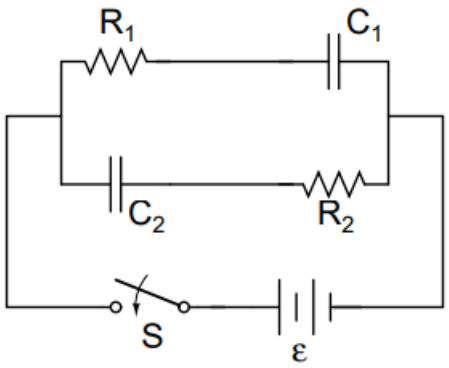
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Física
FIS1533-9 - Electricidad y Magnetismo
Profesora Macarena Domínguez
Ayudante: Samuel Urrutia (samuel.urrutia@uc.cl)

Ayudantía 16

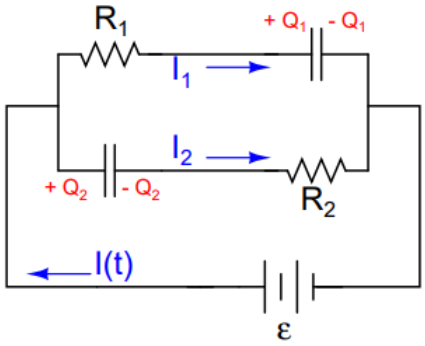
Problema 1

En $t = 0$ el interruptor del circuito mostrado abajo se cierra. Obtenga las cargas en los condensadores, y las corrientes que fluyen por las resistencias, si los condensadores inicialmente estaban descargados.



SOLUCION:

Supongamos que la corriente circula como muestra la figura de abajo y apliquemos Kirchhoff a la malla del borde exterior



$$\varepsilon - I_1 R_1 - \frac{Q_1}{C_1} = 0$$

Mientras que en la malla interior,

$$\varepsilon - \frac{Q_2}{C_2} - I_2 R_2 = 0$$

Claramente, la tasa a la que se carga cada condensador es igual a la corriente que pasa por dicho condensador. Así,

$$I_1 = \frac{dQ_1}{dt}, \quad I_2 = \frac{dQ_2}{dt}$$

Reemplazando en las ecuaciones,

$$\varepsilon - R_1 \frac{dQ_1}{dt} - \frac{Q_1}{C_1} = 0, \quad \varepsilon - \frac{Q_2}{C_2} - R_2 \frac{dQ_2}{dt} = 0$$

Resolveremos detalladamente la primera ecuación mediante Separación de variables:

$$\frac{dQ_1}{dt} = \frac{\varepsilon}{R_1} - \frac{Q_1}{R_1 C_1} = \frac{1}{R_1 C_1}\left(\varepsilon C_1 - Q_1\right) \quad \longrightarrow \quad \frac{dQ_1}{\varepsilon C_1 - Q_1} = \frac{dt}{R_1 C_1}$$

Así,

$$\ln\left(\varepsilon C_1 - Q_1\right) = -\frac{t}{R_1 C_1} + A$$

Tomando la exponencial, y definiendo $B = e^A$, una nueva constante,

$$Q_1(t) = \varepsilon C_1 - B e^{-t/R_1 C_1}$$

Como inicialmente el condensador estaba descargado, $B = \varepsilon C_1$, y por tanto:

$$Q_1(t) = \varepsilon C_1 \left(1 - e^{-t/R_1 C_1}\right)$$

Para el segundo condensador es un proceso análogo,

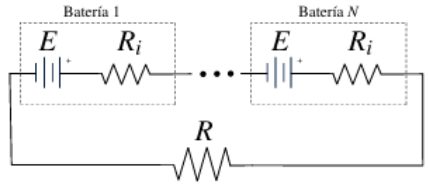
$$Q_2(t) = \varepsilon C_2 \left(1 - e^{-t/R_2 C_2}\right)$$

Derivamos para obtener las corrientes,

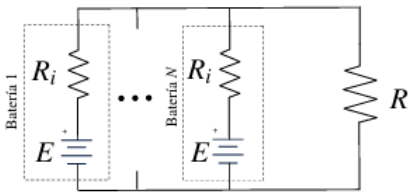
$$I_1(t) = \frac{\varepsilon}{R_1} e^{-t/R_1 C_1}, \quad I_2(t) = \frac{\varepsilon}{R_2} e^{-t/R_2 C_2}$$

Problema 2

Se tiene N baterías, cada una con la misma FEM E y la misma resistencia interna R_i. Ellas pueden ser conectadas todas en serie o bien todas en paralelo y, en ambos casos, el circuito es cerrado con una resistencia adicional R. Determine las potencias P_{ser} y P_{par} que se disipan en R en cada uno de los dos casos. Encuentre el valor R_{ser} de R que permite obtener el mayor valor para P_{ser} y encuentre el valor R_{par} de R que permite obtener el mayor valor para P_{par}. Determine en cuál de los dos casos la potencia disipada en R es mayor.



Circuito Serie



Circuito Paralelo

SOLUCION:

En cada caso se puede calcular la potencia disipada por R como

$$P = RI^2$$

donde I corresponden a la corriente que pasa por la resistencia R. En el caso en serie, la corriente es la misma que circula en todo el circuito, luego por Kirchhoff se tendrá que

$$\begin{aligned} NE - NR_iI - RI &= 0 \\ \Rightarrow I &= \frac{NE}{NR_i + R} \\ \Rightarrow P_{\text{ser}} &= R\left(\frac{NE}{NR_i + R}\right)^2 \end{aligned}$$

Por otro lado, en la conexión en paralelo por las N fuentes debe salir la misma corriente. Entonces, si por cada batería sale una corriente I/N por la resistencia pasará una corriente

I. Por Kirchhoff nuevamente

$$\begin{aligned} E - R_i \frac{I}{N} - RI = 0 \\ \Rightarrow I = \frac{NE}{R_i + NR} \\ \Rightarrow P_{\text{par}} = R \left(\frac{NE}{R_i + NR} \right)^2 \end{aligned}$$

Para hallar los R_{ser} y R_{par} que maximizan la potencia hay que derivar e igualar a cero. En el caso en serie

$$\frac{dP_{\text{ser}}}{dR} = \frac{(NE)^2 (NR_i + R)(NR_i - R)}{(NR_i + R)^4} = 0$$

Despejando R, obtenemos

$$R_{\text{ser}} = NR_i$$

Ahora para el caso en paralelo,

$$\frac{dP_{\text{par}}}{dR} = \frac{(NE)^2 (R_i + NR)(R_i - NR)}{(R_i + NR)^4} = 0$$

donde se obtiene

$$R_{\text{par}} = \frac{R_i}{N}$$

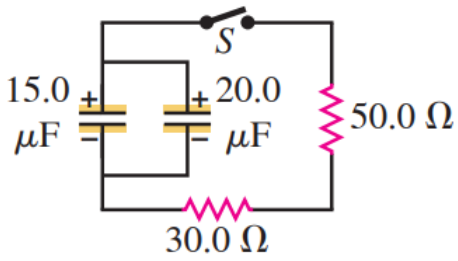
Al evaluar las potencias en sus respectivas resistencias, se obtiene que

$$P_{\text{ser}}(R_{\text{ser}}) = P_{\text{par}}(R_{\text{par}}) = \frac{NE^2}{4R_i}$$

Por lo que en ambos casos la potencia disipada es la misma.

Problema 3

En el circuito que se muestra en la figura, ambos condensadores están inicialmente cargados a 45 V. ¿Después de cuánto tiempo después de cerrar el interruptor S el potencial de ambos condensadores se reduce a 10 V? Encuentre la corriente en este tiempo.



SOLUCION:

Los condensadores, que están en paralelo, se descargaran de forma exponencial mediante las resistencias. Como V es proporcional a Q, entonces V debe obedecer la misma ecuación exponencial que Q:

$$V = V_0 e^{-t/RC}$$

Para encontrar el tiempo que toma el voltaje para llegar a 10 V, despejamos de la ecuación de voltaje

$$t = -RC \ln\left(\frac{V}{V_0}\right)$$

En el circuito ambas resistencias están en serie, por lo que $R_{\text{eq}} = 80\ \Omega$, y los condensadores en paralelo entregan $C_{\text{eq}} = 35\ \mu\text{F}$. Reemplazando

$$t = -(80\ \Omega)(35\ \mu\text{F}) \ln\left(\frac{10}{45}\right) = 4210\ \mu\text{s} = 4{,}21\ \text{ms}$$

Para la corriente, sabemos que $V = IR$ de la ley de Ohm, entonces

$$I = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$$

Reemplazando el tiempo que encontramos y los demás valores, se obtiene

$$I = 0{,}125\ \text{A}$$