PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Física
**FIS1533-9 - Electricidad y Magnetismo**
Profesora Macarena Domínguez
Ayudante: Samuel Urrutia (samuel.urrutia@uc.cl)

---

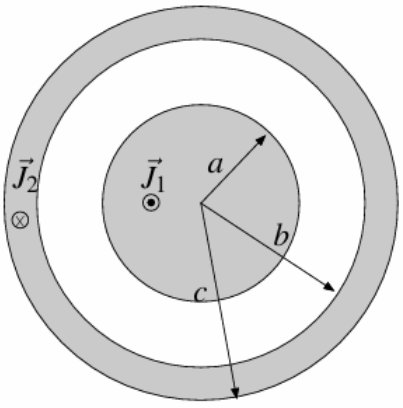
# Ayudantía 22

## Problema 1

Un cable coaxial muy largo consiste en un cilindro sólido con un radio interior de radio $a$, rodeado por un cascarón cilíndrico conductor concéntrico de radio interno $b$ y exterior $c$. El conductor interior tiene una densidad de corriente no uniforme $\vec{J}_1 = \alpha r \hat{z}$ donde $\alpha$ es una constante. El cilindro exterior tiene una densidad de corriente $\vec{J}_2 = -\beta \hat{z}$ donde $\beta$ es una constante positiva. Los conductores llevan una igual y opuesta corriente de magnitud $I_0$. Entre ambos conductores existe vacío.

a) Encuentre los valores de $\alpha$ y $\beta$ en términos de $a$, $b$, $c$ y $I_0$.

b) Determine el campo magnético en todo el espacio.



**SOLUCION:**

a) Usando la definición de corriente eléctrica a partir de la densidad de corriente, se obtiene que

$$I_0 = \int_S \vec{J_1} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^a \alpha r \hat{z} \cdot r dr d\theta \hat{z} = \frac{2\pi\alpha a^3}{3}$$
$$\Rightarrow \alpha = \frac{3I_0}{2\pi a^3}$$
$$-I_0 = \int_S \vec{J_2} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_b^c -\beta \hat{z} \cdot r dr d\theta \hat{z} = -\beta\pi \left(c^2 - b^2\right)$$
$$\Rightarrow \beta = \frac{I_0}{\pi \left(c^2 - b^2\right)}$$

b) Por otro lado, el campo magnético es por ley de Ampere, la cual nos dice que

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{enc}$$

En nuestro caso, por la simetría axial del problema, $\vec{B} = B\hat{\theta}$ y por tanto:

- $r < a$ :

$$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 \int_0^{2\pi} \int_0^r \alpha r \hat{z} \cdot r dr d\theta \hat{z} = \mu_0 \frac{2\pi}{3} \alpha r^3$$
$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I_0 r^2}{2\pi a^3} \hat{\theta}$$

- $a < r < b$ :

$$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 \int_0^{2\pi} \int_0^a \alpha r \hat{z} \cdot r dr d\theta \hat{z} = \mu_0 I_0$$
$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \hat{\theta}$$

- $b < r < c$ :

$$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 I_0 - \mu_0 \int_0^{2\pi} \int_b^r \beta \hat{z} \cdot r dr d\theta \hat{z}$$
$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \hat{\theta}$$

- $r > c$ :

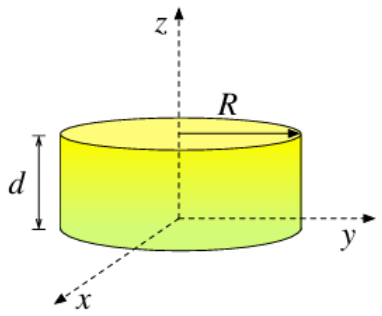
$$B(r) \cdot 2\pi r = I_0 - I_0 = 0$$
$$\Rightarrow \vec{B} = 0$$

# Problema 2

Sobre el plano $xy$ se encuentra una moneda magnetizada muy pequeña de radio $R$ y espesor $d$. Experimentalmente sólo se conoce la componente axial del campo magnético dentro de la moneda, dado por

$$B_z = B_0(1 + \kappa z^2)$$

donde $\kappa$ es una constante. Suponiendo que el campo magnético posee simetría axial y no posee componente en $\hat{\theta}$, determine la intensidad de corriente que circula dentro de la moneda.




**SOLUCION:**

Como el problema no depende de la componente según $\hat{\theta}$, se puede deducir que el campo magnético es de la forma

$$\vec{B}(r, z) = B_r(r, z)\hat{r} + B_z(r, z)\hat{z}$$

Esto es básicamente debido adicionalmente debe cumplirse que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, esto implica que el flujo en cualquier superficie cerrada siempre es nulo. Usando lo anterior, por en enunciado se sabe que $B_z(r, z) = B_0\,(1 + \kappa z^2)$, por lo que tomando un cilindro pequeño de radio $r$ y altura $z$ dentro de la moneda se tiene que

$$\Phi_{\text{Cilindro}} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$

Donde $\Phi_1$ y $\Phi_2$ son los flujos sobre las tapas superior e inferior respectivamente, y $\Phi_3$ el flujo sobre el manto. Ahora de acuerdo a la Ley de Gauss magnética se debe tener que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Longrightarrow \Phi_{\text{Cilindro}} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Determinando los flujos por separado se tiene

$$\Phi_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^r \vec{B}(r, 0) \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^r B_0\hat{z} \cdot r dr d\theta(-\hat{z}) = -B_0\pi r^2$$

$$\Phi_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^r \vec{B}(r, z) \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^r B_0\left(1 + \kappa z^2\right)\hat{z} \cdot r dr d\theta\hat{z} = B_0\left(1 + \kappa z^2\right)\pi r^2$$

Por lo que $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0 \Longrightarrow \Phi_3 = -\left(\Phi_1 + \Phi_2\right) = -B_0 \pi r^2 \kappa z^2$, pero por otro lado

$$\Phi_3 = \int_0^z \int_0^{2\pi} \vec{B}(r,z) \cdot r d\theta dz \hat{r} = 2\pi r \int_0^z B_r(r,z) dz = -B_0 \pi r^2 \kappa z^2$$
$$\Rightarrow B_r(r,z) = \frac{1}{2\pi r} \frac{d}{dz} \left(-B_0 \pi r^2 \kappa z^2\right)$$
$$\Rightarrow B_r(r,z) = -B_0 r \kappa z$$

entonces el campo magnético vale

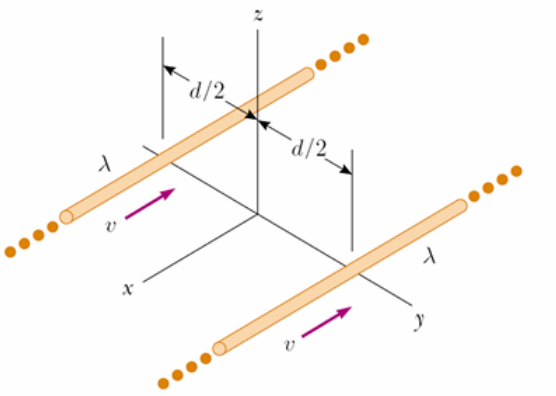
$$\vec{B} = -B_0 r \kappa z \hat{r} + B_0 \left(1 + \kappa z^2\right) \hat{z}$$

Finalmente para determinar la corriente

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$
$$\Rightarrow \vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{B_0 \kappa r}{\mu_0} \hat{\theta}$$
$$\Rightarrow I = \int_0^d \int_0^R -\frac{B_0 \kappa r}{\mu_0} \hat{\theta} \cdot dr dz \hat{\theta} = -\frac{B_0 \kappa d R^2}{2\mu_0}$$

# Problema 3

Suponga que tiene dos cables infinitamente largos con densidad lineal de carga $\lambda$, separados por una distancia $d$, moviéndose a velocidad $v$ constante. Encuentre el valor de $v$ para que la atracción magnética se compense con la repulsión eléctrica. ¿Es razonable este resultado?




**SOLUCION:**

El campo eléctrico generado por el cable izquierdo sobre el cable derecho está dado por

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d}\hat{y}$$

De esta forma, la fuerza eléctrica por unidad de largo será

$$\vec{F}_L^e = \lambda\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d}\hat{y} = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 d}\hat{y}$$

Por otro lado, los alambres en movimiento equivalen a una corriente

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\lambda dx}{dt} = \lambda v$$

El campo magnético generado por el cable izquierdo sobre el derecho es

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi d}\hat{z} = -\frac{\mu_0\lambda v}{2\pi d}\hat{z}$$

En este caso, la fuerza magnética por unidad de largo sobre el cable derecho será

$$\vec{F}_L^m = -I\hat{x} \times \left(-\frac{\mu_0\lambda v}{2\pi d}\hat{z}\right)$$

$$\vec{F}_L^m = -\frac{\mu_0\lambda^2 v^2}{2\pi d}\hat{y}$$

Para que éstas fuerzas se anulen

$$\vec{F}_L^e + \vec{F}_L^m = 0$$
$$\frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 d} = \frac{\mu_0 \lambda^2 v^2}{2\pi d}$$
$$\frac{1}{\epsilon_0} = \mu_0 v^2$$

La velocidad debe ser

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Evaluando

$$v = \frac{1}{\sqrt{8,85 \times 10^{-12} \times 4\pi 10^{-7}}} = 3 \times 10^8$$

Esta es la velocidad de la luz en el vacío, por lo que el resultado no es razonable y debemos considerar física adicional.