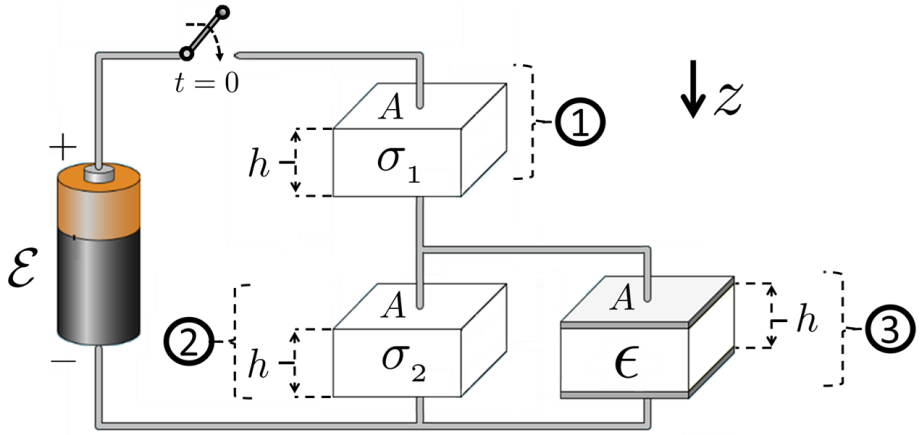
Interrogación 2

Fecha: 07 de noviembre del 2025

1. **Problema**



Considere un circuito compuesto por una pila eléctrica de fuerza electromotriz (FEM) $\mathcal{E}$ y tres elementos, denominados ① , ② y ③, tal como se muestra en la figura.

Los elementos ① y ② consisten en bloques de material homogéneo con conductividad eléctrica σ_1 (elemento ①) y σ_2 (elemento ②). Ambos bloques tienen la misma área transversal A y el mismo espesor h.

El elemento ③ está formado por dos placas conductoras ideales y paralelas, separadas una distancia h. El espacio entre las placas está completamente ocupado por un material de permitividad eléctrica $\epsilon > \epsilon_0$, donde ϵ_0 es la permitividad del vacío. El área de cada placa es A.

a) (1 pto.) Determine las resistencias R_1 y R_2 de los elementos ① y ②, respectivamente.

b) (1 pto.) Determine la capacitancia C_3 del elemento ③.

c) (1 pto.) De acá en adelante suponga conocidos los valores de R_1, R_2 y C_3. Dibuje el circuito usando los símbolos eléctricos. En el circuito identifique un nodo del sistema y defina las corrientes que entran y salen de este.

d) (1 pto.) Escriba las ecuaciones de Kirchhoff del circuito equivalente.

e) (1 pto.) Suponga además que C_3 se encuentra inicialmente descargado. Si en el instante $t = 0$ se cierra el interruptor, determine la evolución temporal de la carga en C_3.

f) (1 pto.) Finalmente, determine el valor de la polarización eléctrica inducida en el dieléctrico del condensador C_3 en el régimen estacionario ($t \to \infty$).

Solución a)

La resistencia del elemento se puede calcular con la fórmula

$$R = \int_{\Gamma} \frac{d\ell}{\sigma(\ell)\, A(\ell)} \qquad \text{(0.5 pts)}$$

donde Γ representa la trayectoria que sigue la corriente dentro del elemento. Para los elementos ① y ② el área A is la conductividad σ_k son constantes. Además $d\ell = dz$. Por tanto

$$R_k = \frac{1}{\sigma_k A} \int_0^h dz$$

$$R_k = \frac{h}{\sigma_k A} \qquad \text{donde} \qquad k = 1, 2. \qquad \text{(0.5 pts)}$$

■

Solución b)

Aplicando la ley de Gauss en la interface dieléctrico conductor se obtiene que

$$\epsilon\, E\, A = q \qquad \text{(0.3 pts)}$$

donde E es la magnitud del campo eléctrico y q es la carga libre en la interfaz. Por otro lado, la diferencia de potencial sobre el condensador es

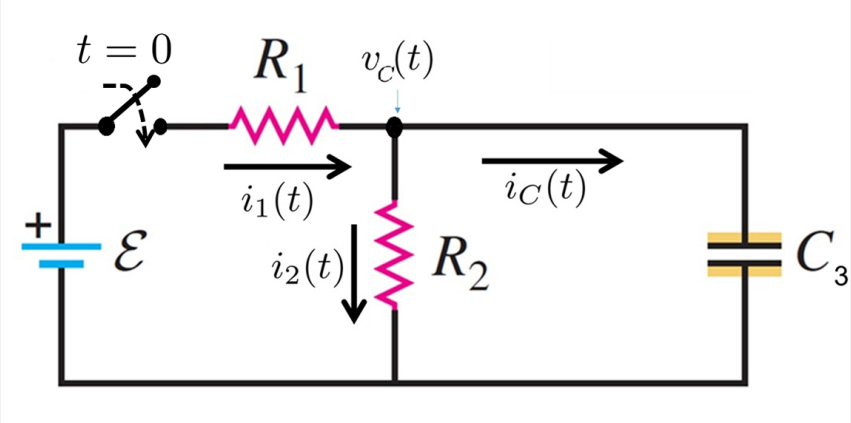
$$v_C = E\, h. \qquad \text{(0.3 pts)}$$

Combinando estas dos ecuaciones vemos que:

$$C_3 = \frac{q}{v_C} = \epsilon \frac{A}{h}. \qquad \text{(0.4 pts)}$$

■

Solución c)



0.1 pts por poner correctamente la FEM ($\mathcal{E}$) en el circuito
0.1 pts por poner correctamente la resistencia R_1 en el circuito
0.1 pts por poner correctamente la resistencia R_2 en el circuito
0.1 pts por poner correctamente el condensador eléctrico C_3 en el circuito
0.2 pts por definir una corriente i_1 que circula por la resistencia R_1.
0.2 pts por definir una corriente i_2 que circula por la resistencia R_2.
0.2 pts por definir una corriente i_C que circula por el condensador eléctrico C_3.

■

Solución d)
La ecuación de nodos del sistema es:

$$i_1 = i_2 + i_C\,. \qquad 0{,}3pts \tag{1}$$

Las ecuaciones de mallas son

$$\mathcal{E} - i_1 R_1 - i_2 R_2 = 0. \qquad 0{,}3pts \tag{2}$$

y

$$-\frac{q}{C_3} + i_2 R_2 = 0 \qquad 0{,}3pts \tag{3}$$

donde

$$i_C = \frac{dq}{dt}. \qquad 0{,}1pts \tag{4}$$

■

Solución e)

Combinando las ecuaciones (1) y (2) se obtiene que

$$i_2 = \frac{\mathcal{E} - i_C R_1}{R_1 + R_2}. \tag{5}$$

Sustituyendo la expresión de i_2 ecuación (5) en la ecuación (3) se obtiene

$$-q + v_C(\infty)\, C_3 - \tau\, i_C = 0 \tag{6}$$

donde

$$v_C(\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\mathcal{E} \qquad 0{,}3pts \tag{7}$$

es el valor de la diferencia de potencial sobre el condensador cuando $t \to \infty$. En la ecuación (6)

$$\tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C_3. \qquad 0{,}3pts \tag{8}$$

el cual es el tiempo de relajación del circuito. Sustituyendo la definición de corriente eléctrica (4) en la ecuación (6) y reorganizando términos se obtiene

$$-\frac{dt}{\tau} = \frac{dq}{q - v_C\, C_3} \tag{9}$$

La condición inicial indica que $q(0) = 0$, por tanto

$$-\int_0^t \frac{dt'}{\tau} = \int_0^q \frac{dq'}{q' - v_C\, C_3} \tag{10}$$

Lo cual da la solución

$$q(t) = v_C\, C_3 \left(1 - e^{t/\tau}\right) \qquad 0{,}4pts$$

es decir

$$q(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\mathcal{E}\, C_3 \left(1 - e^{t/\tau}\right)$$

■

Solución f)
La magnitud de la polarización, por definición, es

$$P = (\epsilon - \epsilon_0) E \qquad (0.3 \text{ pts})$$

donde la magnitud del campo eléctrico E cuando $t \to \infty$ está dada por la expresión

$$E = \frac{v_C(\infty)}{h}. \qquad (0.3 \text{ pts})$$

Utilizando la definición de $v_C(\infty)$ se obtiene

$$P = (\epsilon - \epsilon_0) \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{\mathcal{E}}{h}. \qquad (0.4 \text{ pts})$$

■

2. **Problema**

En el plano x-y considere un punto P, con coordenadas (L, L), y dos configuraciones de corrientes estacionarias [figuras (a) y (b)]. Se pide calcular el campo magnetico total en el punto P, en cada una de dichas configuraciones.

a) (4pt.) Un alambre con corriente i_0 que desciende por el eje $\hat{y}$ desde infinito, hasta el orígen, para luego continuar por el eje $\hat{x}$ hasta el infinito, como se ve en la figura (a)

b) (2pt.) Un alambre con corriente $2i_0$ que viene de infinito por la diagonal, $y = x$, se bifurca en dos alambres: uno en el sentido positivo del eje x y el otro en el sentido positivo del eje y, como se muestra en la figura (b). Cada uno de ellos conduce una corriente i_0.

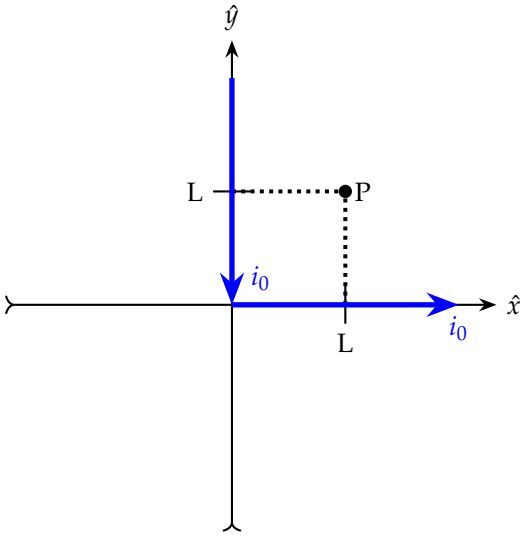


Figura (a)

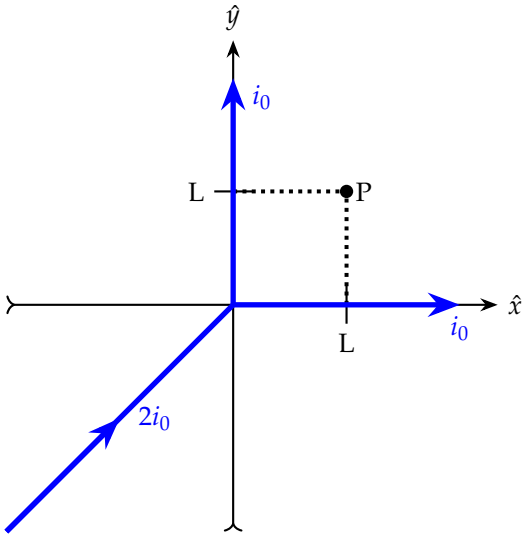


Figura (b)

Ayuda: $\int \frac{dx}{(A+(B-x)^2)^{3/2}} = \frac{1}{A}\frac{x-B}{(A+(B-x)^2)^{1/2}} + C$

Solución:

a)
El problema se puede dividir en dos segmentos, uno vertical (I) y otro horizontal (II).
Escogiendo el origen en la interseccion de los 2 segmentos, se puede proceder con la definicion de los vectores.
Para (I):

$$\vec{r} = L\hat{u}_x + L\hat{u}_y$$
$$\vec{r}' = y'\hat{u}_y$$
$$d\vec{\ell} = -dy'\hat{u}_y \qquad \text{(0.5 pts)}$$

con estos elementos se puede presentar la integral que representa el campo magnetico de (I)

$$\begin{aligned}
\vec{B}_I(P) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int i_o d\vec{\ell} \wedge \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^\infty i_o dy'(-\hat{u}_y) \wedge \frac{(L\hat{u}_x + L\hat{u}_y - y'\hat{u}_y)}{(L^2+(L-y')^2)^{3/2}} \qquad \text{(0.5 pts)} \\
&= \frac{\mu_0 i_0 \hat{u}_z L}{4\pi}\int_0^\infty \frac{dy'}{(L^2+(L-y')^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\mu_0 i_0}{4\pi L}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\hat{u}_z \qquad \text{(0.5 pts)}
\end{aligned}$$

En el caso del campo de (II) se puede mencionar que tiene el mismo valor (haciendo un pequeño analisis de rotacion) o bien calculando de nuevo las relaciones:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= L\hat{u}_x + L\hat{u}_y \\ \vec{r}' &= x'\hat{u}_x \\ d\vec{\ell} &= dx'\hat{u}_x\end{aligned} \qquad \text{(0.5 pts)}$$

esto en la integral para B:

$$\begin{aligned}\vec{B}_{II}(P) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int i_o d\vec{\ell}\wedge\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^\infty i_o dx'(-\hat{u}_x)\wedge\frac{(L\hat{u}_x+L\hat{u}_y-x'\hat{u}_x)}{((L-x')^2+L^2)^{3/2}} \qquad \text{(0.5 pts)} \\ &= \frac{\mu_0 i_0\hat{u}_z L}{4\pi}\int_0^\infty\frac{dx'}{(L^2+(L-x')^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 i_0}{4\pi L}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\hat{u}_z \qquad \text{(0.5 pts)}\end{aligned}$$

Por lo que el campo total sera:

$$\vec{B}_{tot} = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi L}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\hat{u}_z \qquad \text{(1.0 pts)}$$

b)

Primero podemos notar que la corriente del segmento (I) se invierte, resultando que $\vec{B}_I + \vec{B}_{II} = \vec{0}$ (0.5 pts).
Por otro lado, si consideramos (III) el tramo diagonal, se puede rotar el sistema de coordenadas, y ecotrar que $\vec{B}_{III} = \vec{0}$ (pues el $d\vec{\ell}$ es paralelo al vector $\vec{r}-\vec{r}'$
Tambien si se hace la descomposicion en el sistema original considerando al vector que define la diagonal $\hat{u}_x + \hat{u}_y$, con $x' = y'$:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= L\hat{u}_x + L\hat{u}_y = L(\hat{u}_x+\hat{u}_y) \\ \vec{r}' &= x'\hat{u}_x + y'\hat{u}_y = x'(\hat{u}_x+\hat{u}_y) \\ d\vec{\ell} &= dx'\hat{u}_x + dy'\hat{u}_y = dx'(\hat{u}_x+\hat{u}_y)\end{aligned} \qquad \text{(0.5 pts)}$$

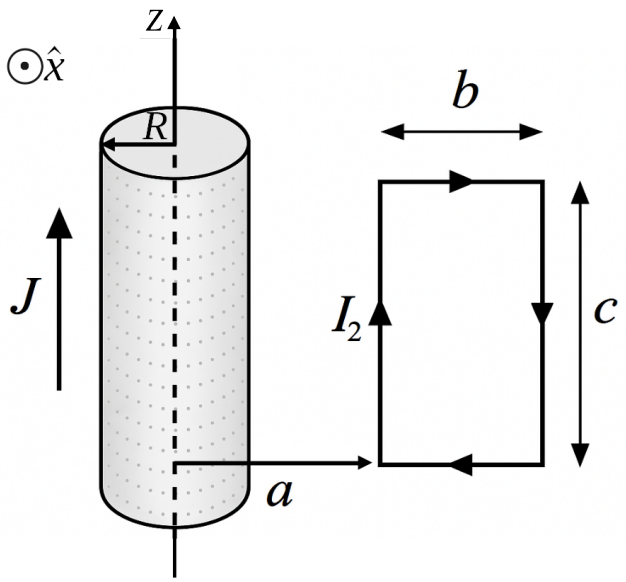
entonces

$$\begin{aligned}\vec{B}_{II}(P) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int i_o d\vec{\ell}\wedge\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^\infty i_o dx'(\hat{u}_x+\hat{u}_y)\wedge\frac{(L(\hat{u}_x+\hat{u}_y)-x'(\hat{u}_x+\hat{u}_y))}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \qquad \text{(0.5 pts)}\end{aligned}$$

y notamos que el producto cruz se hace entre vectores paralelos entre si, por lo que el resultado es $\vec{0}$ (0.5 pts) ■

3. **Problema**
Un conductor cilíndrico infinito de radio R con su eje de simetría coincidente con la dirección $\hat{z}$, conduce una densidad de corriente no uniforme $\vec{J} = kr^2\,\hat{z}$, donde k es una constante desconocida y r es la distancia radial al eje de simetría del cilindro. Además una espira rectangular de lados b y c con corriente constante I_2 es colocada paralela al cilindro a una distancia a, como lo muestra la figura.

Considere que la dirección $\hat{x}$ es perpendicular a la hoja, de esta manera, la espira rectangular está sobre el plano y-z.



Si el cilindro conduce una corriente total I_1:

a) (1 pto.) Determine la constante k en función de I_1 y R y μ_0.

b) (2.5 pts.) Encuentre el campo magnético originado por el cilindro para cualquier valor de r. Puede dejar su resultado en función de k.

c) (2.5 pts.) Calcule la fuerza total y el torque magnético que el cilindro ejerce sobre la espira. Puede dejar su resultado en función de k.

Solución:

a) Para determinar la constante k consideremos que la corriente total en el cilindro es:

$$I_1 = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} \qquad \text{(0.5 pts)}$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^R kr^2 \cdot r dr d\theta$$

$$I_1 = \frac{kR^4\pi}{2}$$

Entonces,

$$k = \frac{2I_1}{\pi R^4} \qquad \text{(0.5 pts)}$$

■

b) Para determinar el campo magnético consideremos la Ley de Ampére:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_o I_{\text{enc}}\,. \qquad \text{(0.5 pts)}$$

Para cada uno de los siguientes casos, consideremos un camino circular cerrado concéntrico al cilindro de radio r. Además, se secribirá la corriente encerrada como:

$$I_{\text{enc}} = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int J(r) r dr d\theta\,, \qquad \text{(0.4 pts)}$$

donde se ha considerado que $\vec{J}$ y $d\vec{A}$ están ambos en $\hat{z}$.

Luego, para $r < R$:

$$B2\pi r = \mu_0 \int_0^{2\pi} \int_0^r kr^3 dr d\theta \qquad \text{(0.4 pts)}$$

$$B2\pi r = \mu_0 k \frac{r^4\pi}{2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 k r^3}{4}\,\hat{\theta} \qquad \text{(0.4 pts)}$$

Si se reemplaza el valor de k obtenido en el inciso anterior, se tiene que $B = \frac{\mu_0 r^3 I_1}{2\pi R^4}$ para $r < R$.

Para $r > R$:

$$B2\pi r = \mu_0 \int_0^{2\pi} \int_0^R kr^2 dr d\theta \qquad \text{(0.4 pts)}$$

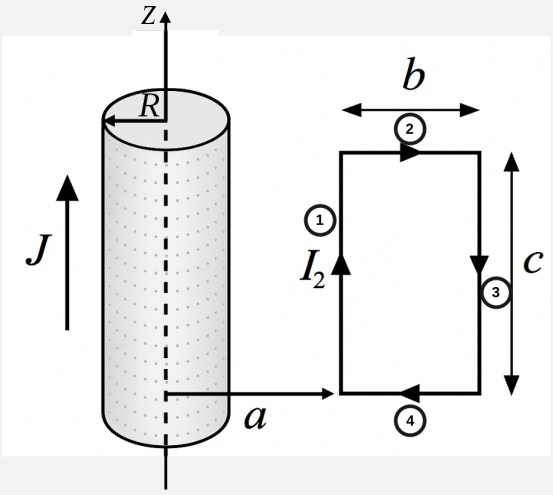
$$B2\pi r = \mu_0 k \frac{R^4\pi}{2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 k R^4}{4r}\,\hat{\theta} \qquad \text{(0.4 pts)}$$

Si se reemplaza el valor de b obtenido en el inciso anterior, se tiene que $B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$ para $r > R$.

■

c) Para determinar la fuerza sobre la espira consideremos los segmentos de la espira mostrados en la figura y el que el campo magnético producido por el cilindro (entra a la página), es decir, está en $\hat{\theta}$ o $-\hat{x}$ si se define el eje x perpendicular a la página.



Se presentan dos métodos de resolución, ambos consideran que:

$$\vec{F} = I \int d\vec{l} \times \vec{B}\,.$$

Note que ambos métodos tienen distribución de puntajes ligeramente diferentes.

Método 1:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 \qquad \text{(0.5 pts)}$$

$$\vec{F} = I_2 \left[\int B dz(\hat{z} \times \hat{\theta}) + \int B dr(\hat{r} \times \hat{\theta}) + \int B dz(-\hat{z} \times \hat{\theta}) + \int B dr(-\hat{r} \times \hat{\theta}) \right]$$

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left[\int_0^c \frac{(-\hat{r})dz}{a} + \int_a^{a+b} \frac{(+\hat{z})dr}{r} + \int_0^c \frac{(+\hat{r})dz}{(a+b)} + \int_a^{a+b} \frac{(-\hat{z})dr}{r} \right] \qquad \text{(0.5 pts)}$$

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left[\frac{(-\hat{r})c}{a} + \frac{(+\hat{r})c}{(a+b)} + \right] \qquad \text{(0.5 pts)}$$

$$\vec{F} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 c}{2\pi} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a+c} \right] \hat{r} \qquad \text{(0.5 pts)}$$

Método 2:

En este caso, definimos el sentido de la fuerza considerando la regla de la mano derecha. Es decir, $\vec{F}_1$ está en $-\hat{y}$, $\vec{F}_3$ en $+\hat{y}$, $\vec{F}_2$ en $+\hat{z}$ y $\vec{F}_4$ en $-\hat{z}$ (no es necesario escribir los vectores $d\vec{l}$ y $\vec{B}$ vectorialmente). Además, se puede notar por simetría que las magniudes de $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_4$ son iguales por lo que se anulan entre sí. (1.0 pts)Con esto, la fuerza se puede calcular:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_3$$

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left[\int_0^c \frac{(-\hat{y})dz}{a} + \int_0^c \frac{(+\hat{y})dz}{(a+b)} \right] \qquad \text{(0.5 pts)}$$

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left[\frac{(-\hat{y})c}{a} + \frac{(+\hat{y})c}{(a+b)} + \right]$$

$$\vec{F} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 c}{2\pi} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a+c} \right] \hat{y} \qquad \text{(0.5 pts)}$$

Note que la fuerza neta es en $-\hat{r}$ o $-\hat{y}$ (atractiva). Además, en caso de no haber calculado k en el inciso a), o bien no haberlo reemplazado, la fuerza se puede escribir como:

$$\vec{F} = -\frac{\mu_0 k I_2 c R^4}{4} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a+c} \right] \hat{y}$$

El torque neto será nulo ya que todas las fuerzas están en el mismo plano de la espira. (0.5 pts) ■