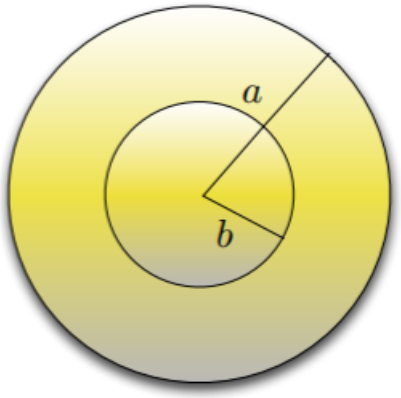
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Física
FIS1533-9 - Electricidad y Magnetismo
Profesora Macarena Domínguez
Ayudante: Samuel Urrutia (samuel.urrutia@uc.cl)

Ayudantía 6

Problema 1

Se desea diseñar un condensador esférico a partir de un casquete conductor esférico de radio exterior a, que sea capaz de almacenar la mayor cantidad de energía posible, sujeto a la restricción que el campo eléctrico en la superficie de la esfera conductora interior, concéntrica con el casquete y de radio $b < a$, no pueda exceder un valor dado E_0. Calcule, en función de E_0, a y constantes, el valor que debe tener el radio b y la magnitud de la energía que puede almacenar el conductor.



SOLUCION:

Suponiendo una carga Q en la superficie conductora de radio b, entonces el campo eléctrico a una distancia r del origen será de la forma:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

Donde V es la diferencia de potencial entre la superficie de radio interior y exterior. De esta manera, se obtiene la capacidad

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{a-b}$$

Por otro lado, tomando el caso límite $r = b$ en el cual el campo eléctrico alcanza su máximo valor posible $E(r = b) = E_0$, se tiene:

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \\ \Rightarrow Q &= 4\pi b^2\sigma = 4\pi b^2\varepsilon_0 E_0 \\ \Rightarrow E(r) &= \frac{b^2 E_0}{r^2} \end{aligned}$$

Luego se usan estos valores obtenidos para calcular la energía del sistema:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{2\pi\varepsilon_0 b^3 E_0^2 (a-b)}{a}$$

Ahora para encontrar su máximo (o mínimo):

$$\begin{aligned} \frac{dU}{db} &= \frac{2\pi\varepsilon_0 E_0^2}{a}\left(3ab^2 - 4b^3\right) = 0 \\ \Rightarrow b &= \frac{3a}{4} \end{aligned}$$

Luego calculando la segunda derivada:

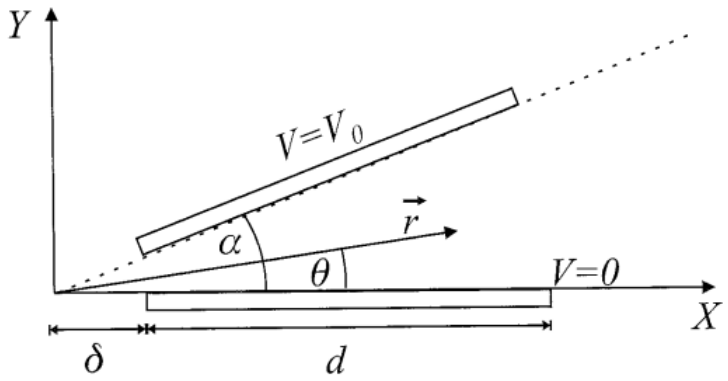
$$\frac{d^2U}{db^2} = \frac{2\pi\varepsilon_0 E_0^2}{a}\left(6ab - 12b^2\right) \Longrightarrow U''\left(b = \frac{3a}{4}\right) = \frac{2\pi\varepsilon_0 E_0^2}{a}\left(\frac{18a^2 - 27a^2}{4}\right) < 0$$

Por lo tanto, $U\left(b = \frac{3a}{4}\right)$ es máximo, con:

$$U\left(b = \frac{3a}{4}\right) = \frac{27\pi\varepsilon_0 E_0^2 a^3}{128}$$

Problema 2

Dos placas conductoras cuadradas, de longitud lateral d, están ubicadas radialmente, formando un ángulo α. Uno de los extremos de las placas se encuentra a distancia δ del punto de intersección entre los planos que estas definen. La separación entre ambas en el otro extremo es mucho menor que su longitud, como se muestra en la figura. Una de las placas se encuentra a un potencial $V = 0$ y la otra a un potencial $V = V_0$.



Encuentre:

a) El campo eléctrico entre las placas.

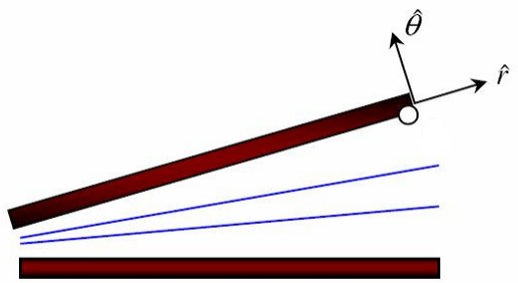
b) La densidad superficial de carga σ sobre las placas.

c) El potencial entre las placas.

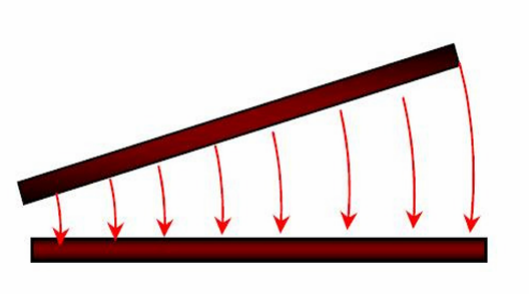
d) La capacidad del sistema.

SOLUCION:

Sabemos que las lineas equipotenciales deben respetar la geometría del dispositivo. De esta forma, las equipotenciales serán rectas radiales.



Por lo tanto, las lineas de campo, al ser perpendiculares a las equipotenciales, deben seguir la dirección $\hat{\theta}$, es decir, son arcos concéntricos.



Entonces, despreciando los efectos del borde, podemos suponer que el potencial entre las placas solo depende del ángulo polar.
Si usamos coordenadas cilíndricas, con el eje z coincidiendo con la intersección entre los planos donde se encuentran las placas, y r y θ como coordenadas polares en el plano $z = 0$, la afirmación anterior quiere decir que V solo depende de θ y no de r ni z. Esta aproximación es razonable en la medida que la abertura α sea pequeña y la distancia d sea lo suficientemente grande.
Como la función potencial V satisface la ecuación de Laplace entre los conductores, tenemos que, usando la expresión del Laplaciano en cilíndricas:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

junto al hecho que V solo depende de θ, obtenemos

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0$$

La solución de esta ecuación diferencial de segundo grado es de la forma

$$V(\theta) = A\theta + B$$

en que A y B son constantes de integración. Si escogemos $\theta = 0$ coincidiendo con la placa que se encuentra a potencial cero y $\theta = \alpha$ coincidiendo con la placa que se encuentra a potencial V_0, tenemos que

$$V(0) = B = 0 \;\rightarrow\; B = 0$$
$$V(\alpha) = A\alpha = V_0 \;\rightarrow\; A = \frac{V_0}{\alpha}$$

Con lo que obtenemos:

$$V(\theta) = V_0\frac{\theta}{\alpha} \tag{1}$$

para $0 \leq \theta \leq \alpha$.
De la ecuación (1) podemos obtener inmediatamente el campo eléctrico:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\nabla V \\ &= -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}\end{aligned}$$

Como habíamos deducido que el campo iba en dirección $\hat{\theta}$, nos queda

$$\vec{E} = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} = -\frac{V_0}{\alpha r}\hat{\theta} \tag{2}$$

para $0 \leq \theta \leq \alpha$.
A partir de la expresión para el campo eléctrico y utilizando el hecho que sobre un conductor la densidad de carga es proporcional a la magnitud del campo, obtenemos la densidad de carga sobre las placas.

$$\begin{aligned}\vec{E} \cdot \hat{n} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow \sigma &= \epsilon_0 E\hat{\theta} \cdot \hat{n}\end{aligned}$$

En la placa $\theta = 0$, la normal $\hat{n}$ y la dirección $\hat{\theta}$ son paralelos. Entonces $\hat{\theta} \cdot \hat{n} = 1$.
De la ecuación (2) obtenemos

$$\sigma(\theta = 0) = -\frac{\epsilon_0 V_0}{\alpha r} \tag{3}$$

En tanto que la placa superior, haciendo un calculo similar, pero esta vez usando que $\hat{\theta}$ y $\hat{n}$ son anti-paralelos, obtenemos

$$\sigma(\theta = \alpha) = +\frac{\epsilon_0 V_0}{\alpha r} \tag{4}$$

Integrando (3) y (4) obtenemos la carga total sobre cada una de las placas.
En la placa superior

$$Q = \int_{\delta}^{d+\delta} \frac{\epsilon_0 V_0}{\alpha r}\, dr = \frac{\epsilon_0 V_0}{\alpha} \ln\left(\frac{d+\delta}{\delta}\right)$$

Mientras la carga de la placa interior es $-Q$.
Finalmente, la capacidad del condensador es $Q/\Delta V$, donde $\Delta V = V_0 - 0 = V_0$, por lo tanto

$$C = \frac{\epsilon_0}{\alpha} \ln\left(\frac{d+\delta}{\delta}\right).$$

Gradiente y Laplaciano en distintas coordenadas[1]

Coordenadas Cartesianas

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$
$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordenadas Cilíndricas

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$
$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordenadas Esféricas

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{\rho \sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi}$$
$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

[1]Notar que el gradiente de un campo escalar resulta en un vector, mientras que el Laplaciano es otro escalar, ya que $\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f)$.