Electricidad y magnetismo - FIS1533

Interrogación N°1

C. Arenas, E. Arevalo, F. Castillo, M. Domínguez,
D. Goyeneche, P. Urrejola, S. Wallentowitz
15 de septiembre de 2023

Instrucciones generales

- La evaluación tiene una duración de **120 minutos**.
- La evaluación tiene un total de **18 puntos**. Su nota se calculará como: Nota $= 1 +$ Puntaje$/3$.
- La evaluación consiste en **tres ejercicios**. El ejercicio 1 comprende preguntas de selección múltiple. Los ejercicios 2 y 3 son problemas de desarrollo.
- El **ejercicio 1 tiene un total de 6 puntos** (1 punto por cada pregunta de selección múltiple).
- En el caso de las preguntas de selección múltiple debe **seleccionar solo una respuesta para cada pregunta**. Para ello debe **rellenar completamente el círculo** de la respuesta seleccionada en la hoja de respuestas, de lo contrario su respuesta se considerará inválida. El desarrollo de las preguntas de selección múltiple no se considera en la corrección.
- Debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
- Debe escribir su **nombre, RUN y sección de forma clara y legible en cada hoja** que entregue. Cuando el encargado pase la lista, escriba también su número de lista.
- Al finalizar la interrogación, **entregue el desarrollo de los ejercicios 2 y 3 en hojas separadas**, además de la **hoja de respuestas de las preguntas de selección múltiple**.
- El orden y las explicaciones son requisitos para obtener puntaje en cada problema de desarrollo.
- No puede usar ningún tipo de aparato electrónico. El uso de calculadora, celular, tableta y dispositivos similares será sancionado.
- No puede prestar nada.
- La evaluación es individual y está absolutamente prohibida la colaboración o la copia. Cualquier acto que vaya en contra del *código de honor* se sancionará con nota final 1.0 en el curso.
- Se aceptan preguntas de enunciado solo dirigidas al profesor(a), durante la primera hora de la evaluación.

Answer Key

Ejercicio 1

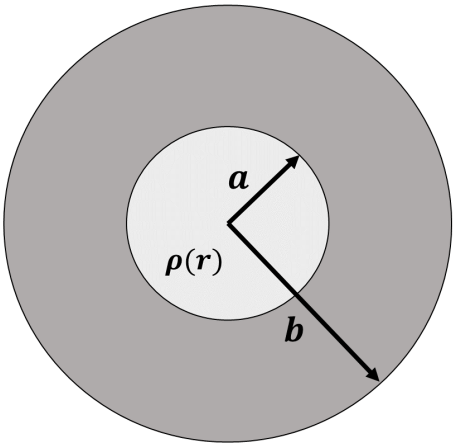
Forma	I	II	III	IV
Pregunta				
1	(d)	(d)	(e)	(a)
2	(f)	(d)	(f)	(f)
3	(c)	(c)	(d)	(e)
4	(a)	(d)	(d)	(e)
5	(b)	(c)	(a)	(a)
6	(a)	(a)	(a)	(a)

Ejercicio 2

Una esfera no conductora de radio a posee una densidad volumétrica de carga dada por

$$\rho(r) = \beta r^{3/2}$$

donde $r \geq 0$ es la distancia radial desde el centro de la esfera y β es una constante conocida.



Si la esfera es rodeada por un cascarón esférico neutro de radio interno a y radio externo b hecho de un material conductor:

i) Determine el campo electrostático en todo el espacio. Bosqueje un gráfico de la magnitud del campo eléctrico en función de r (3 puntos).

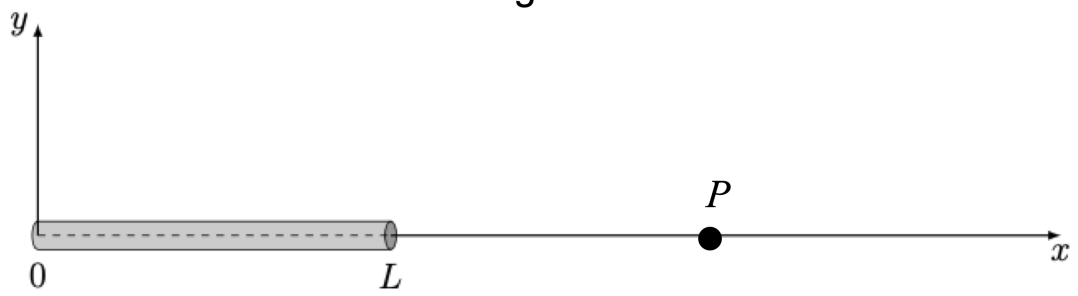
ii) Calcule la densidad de carga superficial inducida en las superficies interna y externa del cascarón conductor (1 puntos).

iii) Suponiendo que el potencial electrostático $V = 0$ en infinito, determine el potencial electrostático en el centro de la esfera no conductora $r = 0$ (2 puntos).

Ejercicio 3

Considere una varilla con densidad lineal de carga constante λ_0 ubicada sobre el eje x entre $x = 0$ y $x = L$ como muestra la figura 1.

Figura 1

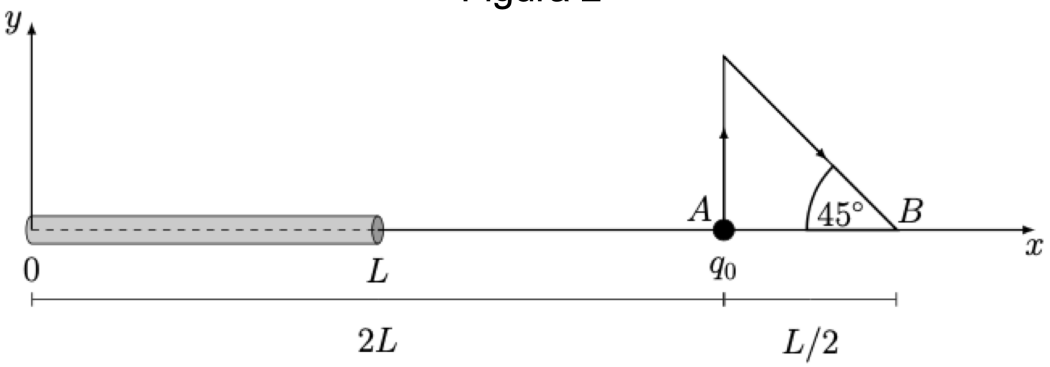


i) Si la carga total de la varilla es Q, determine el valor de λ_0 (1 punto).

ii) Calcule el campo eléctrico en un punto P ubicado sobre el eje x con $x > L$ (2 puntos).

Ahora, suponga que se coloca una carga puntual q_0 sobre el eje x en $x = 2L$ como muestra la figura 2.

Figura 2



iii) ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza electrostática para mover la carga q_0 desde el punto A hasta el punto B mostrado en la Figura 2? Desprecie cualquier efecto de la gravedad. (2 puntos)

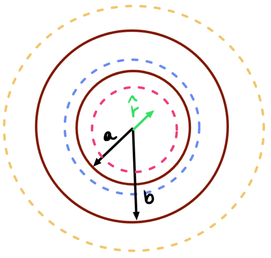
iv) Si la carga q_0 se suelta del reposo en A, calcule su velocidad en el punto B. Suponga que la masa de la carga es m (1 punto).

Nombre: _____

RUT: _____ Sección: _____ N. Lista: _____

Pauta ejercicio 2

i) Para calcular el campo eléctrico notamos que al ser la densidad de carga dependiente sólo de r, se puede usar ley de gauss, utilizando superficies gaussianas esféricas, las cuales han sido dibujadas con líneas segmentadas en cada caso de interés.
En cada caso, la magnitud del campo es constante y radial en las superficies y el vector $d\vec{s}$ es paralelo a $\vec{E}$



r<a

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$E\,4\pi r^2 = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \qquad (1)$$

$$q_{in} = \int \rho(r)\,dV = 4\pi \int_0^r \beta r^{3/2} r^2\,dr$$

$$q_{in} = 4\pi\beta \int_0^r r^{7/2}\,dr$$

$$q_{in} = \frac{8\pi\beta r^{9/2}}{9} \qquad 0,4\ pts. \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$E 4\pi r^2 = \frac{8\pi\beta r^{9/2}}{9\epsilon_0} \longrightarrow \boxed{\vec{E}_1 = \frac{2}{9\epsilon_0}\beta r^{5/2}\hat{r}} \qquad (3)$$

0,4 pts.

a<r<b

Al encontrarse el conductor en equilibrio electrostático, se tiene $\vec{E}_2 = 0$. 0,8 pts

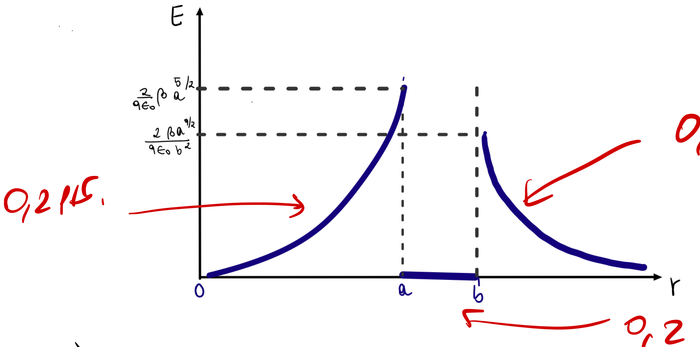
r>b

El casquete esférico se encuentra neutro, por lo que la carga al interior de la superficie gaussiana es la carga de la esfera aislante de densidad $\rho(r)$, luego

$$Q = \int_0^a \rho(r)\,dV = \frac{8\pi\beta r^{9/2}}{9}\Big|_{r=a} = \frac{8\pi\beta a^{9/2}}{9} \qquad (4)$$

Luego, el campo eléctrico será:

$$\boxed{\vec{E}_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{2\beta a^{9/2}}{9\epsilon_0 r^2}\hat{r}} \qquad 0,8\ pts. \qquad (5)$$



0,2 pts. 0,2 pts. 0,2 pts.

ii) Para conocer la densidad de carga en la superficie interior, consideramos:

$$Q + q_{int} = 0,$$

donde q_{int} es la carga total en la superficie interior del casquete conductor.

$$q_{int} = -Q = \int \sigma_{int}\,ds = \sigma_{int}\int ds,$$

es decir:

$$\therefore \quad \sigma_{int} = -\frac{Q}{4\pi a^2},$$

reemplazando (4)

$$\boxed{\sigma_{int} = -\frac{2\beta a^{5/2}}{9}}$$ 0,5 pts.

Luego, la densidad de carga externa será tal que;

$$q_{int} + q_{ext} = 0,$$

es decir

$$q_{ext} = -q_{int},$$

$$q_{ext} = \int \sigma_{ext} dS = \sigma_{ext}\, 4\pi b^2$$

$$\sigma_{ext} = \frac{q_{ext}}{4\pi b^2} = \frac{Q}{4\pi b^2}$$

reemplazando (3)

$$\boxed{\sigma_{ext} = \frac{2\beta a^{9/2}}{9b^2}}$$ 0,5 pts.

iii) Para calcular el potencial en el centro de la esfera, consideramos

$$\Delta V = V_0 - V_\infty = -\int_\infty^0 \vec{E}\cdot d\vec{\ell},$$ 0,5 pts.

donde $V_\infty = 0$, luego

$$V_0 = -\int_\infty^0 \vec{E}\cdot d\vec{r},$$

$$V_0 = -\int_\infty^b E_3\, dr - \int_b^a E_2\, dr - \int_a^0 E_1\, dr,$$ 0,5 pts

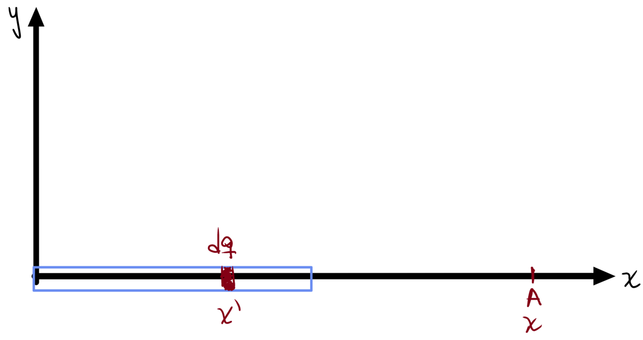
$$V_0 = -\int_\infty^b \frac{2\beta a^{9/2}}{9\epsilon_0 r^2} dr - \int_a^0 \frac{2}{9\epsilon_0}\beta r^{5/2} dr$$

$$V_0 = -\frac{2\beta}{9\epsilon_0}\left[a^{9/2}\int_\infty^b r^{-2} dr + \int_a^0 r^{5/2} dr\right]$$

$$V_0 = -\frac{2\beta}{9\epsilon_0}\left[a^{9/2}\left(-\frac{1}{r}\Big|_\infty^b\right) + \frac{2r^{7/2}}{7}\Big|_a^0\right]$$

$$\boxed{V_0 = \frac{2\beta}{9\epsilon_0}\left[\frac{a^{9/2}}{b} + \frac{2a^{7/2}}{7}\right]}$$ 1 pto.

Pauta ejercicio 3



a) $$Q = \int_0^L \lambda(x)\,dx = \lambda_0 \int_0^L dx = \lambda_0 L$$

$$\lambda_0 = \frac{Q}{L}$$ 1pto.

b) Por simetría solo hay campo en x, ← 0,5 ptS.

$$E_x = k_e \int_0^L \frac{dq}{(x-x')^2} = \frac{k_e Q}{L} \int_0^L \frac{dx'}{(x-x')^2}$$ $u = x - x'$, $du = -dx'$,

$$E_x = -k_e \frac{Q}{L} \int_x^{x-L} \frac{du}{u^2}$$ ↖ 0,5 ptS.

$$E_x = k_e \frac{Q}{L}\left[\frac{1}{x-L} - \frac{1}{x}\right]$$ 1pto.

c) Para calcular el trabajo, notemos que $\vec{F_e} = q_0\vec{E}$ es conservativa, luego, el trabajo de esta fuerza es independiente del camino
Entonces, consideremos el camino sobre x desde A hasta B.

$$\Delta W = -\Delta U = -q_0 (V_A - V_B)$$ 0,5 pts.

$$\Delta V = -\int_{2L}^{x} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -k_e \frac{q}{L}\left[\int_{2L}^{x} \frac{dx'}{x'-L} - \int_{2L}^{x} \frac{dx'}{x'}\right]$$ 0,5 ptS.

$$\Delta V = -k_e \frac{Q}{L}\left[\ln(x'-L)\Big|_{2L}^{x} - \ln(x')\Big|_{2L}^{x}\right]$$

$$\Delta V = -\frac{k_e Q}{L}\left[\ln\left(\frac{x-L}{L}\right) - \ln\left(\frac{x}{2L}\right)\right]$$

$$\Delta V = -\frac{k_e Q}{L}\ln\left(\frac{2(x-L)}{x}\right)$$ 0,5 pts.

es decir, evaluando en $x = x_B = \frac{5L}{2}$,

$$\Delta W = \frac{k_e q_0 Q}{L}\ln\left(\frac{2\left(\frac{5}{2}L - L\right)}{\frac{5}{2}L}\right)$$

$$\Delta W = \frac{k_e q_0 Q}{L}\ln\left(\frac{6}{5}\right)$$ 0,5 ptS.

c) Si se libera la carga q_0 en el punto A, ¿con qué velocidad llegará al punto B?

En este caso $\Delta K = \Delta W$, 0,5 ptS.

luego

$$\frac{1}{2}mv^2 = \Delta W$$

$$v = \sqrt{\frac{2k_e q_0 Q}{m}\ln(6/5)}$$ 0,5 ptS.