1

Creo que el mejor sistema coordenado es cilíndricas, así la velocidad queda

$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{z}$, y como el movimiento es en una hélice, $\dot{r} = 0$

$\Rightarrow \vec{v} = r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{z}$ con $\vec{B} = B\hat{z}$

La fuerza a la que está sometida la carga es la fuerza de lorentz, así $\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -e\overbrace{\vec{v}\times\vec{B}}^{(\hat{\theta}+\hat{z})\times\hat{z}} = m(-R\dot{\theta}^2\hat{r} + R\ddot{\theta}\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{z})$

$-e\,v\,B\,\hat{r} = m(-R\dot{\theta}^2\hat{r} + R\ddot{\theta}\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{z})$

De aquí se deduce que $R\ddot{\theta} = 0$ y $\ddot{z} = 0$

Reordenando en $\hat{r}$

$-eR\dot{\theta}B = -mR\dot{\theta}^2 \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{eB_0}{m}$

Regla de 3: $\frac{2\pi}{\theta} = \frac{S}{z} \Rightarrow z = \frac{S}{2\pi}\theta$

¿Como encuentro $\dot{z}$? $\rightsquigarrow \dot{z} = \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \dot{z} = \frac{S}{2\pi}\frac{eB_0}{m}$

Así, la rapidez es $\|v\| = \sqrt{(R\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2} \Rightarrow \|v\| = \frac{eB_0}{m}\sqrt{R^2 + \left(\frac{S}{2\pi}\right)^2}$

☆ El positron gira en el otro sentido

2

La Fuerza en el electrón en cualquier punto es $\vec{F}_{neta} = m\vec{a}$ .... ¿Qué sistema de Referencia uso? ⇝ Polar (2D)

$\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$, donde $\vec{E}(r) = E_{(r)}\hat{r}$, $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$ y $\vec{B} = B\hat{z}$

Luego la Fuerza de Lorentz queda como: $\vec{F} = -e(E_{(r)}\hat{r} + [\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}]\times B\hat{z})$

$$\vec{F} = -e(E_{(r)}\hat{r} - r\dot{\theta}B\hat{\theta} + r\dot{\theta}B\hat{r})$$

$$\vec{F} = -e(E_{(r)} + r\dot{\theta}B\,\hat{r} - \dot{r}B\hat{\theta})$$

Relacionamos el momentum angular: $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = r\hat{r}\times[-e(E_{(r)} + r\dot{\theta}B\,\hat{r} - \dot{r}B\hat{\theta})]$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = er\dot{r}B\,\hat{k} \quad \Rightarrow \frac{dL}{dt} = er\frac{dr}{dt}B \qquad \hat{k}$$

Ahora integro: $\int_{L_0}^{L} dL = eB\int_{a}^{r} r\,dr \Rightarrow L(r) = L_0 + eB\frac{r^2 - a^2}{2}$

Y la velocidad? ⇝ $\vec{L} = \vec{r}\times m\vec{v} \Rightarrow \|L\| = rm\|v\| \Rightarrow L_{(r)} = mrv$

Igualando: $mrv = L_0 + eB\frac{r^2 - a^2}{2}$, si $v_0 \approx 0 \Rightarrow L_0 \approx 0$

$$\Rightarrow mrv = eB\frac{r^2 - a^2}{2}$$

$$\Rightarrow v(b) = eB\frac{b^2 - a^2}{2mb}$$ //

Análisis energético (V = W/q ⇒ W = Vq)

$$U_i + K_i = U_f + K_f \Rightarrow -eV_{(\infty)} + \frac{1}{2}mv_0^2 = -eV_{(a)} + \frac{1}{2}mv_a^2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 = -e(V_{(a)} - V_{(\infty)})$$

Por enunciado $V_{(a)} - V_{(\infty)} = V_0$ y $v_0 \approx 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_a^2 = eV_0 \Rightarrow v_a = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}$

Igualo Ambos v_b obtenidos y despejo B: $\sqrt{\frac{2eV_0}{m}} = eB\frac{b^2 - a^2}{2mb}$

$$\Rightarrow B = \frac{2mb}{e(b^2 - a^2)}\sqrt{\frac{2eV_0}{m}}$$

3

En el inicio, la partícula está en reposo, así $v \times B = 0$ (no hay fuerza magnética). Pero sí hay fuerza eléctrica qE, así que iniciará un mov. en el eje z. Luego sí habrá velocidad y $\therefore$ hay fuerza magnética.

La F_{mag} empujará a la partícula a la carga. Eventualmente llegará a 'suelo' y volverá a repetir la trayectoria.



Como solo va en direcciones $\hat{j}\,\hat{k}$, $\vec{v} = \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$

Veamos $v \times B \Rightarrow \begin{vmatrix} \uparrow & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \dot{y} & \dot{z} \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = B\dot{z}\hat{j} - B\dot{y}\hat{k}$

Ahora por 2da ley de Newton : $F_{total} = m\vec{a} \Rightarrow Q(E - B\dot{y}\hat{k} + B\dot{z}\hat{j}) = m(\ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k})$

Igualando Componentes : $QB\dot{z} = m\ddot{y}$ $\hat{j}$ $\qquad$ $QE - QB\dot{y} = m\ddot{z}$ $\hat{k}$

$\Rightarrow \frac{QB}{m}\dot{z} = \ddot{y}$ $\hat{j}$ $\qquad$ $\frac{QB}{m}\left(\frac{E}{B} - \dot{y}\right) = \ddot{z}$

Se define $\omega \equiv \frac{QB}{m}$ (Frecuencia ciclotrónica)

$\Rightarrow \ddot{y} = \omega\dot{z} \qquad \ddot{z} = \omega\left(\frac{E}{B} - \dot{y}\right)$

Solución EDO 2do Orden :)

$$y(t) = \frac{E}{B}t + C_1\,Sen(\omega t) + C_2\,Cos(\omega t) + C_3$$

$$z(t) = C_2\,Cos(\omega t) - C_1\,Sin(\omega t) + C_4$$

$\ddot{y} = \omega^2\left(\frac{E}{B} - \dot{y}\right)$

$\alpha = \dot{y} \Rightarrow \dot{\alpha} = \ddot{y}$ $\ddot{\alpha} = \dddot{y}$

$\ddot{\alpha} = \omega^2\left(\frac{E}{B} - \alpha\right)$

$\ddot{\alpha} = \omega^2\frac{E}{B} - \omega^2\alpha \rightsquigarrow \frac{E}{B} + C_1\,Cos(\omega t) + C_2\,Sin(\omega t) = \alpha = \dot{y}$

Pero $\dot{Y}(0) = 0 = \dot{z}(0) \Rightarrow Y(t) = \frac{E}{\omega_B}(\omega T - \operatorname{Sen}\omega T)$ $\qquad z(T) = \frac{E}{\omega_B}(1 - \cos\omega T)$

Se define $R = \frac{E}{\omega_B}$ y usando la identidad pitagórica $\operatorname{Sen}^2 + \cos^2 = 1$

$$Y = R(\omega T - \operatorname{Sen}\omega T) \Rightarrow \operatorname{Sen}\omega T = \omega T - \frac{Y}{R}$$

$$z = R(1 - \cos\omega T) \Rightarrow \cos\omega T = 1 - \frac{z}{R}$$

$\operatorname{Sen}^2\omega T + \cos^2\omega T = 1$

$$\Rightarrow \left(\omega T - \frac{Y}{R}\right)^2 + \left(1 - \frac{z}{R}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow (R\omega T - Y)^2 + (R - z)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow (Y - R\omega T)^2 + (z - R)^2 = R^2$$

Ecuación circulo de centro $\langle 0, R\omega T, R \rangle$

$v = R\omega$

$$\Rightarrow (Y - vT)^2 + (z - R)^2 = R^2$$

Es un movimiento a lo largo del eje y con una velocidad constante.