Una polarización produce σ_p y ρ_p : $\rho_p = -\nabla P = -\frac{\partial(P)}{\partial z} \Rightarrow \rho_p = 0$ ∧ $\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n} = P\hat{z}\cdot\hat{r}$

$\Rightarrow \sigma_p = P\hat{z}\cdot\langle \sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta\rangle$

$\Rightarrow \sigma_p = P\cos\theta$

Si bien hay simetría esférica, $\vec{E}$ No es simetrico debido a la polarización... No puedo usar Gauss

Por definición : $\vec{P} = 0$; $\vec{P}' = \Omega\hat{r}$; $dq = \sigma \overbrace{R^2\sin\theta\, d\theta d\phi}^{ds} = P\cos\theta R^2\sin\theta\, d\theta d\phi$

$$dE = \frac{K(0-R\hat{r})P\cos\theta R^2\sin\theta\, d\theta d\phi}{R^3} \Rightarrow dE = -KP\cos\theta\sin\theta\, d\theta d\phi\,\hat{r} \Rightarrow dE = -KP\cos\theta\sin\theta\, d\theta d\phi\langle \sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta\rangle$$

$$\Rightarrow E = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} -KP\cos\theta\sin\theta\, d\theta d\phi \langle \sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta\rangle \quad (\text{★})$$

$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} -KP\cos\theta\sin\theta\, d\theta d\phi\,\sin\theta\cos\phi$ (0 por simetría)

$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} -KP\cos\theta\sin\theta\, d\theta d\phi\,\sin\theta\sin\phi$ (0 por simetría)

$$\Rightarrow E = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} -KP\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta d\phi \Rightarrow E = -\frac{1}{2\varepsilon_0}P\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{P}{3\varepsilon_0}\hat{z}}$$

★ $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} -KP\cos\theta\sin\theta\, d\theta d\phi\,\sin\theta\cos\phi \Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} -KP\cos\theta\cos\phi\sin^2\theta\, d\theta d\phi \Rightarrow \int_0^{2\pi} -KP\cos\phi\left(\frac{\sin^3\theta}{3}\right)\Big|_0^{\pi} d\phi = 0$ (sin³θ/3 → 0)

$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} -KP\cos\theta\sin\theta\, d\theta d\phi\,\sin\theta\sin\phi \Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} -KP\cos\theta\sin^2\theta\sin\phi\, d\theta d\phi \Rightarrow \int_0^{2\pi} -KP\sin\phi\left(\frac{\sin^3\theta}{3}\right)\Big|_0^{\pi} d\phi = 0$ (sin³θ/3 → 0)

Calculemos ρ_p y σ_p :

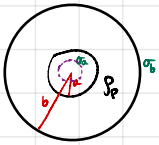
$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$ → Dieléctrico es esférico → $\rho_p = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 P_{(r)})}{\partial r} = -\frac{\beta}{r^2}$ ⇒ $\rho_p(r) = -\frac{\beta}{r^2}$

(Fórmula: $\frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 F)}{\partial r}$)

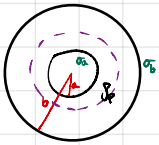
$\sigma = \vec{P}\cdot\hat{n}$ → $\sigma_{(r=a)} = \frac{\beta}{a}\hat{r}\cdot(-\hat{r})$; $\sigma_{(r=b)} = \frac{\beta}{b}\hat{r}\cdot\hat{r}$ ⇒ $\sigma(r=a) = -\frac{\beta}{a}$ $\quad \sigma(r=b) = \frac{\beta}{b}$

(Superficie con $\hat{n}$ hacia adentro)

Campos Eléctricos :



Si $r<a$, usando ley de Gauss ◌ : $Q_{enc} = 0$ ⇒ $E(r) = 0$ $\quad r<a$

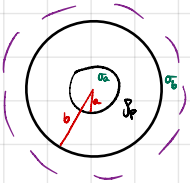


Si $a<r<b$, por Ley de Gauss : $Q_{en} = Q_\rho + Q_{\sigma(r=a)}$

$$\Rightarrow Q_{en} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^r \left(-\frac{\beta}{r^2}\right) r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi + \iint \left(-\frac{\beta}{a}\right) dA$$

$$\Rightarrow Q_{en} = -4\pi\beta(r-a) \qquad -4\frac{\beta}{a}\pi a^2$$

$$\Rightarrow E 4\pi r^2 = (-4\pi(r-a) - 4\beta\pi a)\frac{1}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \vec{E}_{(r)} = \frac{-\beta}{\varepsilon_0 r}\hat{r}$$



Si $r>b$, Ley de Gauss : $Q_{en} = Q_\rho + Q_{\sigma(r=a)} + Q_{\sigma(r=b)}$

$$\Rightarrow Q_{en} = -4\pi\beta(b-a) - 4\beta\pi a + 4\beta\pi b \Rightarrow Q_{en} = 0$$

$$\Rightarrow E(r) = 0$$

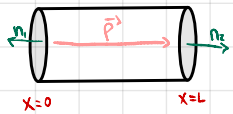
Ahora usando Ley de Gauss en Dieléctricos $\oint \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q_{libre}$

(Cargas que no son de polarización ☺)

- Si $r<a$, $Q_L = 0$ ⇒ $\vec{D} = 0$ ⇒ $\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = 0$, y como No hay polarización, $\vec{E} = 0$ ✓
- Si $a<r<b$, $Q_L = 0$ ⇒ $\vec{D} = 0$ ⇒ $\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = 0$ ⇒ $E = -\frac{\beta}{\varepsilon_0}$ ⇒ $\vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\beta}{r}\hat{r}$ ✓
- Si $r>b$, $Q_L = 0$ ⇒ $\vec{D} = 0$ ⇒ $\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = 0$, como No hay polarización ⇒ $\vec{E} = 0$ ✓

Es muuuucho más lindo $\vec{D}$, ¡Úsalo!

Lo mismo que antes :)



$\sigma_{(x=0)} = \vec{P} \cdot \hat{n} \Rightarrow \sigma_{(x=0)} = (a0^2+b)\hat{\imath} \cdot (-\hat{\imath}) \Rightarrow \sigma_{(x=0)} = -b$

$\sigma_{(x=L)} = \vec{P} \cdot \hat{n} \Rightarrow \sigma_{(x=L)} = (aL^2+b)\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} \Rightarrow \sigma_{(x=L)} = aL^2+b$

$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{\partial (ax^2+b)}{\partial x} \Rightarrow \rho_p = -2ax$

✱ Notar que en el interior $\hat{\imath} \cdot S = 0$
⇒ Carga en interior cero

La carga total será $Q_T = Q_{\sigma(x=0)} + Q_{\sigma(x=L)} + Q_\rho$

$\Rightarrow Q_T = -bA + A(aL^2+b) + A\int_0^L (-2ax)\,dx$

$\Rightarrow Q_T = AaL^2 - AaL^2 \Rightarrow Q_T = 0$

La ley de Ohm es válida cuando NO existe acumulación de carga $(\nabla \cdot \vec{J} = 0)$

↳ Ecuación de Continuidad

Por otro lado, la ley de Ohm queda: $\vec{J} = \gamma \vec{E}$ $/\nabla \cdot$ $\Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = \nabla \cdot \gamma \vec{E}$ $(= 0)$ ↳ Continuidad

↳ $\nabla \cdot \gamma \langle E_x, E_y, E_z \rangle$

Pidan la EDO en $\hat{S}$: $\frac{\partial}{\partial y}(a+by) E_{(y)} = 0$ $\Rightarrow \frac{dE}{dy}(a+by) + E_{(y)} b = 0$

En una EDO Separable: $\frac{dE}{E} = \frac{-b\, dy}{a+by}$ $\Rightarrow \int \frac{dE}{E} = -b \int \frac{1}{a+by}\, dy$

$\Rightarrow \ln|E| = -\ln|a+by| + C$

Consideramos $E, a, b, y > 0$

$\Rightarrow \ln(E(a+by)) = C$ $/e^{(\cdot)}$

$\Rightarrow E(a+by) = C$

$\Rightarrow E_y = \frac{C}{a+by}$

Para la constante usamos que entre S y S' hay V_0 de Potencial

$$V_0 = -\int_0^D E_y\, dy$$

$$\Rightarrow V_0 = -\int_0^D \frac{C}{a+by}\, dy$$

$$\Rightarrow V_0 = -\frac{C}{b}\left(\ln(a+by)\right)\Big|_0^D$$

$$V_0 = \frac{C}{b}\left(\ln(a) - \ln(a+bD)\right)$$

$$\Rightarrow C = \frac{V_0 b}{\ln\left(\frac{a}{a+bD}\right)}$$

Finalmente:

$$E_y = \frac{V_0 b}{\ln\left(\frac{a}{a+bD}\right)} \left(\frac{1}{a+by}\right) //$$

La Ley de Ohm macroscopica dice: $V = IR \Rightarrow R = \frac{V}{I}$

La corriente no es mas que $I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$ (Flujo de $\vec{J}$ en superficie S)

Tomando esta superficie del dibujo:



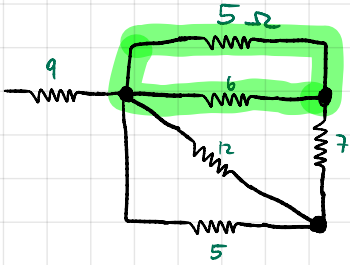
Ahora, sabemos que $\vec{J} = \gamma \vec{E}$, Asi que reemplazando en I

$$I = \int_S \gamma \vec{E} \, d\vec{s}$$

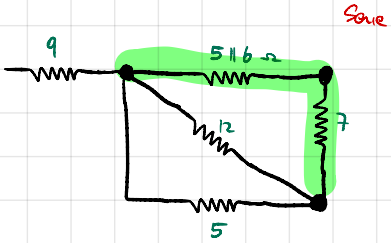
Como la corriente solo va en la dirección $\hat{y}$ Aproximamos la superficie con $E_y = \frac{C}{a+by}$

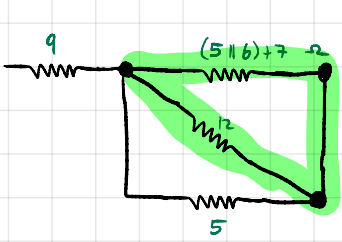
$$\Rightarrow I = \frac{C}{a+by} \pi R_{anillo}^2$$

$$\Rightarrow R = \frac{V_0}{\left(\frac{V_0 b}{\ln(\frac{a+bb}{a})}\right)\left(\frac{1}{a+by}\right)\pi R_{anillo}^2} \quad //$$

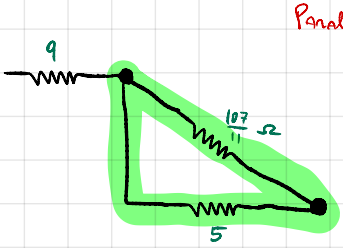


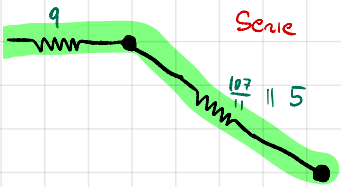
$\Rightarrow$





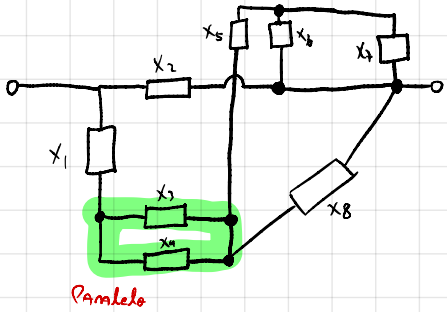
$\Rightarrow$

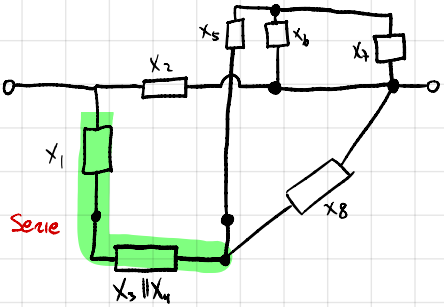


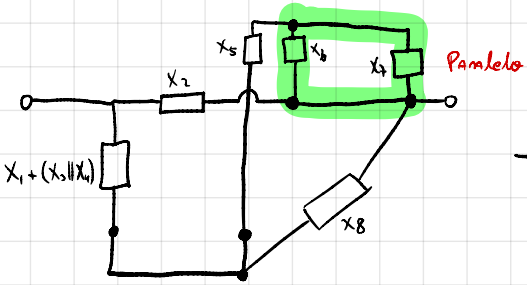


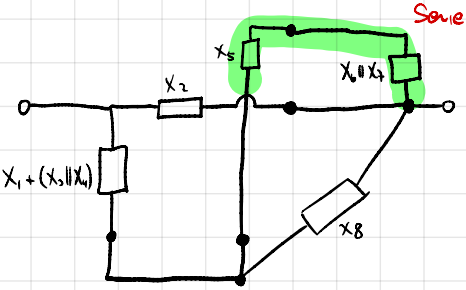
$\Rightarrow$

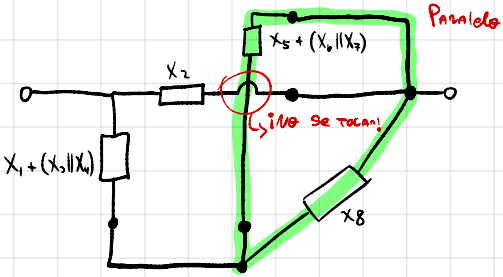
$$\Omega_{eq} = \left(\frac{107}{11} \parallel 5\right) + 9 \ \Omega$$

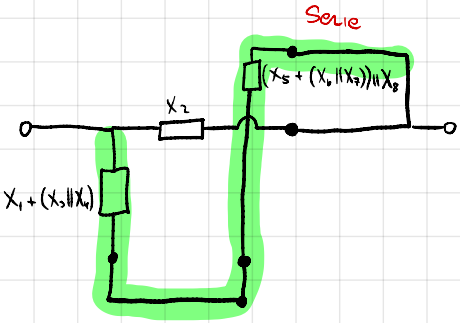


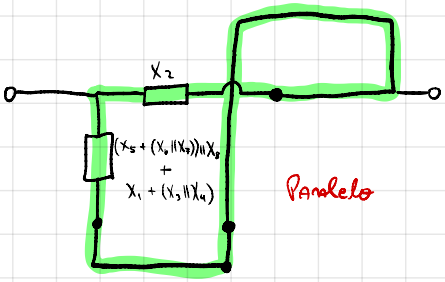












$$X_2 \parallel \left[X_1 + (X_3 \parallel X_4) + X_8 \parallel \left(X_5 + (X_6 \parallel X_7) \right) \right]$$