FIS1533 - Interrogación Nro. 2

Facultad de Física
Pontificia Universidad Católica de Chile
Segundo Semestre 2012

Tiempo para responder: 120 minutos

P1	P2	P3	P4	Nota

Nombre: _____ **Sección:** _____

Atención!!

- Si utiliza lápiz de grafito, perderá la posibilidad de reclamar errores de corrección.
- El profesor no se hace responsable de las respuestas que los ayudantes puedan dar a sus consultas durante el examen.

Problema 1

Considere un circuito RC, donde el capacitor tiene capacitancia C y carga inicial Q_0. En $t = 0$, el capacitor se conecta a una resistencia R de manera que el capacitor se descarga.

a) (2 puntos) Calcule la corriente $I(t)$ y la carga $Q(t)$ en el capacitor en función del tiempo.

b) (2 puntos) Cuánto vale R si en un tiempo T, la corriente baja a la mitad de la corriente inicial.

c) (2 puntos) La resistencia consiste de un cable de radio r, con una resistividad que varía con su largo como $\rho(l) = \rho_0 l$. Calcule el largo del cable L necessario para alcanzar una resistencia R.

Pauta Problema RC: (I2)

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$R = \frac{U}{I} \qquad I = \frac{U}{R}$$

a) corriente: $I(t) = \underbrace{\frac{V_0}{R}}_{I_0} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ con $I_0 = \frac{Q_0}{RC}$

Carga en capacitor:

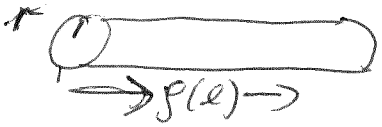
$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_0 - \left| \int_0^t dt' I(t') \right| \\ &= Q_0 - \left| \left(\frac{Q_0}{RC} \cdot \int_0^t e^{-\frac{t'}{RC}} dt' \right) \right| \\ &= Q_0 - \left| Q_0 \cdot (\underbrace{e^{-\frac{t}{RC}}}_{<1} - 1) \right| \\ &= Q_0 \left[1 - 1 + e^{-\frac{t}{RC}} \right] = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned}$$

b) $\frac{I(t)}{I(0)} = \frac{1}{2}$

$$\frac{I_0 e^{-\frac{t}{RC}}}{I_0} = \frac{1}{2} \qquad t = -RC \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) = RC \ln(2)$$

$$\Rightarrow R = \frac{t}{C \ln(2)}$$

c)



$\rho(\ell) = \rho_0 \cdot \ell$

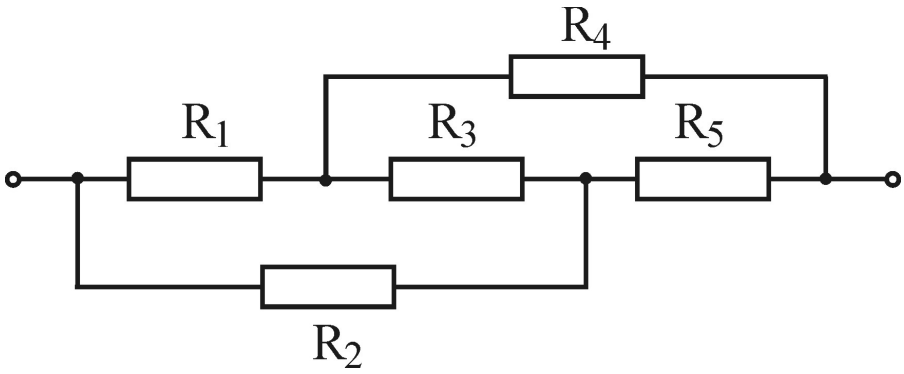
$dR = \frac{\rho}{A} d\ell \qquad A = r^2\pi$

$$R = \int_0^\ell \frac{\rho(\ell)}{A} d\ell' = \frac{1}{r^2\pi} \int_0^\ell \rho_0 \ell' d\ell'$$

$$= \rho_0 \frac{1}{r^2\pi} \frac{\ell^2}{2}$$

Problema 2

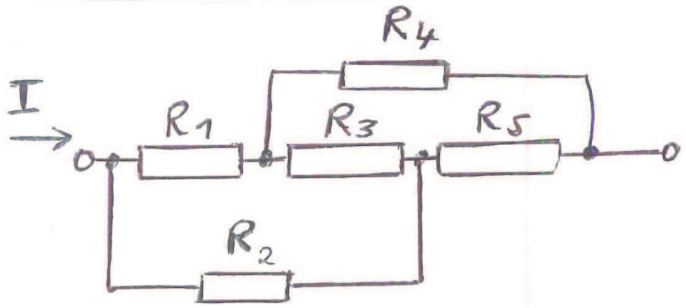
Considere una corriente eléctrica de intensidad I que entra por un terminal del siguiente circuito.



a) (5 Puntos) Calcule cada una de las corrientes que pasan por las resistencias R_1 hasta R_5 considerando que $R_1 = R_2 = R_3 = R_5 = R$ y $R_4 = 2R$.

b) (1 Punto) Cuál es la resistencia equivalente del circuito?

Pauta Problema 3



Es suficiente considerar 3 uniones y 2 mallas:

$$\left.\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 \\ I_1 &= I_3 + I_4 \\ I_5 &= I_2 + I_3 \end{aligned}\right\}$$ 3 uniones (1P)

$$\left.\begin{aligned} R_2 I_2 &= R_1 I_1 + R_3 I_3 \\ R_4 I_4 &= R_3 I_3 + R_5 I_5 \end{aligned}\right\}$$ 2 mallas (1P)

Ahora tenemos 5 ecuaciones y 5 variables $I_1, \dots, I_5$.

Además sabemos que: $R_1 = R_2 = R_3 = R_5 = R$

y $R_4 = 2R$

Así obtenemos las siguientes 5 ecuaciones:

$$I = I_1 + I_2 \quad (1)$$
$$I_1 = I_3 + I_4 \quad (2)$$
$$I_5 = I_2 + I_3 \quad (3)$$
$$I_2 = I_1 + I_3 \quad (4)$$
$$2I_4 = I_3 + I_5 \quad (5)$$

(1P)

Ahora podemos eliminar variables.

Con (3) y (5) podemos eliminar I_5

$\Rightarrow$

$$2I_4 = 2I_3 + I_2 \quad (6)$$

Con (2) y (6) podemos eliminar I_4

$\Rightarrow$

$$I_1 = 2I_3 + \frac{1}{2} I_2 \quad (7)$$

Con (4) y (7) podemos eliminar I_3

$\Rightarrow$

$$I_2 = I_1 + \frac{1}{2}\left(I_1 - \frac{1}{2} I_2\right)$$

$$I_2 = \frac{6}{5} I_1 \quad (8)$$

Con (1) y (8) podemos eliminar I_2

$\Rightarrow$

$$I_1 = \frac{5}{11} I \quad (9)$$

El resto es facil:

$$\left.\begin{aligned}
(1) \Rightarrow \quad I_2 &= I - I_1 = \frac{6}{11} I \\
(4) \Rightarrow \quad I_3 &= I_2 - I_1 = \frac{1}{11} I \\
(2) \Rightarrow \quad I_4 &= I_1 - I_3 = \frac{4}{11} I \\
(3) \Rightarrow \quad I_5 &= I_2 + I_3 = \frac{7}{11} I
\end{aligned}\right\} \quad (2P)$$

Para determinar R_{total} podemos usar la ecuación:

$$R_{total} \cdot I = R_1 I_1 + R_4 I_4$$

$$\Rightarrow \quad R_{total} I = R I_1 + 2R I_4$$

$$= R (I_1 + 2 I_4)$$

$$= R \left(\frac{5}{11} + 2 \cdot \frac{4}{11} \right) I$$

$$= R \cdot I \cdot \frac{13}{11}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{R_{total} = \frac{13}{11} R}} \quad (1P)$$

Nótense:

Se puede mostrar que:

$$R_{total} = \frac{R_3\left[(R_1+R_4)\cdot(R_2+R_5)\right] + R_1R_2(R_4+R_5) + R_4R_5(R_1+R_2)}{R_3(R_1+R_2+R_4+R_5) + (R_1+R_2)(R_4+R_5)}$$

Además:

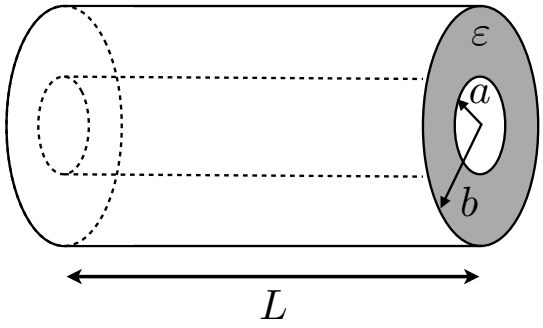
El problema 3 se puede encontrar en el libro del curso:

Sears, Zemansky, Young, Freedman
"Física Universitaria", Undécima edición
Volumen 1

Capitulo 26
pagina 991

Problema 3

Considere dos cilindros coaxiales conductores de largo L y radios a y b, respectivamente, con $a < b$. Entre los cilindros se encuentra un material dieléctrico de permitividad ε. El conductor interno tiene carga libre $+Q$, mientras que el conductor externo tiene carga libre $-Q$. No existen cargas libres en el material dieléctrico.



a) (2 puntos) Encuentre el desplazamiento eléctrico $\vec{D}$ y el campo eléctrico $\vec{E}$ en todo el espacio. Desprecie los efectos de borde.

b) (2 puntos) Utilizando el resultado de la parte anterior, encuentre la energía U almacenada en el sistema.

c) (1 punto) Utilizando el resultado de la parte anterior, calcule la capacitancia por unidad de largo del sistema.

d) (1 punto) Si la densidad de carga polarizada en la superficie externa del dieléctrico es σ_b, calcule la densidad de carga polarizada en la superficie interna del dieléctrico σ_a en función de σ_b, a y b.

Solución

(a) (2 puntos) Encuentre el desplazamiento eléctrico $\vec{D}$ y el campo eléctrico $\vec{E}$ en todo el espacio. Desprecie los efectos de borde.

Utilizando la ley de Gauss para el desplazamiento,

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{enc libre}} \tag{1}$$

obtenemos que

$$\vec{D} = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{Q}{2\pi L}\frac{\hat{r}}{r} & a < r < b \\ 0 & b < r \end{cases} \tag{2}$$

Por otro lado, para calcular el campo eléctrico, sabemos que para un dieléctrico lineal $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$. Por lo tanto,

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{Q}{2\pi L\varepsilon}\frac{\hat{r}}{r} & a < r < b \\ 0 & b < r \end{cases} \tag{3}$$

(b) (2 puntos) Utilizando el resultado de la parte anterior, encuentre la energía U almacenada en el sistema. La energía almacenada en el sistema estaá dada por,

$$U = \frac{1}{2}\int_V \vec{D} \cdot \vec{E} dv \tag{4}$$

donde dv es el diferencial de volumen. Ya que el desplazamiento y el campo eléctrico son nulos para $r < a$ y $r > b$, la energía es

$$U = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{Q^2}{2\pi L}\right)^2 \frac{2\pi r L dr}{r^2} = \frac{Q^2}{4\pi L\varepsilon}\log\left(\frac{b}{a}\right) \tag{5}$$

(c) (1 punto) Utilizando el resultado de la parte anterior, calcule la capacitancia por unidad de largo del sistema.

La energía almacenada en un condensador viene dada por

$$U = \frac{Q^2}{2C}.$$

Comparando con el resultado obtenido en (c), tenemos que

$$\frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{4\pi L\varepsilon}\log\left(\frac{b}{a}\right) \rightarrow C = \frac{2\pi\varepsilon L}{\log\left(\frac{b}{a}\right)} \tag{6}$$

y la capacitancia por unidad de largo es

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\varepsilon}{\log\left(\frac{b}{a}\right)}. \tag{7}$$

d) (1 punto) Si la densidad de carga polarizada en la superficie externa del dieléctrico es σ_b, calcule la densidad de carga polarizada en la superficie interna del dieléctrico σ_a en función de σ_b, a y b.

La carga total polarizada en un dieléctrico es cero. Por lo tanto, debe cumplirse que

$$2\pi aL\sigma_a + 2\pi bL\sigma_b + V\rho_P = 0 \tag{8}$$

donde $\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$. Ya que el dieléctrico es lineal, $\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}$ y $\nabla \cdot \vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\nabla \cdot \vec{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0)/\varepsilon \nabla \cdot \vec{D} = -(\varepsilon - \varepsilon_0)/\varepsilon \rho_{libre} = 0$. Por lo tanto, $\rho_P = 0$. Luego,

$$2\pi aL\sigma_a + 2\pi bL\sigma_b = 0 \qquad \rightarrow \qquad \sigma_a = -\sigma_b \frac{b}{a}. \tag{9}$$