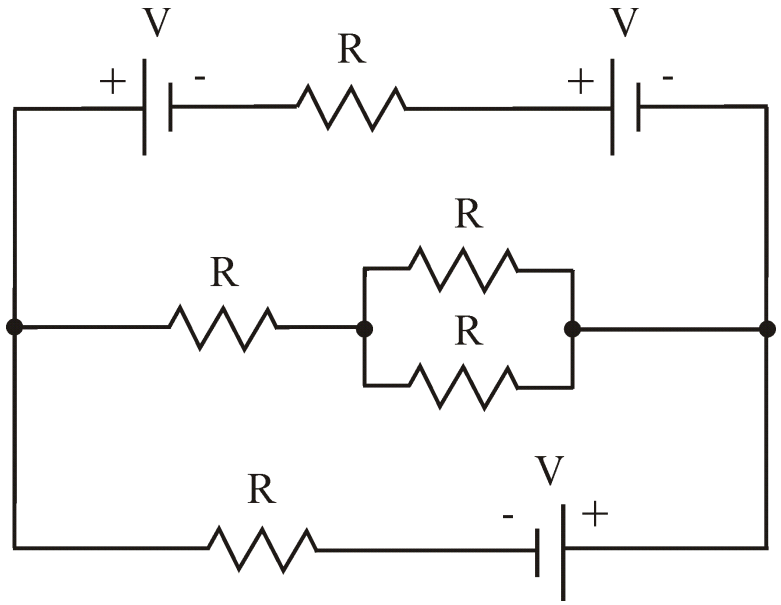
Primer Semestre 2014 - 6 de Mayo

Nombre: _____ **Sección:** _____

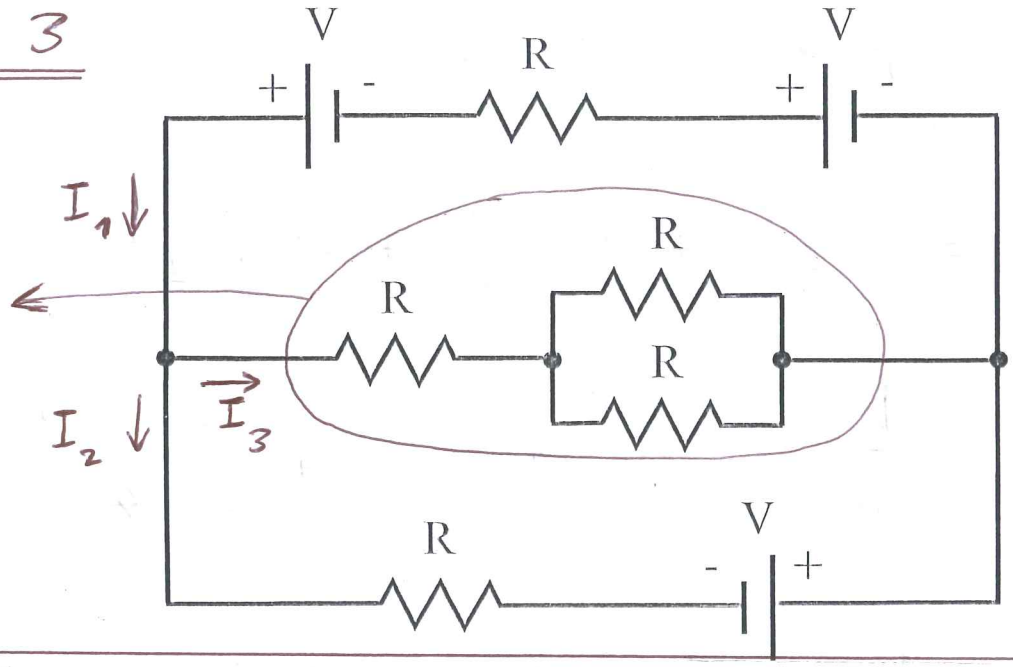
Problema 3

a) Determine las corrientes I_1, I_2 e I_3 del circuito mostrado en la figura.

b) Calcule la potencia con que el circuito de la figura pierde energía eléctrica.



Problema 3



a) Unión: $I_1 = I_2 + I_3$ (0,5 P) (1)

1P malla 1: $2V - RI_1 - \frac{3}{2}RI_3 = 0$ (2)

1P malla 2: $V - RI_2 + \frac{3}{2}RI_3 = 0$ (3)

---

(2) − (3) ⇒ $V - 3RI_3 - R(I_1 - I_2) = 0$

con (1) obtenemos:

$$I_1 - I_2 = I_3 = \frac{V}{R} - 3I_3$$

$$\Rightarrow \quad I_3 = \frac{1}{4}\frac{V}{R}$$ (0,5 P)

(2) ⇒ $I_1 = 2\frac{V}{R} - \frac{3}{2}I_3 = \frac{13}{8}\frac{V}{R}$ (0,5 P)

(3) ⇒ $I_2 = \frac{V}{R} + \frac{3}{2}I_3 = \frac{11}{8}\frac{V}{R}$ (0,5 P)

b) La potencia disipada:

$$P = R I_1^2 + R I_2^2 + \frac{3}{2} R I_3^2$$

$$= \frac{V^2}{R}\left[\left(\frac{13}{8}\right)^2 + \left(\frac{11}{8}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]$$

$$= \frac{V^2}{R} \cdot \frac{169 + 121 + 6}{64}$$

$$= \frac{37}{8}\,\frac{V^2}{R}$$ (1P)

FIS1533/FIZ0221 - Interrogación 2

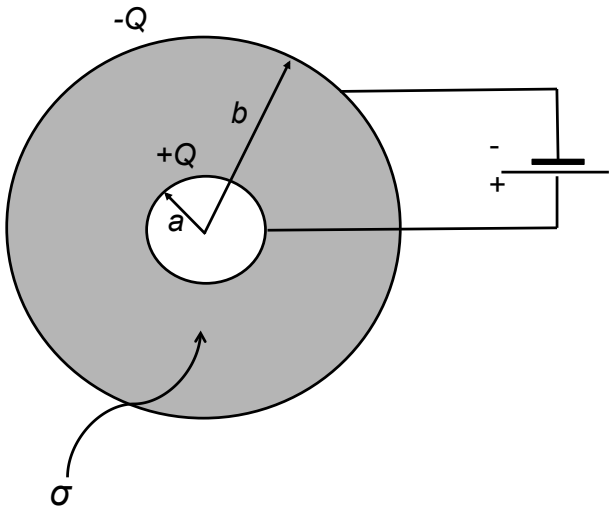
Primer Semestre 2014 - 6 de Mayo

Nombre: _____ **Sección:** _____

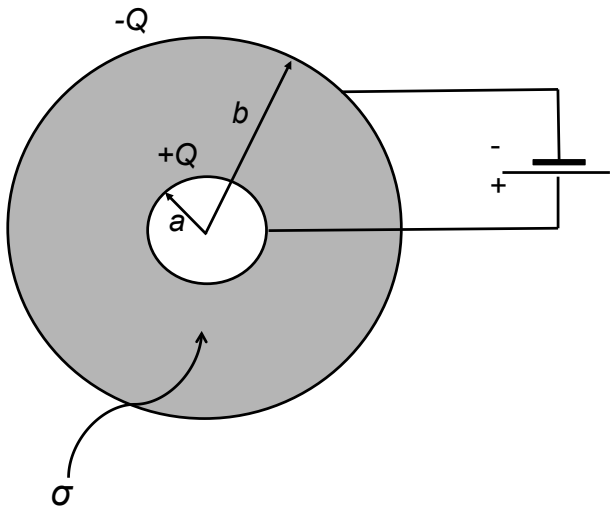
Problema 4

Considere dos cascarones esféricos metálicos concéntricos de radio a y b, ambos con un espesor despreciable. El espacio entre los dos cascarones ($a < r < b$) se llena con un material de conductividad σ. Con una fuente de poder se mantiene una diferencia de potencial V_0 entre los dos cascarones, lo que causa la presencia constante de una carga $+Q$ en el cascarón interno y $-Q$ en el cascarón externo.

(a) Encuentre el campo eléctrico $\vec{E}$ en la región $a < r < b$ en función de Q.
(b) Encuentre la relación entre V_0 y Q.
(c) Encuentre la densidad de corriente por unidad de área $\vec{J}$ en función de V_0.
(d) Encuentre la corriente total I que fluye a través del material entre los dos cascarones, así como su resistencia R.



Solución Problema 4



(a) Consideramos una superficie gaussiana esférica de radio r, concéntrica con los dos cascarones. La Ley de Gauss nos dice que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} \;\; = \;\; \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Debido a la simetría del problema, $\vec{E}$ tiene sólo una componente radial. Aparte, para $a < r < b$, $Q_{enc} = Q$. Por ende, nos queda que:

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

lo que nos da:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r} \quad \text{(para } a < r < b\text{) [1 punto]}$$

(b) Podemos integrar el campo eléctrico para encontrar la diferencia de potencial utilizando la relación:

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}. \text{ [0.5 puntos]}$$

Hacemos esta integral en una línea en la dirección radial de $r = a$ a $r = b$, lo que nos da:

$$\begin{aligned} V_0 &= \int_a^b \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{b-a}{ab}\right) \end{aligned}$$

Por ende, concluímos que:

$$Q = 4\pi\epsilon_0 V_0\left(\frac{ab}{b-a}\right) \text{ [1.5 puntos]}$$

(c) La Ley de Ohm dice:

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \text{ [0.5 puntos]}$$

donde σ es la conductividad del material. Utilizando el resultado de (a), y substituyendo la expresión de (b), se obtiene que:

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \sigma\frac{1}{\cancel{4\pi\epsilon_0}}\frac{1}{r^2}\cancel{4\pi\epsilon_0}V_0\left(\frac{ab}{b-a}\right)\hat{r} \\ &= \frac{\sigma V_0}{r^2}\left(\frac{ab}{b-a}\right)\hat{r} \text{ [0.5 puntos]} \end{aligned}$$

(d) La corriente total I se obtiene al integrar $\vec{J}$ en una superficie:

$$I = \int \vec{J}\cdot d\vec{A} \text{ [0.5 puntos]}$$

Aquí tomamos la superficie cerrada que corresponde a $r = b$ para hacer esta integral, aunque podríamos tomar cualquier otra superficie cerrada dentro de $a < r < b$. Tenemos que $\vec{J}$ y $d\vec{A}$ son paralelos, y por ende $\vec{J}\cdot d\vec{A} = JdA$. Nos queda:

$$I = \int \frac{\sigma V_0}{\cancel{b^2}}\left(\frac{ab}{b-a}\right)\left(\cancel{b^2}\sin(\theta)d\theta d\phi\right)$$

ya que en coordenadas esféricas $dA = R^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$. Puesto que $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta d\phi = 4\pi$, obtenemos que:

$$I = 4\pi\sigma V_0 \left(\frac{ab}{b-a} \right) \text{ [0.5 puntos]}$$

Obtener la resistencia es trivial:

$$R = \frac{V_0}{I} \text{ [0.5 puntos]} = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{b-a}{ab} \right) \text{ [0.5 puntos]}$$

Solución alternativa: La resistencia para un objeto de largo L, sección A y conductividad (resistividad) σ (ρ) está dada por $R = \frac{\rho L}{A} = \frac{L}{\sigma A}$. El espacio entre los dos cascarones $a < r < b$ puede separarse en cáscaras de ancho dr y de sección $A = 4\pi r^2$. La resistencia dR de cada elemento es:

$$dR = \frac{1}{\sigma} \frac{dr}{4\pi r^2}$$

Integrando, obtenemos:

$$\begin{aligned} R &= \int dR \\ &= \int_a^b \frac{1}{\sigma} \frac{dr}{4\pi r^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\sigma} \left[-\frac{1}{r} \right]_a^b \\ &= \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{b-a}{ab} \right) \end{aligned} \tag{1}$$

lo que coincide con el valor calculado por el otro método.