Interrogación 2

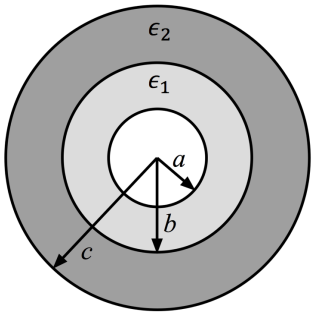
Fecha: 8 noviembre 2022

- **Nombre:** .....

- **RUT:** ..... **Sección:** .....

- Escriba su nombre, RUT, y sección de forma clara y legible en cada hoja.
- Debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
- Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
- La prueba consta de 2 preguntas de desarrollo y otras 6 de selección múltiple.
- En el caso de las preguntas de selección múltiple debe seleccionar solo una respuesta para cada pregunta. Para ello debe rellenar completamente el círculo de la respuesta seleccionada, de lo contrario su respuesta se considerará inválida. El desarrollo de las preguntas de selección múltiple no se considera en la corrección.
- Esta prueba tiene una duración de 150 minutos, incluyendo en este plazo el tiempo necesario para entregar su hoja de respuestas.
- Al finalizar la interrogación, entregue el desarrollo de las preguntas 1 y 2 en hojas separadas, además de la hoja de respuestas de las preguntas de selección múltiple.
- El trabajo es individual y está absolutamente prohibida la colaboración o la copia.
- Se aceptan preguntas de enunciado solo dirigidas al profesor(a).

1. Un capacitor está formado por dos cilindros conductores concéntricos de largo L y radios a y c, respectivamente. El espacio entre los cilindros se llena con dos materiales dieléctricos de permitividad ϵ_1 y ϵ_2 como se muestra en la figura (vista superior).



Suponiendo que el capacitor posee una carga $+Q$ en el cilindro interior y $-Q$ en el cilindro exterior y despreciando los efectos de borde, determine:

a) El campo eléctrico y el vector de polarización en la región entre los cilindros conductores.

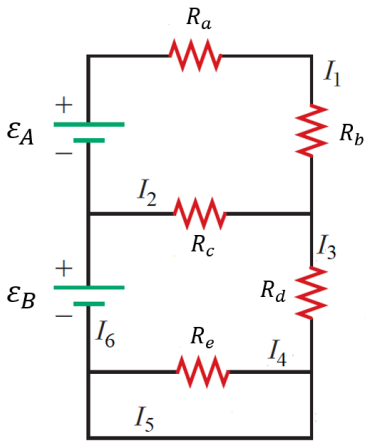
a) La densidad de carga de polarización σ en cada una de las superficies de los materiales dieléctricos.

a) La capacitancia del sistema.

2. Considere el circuito de la figura,

a) Calcule el valor de las seis corrientes indicadas en este circuito.

b) Calcule y responda: Para lograr que una sustancia eleve su temperatura rápidamente se requiere de un aparato que libere energía a una tasa mínima de 150 Joules por segundo ¿Serviría el circuito mostrado en la figura para realizar esta tarea?



Donde: $R_a = 2\ \Omega$, $R_b = 4\ \Omega$, $R_c = 3\ \Omega$, $R_d = 2\ \Omega$, $R_e = 5\ \Omega$, $\varepsilon_A = 24$ V, $\varepsilon_B = 12$ V

P1) a)



0 < r < a

$Q_{libre\ enc} = 0 \Rightarrow \oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = 0$

$\vec{D} = 0$

entonces $\vec{E} = \vec{P} = 0$

r > c $\quad Q_{libre\ enc} = 0 \Rightarrow \vec{D} = \vec{E} = \vec{P} = 0$

a < r < b $\quad Q_{libre\ enc} = Q \Rightarrow \underbrace{\oint \vec{D} \cdot d\vec{a}}_{2\pi r L D} = Q$

$\therefore \vec{D} = \frac{Q}{2\pi r L} \hat{r}$

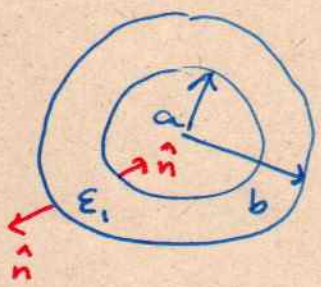
entonces $\vec{E}_1 = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_1} = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_1 r L} \hat{r}$ 0.5 puntos

$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \vec{P}_1 = \frac{Q(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{2\pi \varepsilon_1 r L} \hat{r}$ 0.5 puntos

b < r < c $\quad Q_{libre\ enc} = Q \Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_2 r L} \hat{r}$ 0.5 puntos

$\vec{P}_2 = \frac{Q(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)}{2\pi \varepsilon_2 r L} \hat{r}$ 0.5 puntos

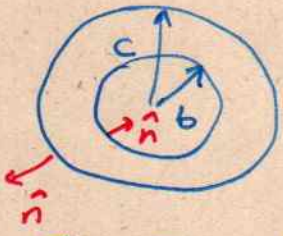
b) material ε_1



$$\sigma_{interior} = \vec{P}_1 \cdot \hat{n} = \vec{P}_1 \cdot (-\hat{r}) = -Q\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{2\pi\varepsilon_1 a L}$$ 0.5 puntos

$$\sigma_{ext} = \vec{P}_1 \cdot \hat{n} = \vec{P}_1 \cdot (\hat{r}) = \frac{Q(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{2\pi\varepsilon_1 b L}$$ 0.5 puntos

material ε_2



$$\sigma_{interior} = \vec{P}_2 \cdot \hat{n} = \vec{P}_2 \cdot (-\hat{r}) = -\frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)}{2\pi\varepsilon_2 b L}$$ 0.5 puntos

$$\sigma_{exterior} = \vec{P}_2 \cdot \hat{n} = \vec{P}_2 \cdot \hat{r} = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)}{2\pi\varepsilon_2 c L}$$ 0.5 puntos

c) $$\Delta V = \int_0^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^a \vec{E}(r<a) \cdot d\vec{l} + \int_a^b \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \int_c^\infty \vec{E}(r>c) \cdot d\vec{l}$$

(los términos $\int_0^a \vec{E}(r<a)\cdot d\vec{l}$ y $\int_c^\infty \vec{E}(r>c)\cdot d\vec{l}$ valen 0)

0.5 puntos

$$\Delta V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_1 L}\int_a^b \frac{dr}{r} + \frac{Q}{2\pi\varepsilon_2 L}\int_b^c \frac{dr}{r}$$ 0.5 puntos

$$\Delta V = \frac{Q}{2\pi L}\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln\left(\frac{c}{b}\right)\right]$$ 0.5 puntos

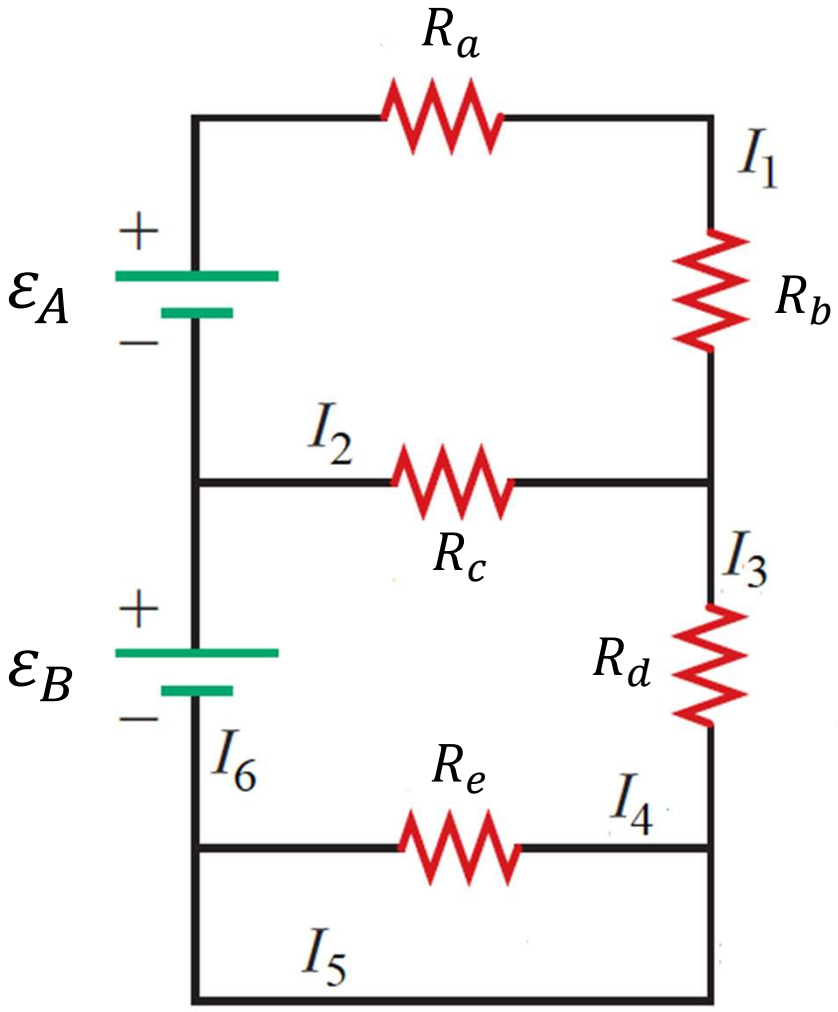
Por lo tanto

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 2\pi L \cdot \left[\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln\left(\frac{c}{b}\right)\right]^{-1}$$

0.5 puntos

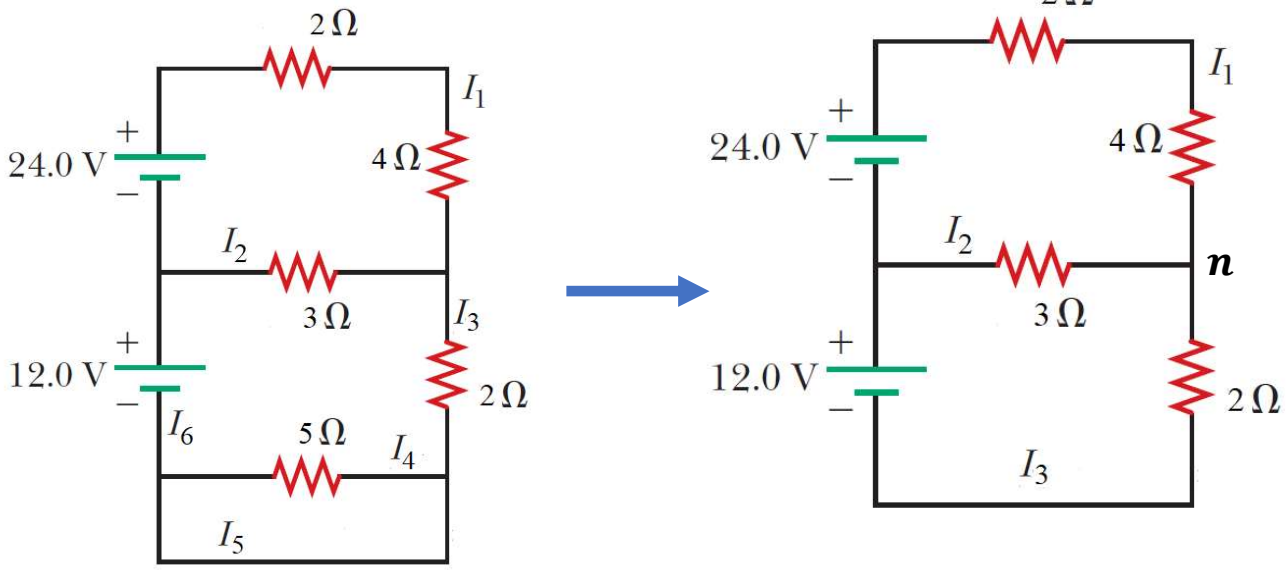
Considere el circuito de la figura,

1. Calcule el valor de las seis corrientes.
2. Responda: Para lograr que una sustancia eleve su temperatura rápidamente se requiere de un aparato que libere energía a una tasa mínima de $150\ J$ por segundo ¿Serviría el circuito mostrado en la figura para realizar esta tarea?

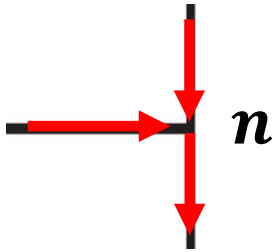


Primero nos fijamos en el hecho de que $I_4 = 0$ Å.
A partir de esto sabremos de inmediato que $I_3 = I_5 = I_6$

Por hacer esta deducción 1 pto



Con esto construimos las siguientes ecuaciones de mallas y nodos haciendo la siguiente elección en el nodo $\boldsymbol{n}$



Con lo cual obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones,

$$I_3 = I_1 + I_2$$ *0.5 pto*

$$\mathcal{E}_A - I_1(R_a + R_b) + I_2 R_c = 0$$ *0.5 pto*

$$\mathcal{E}_B - I_2 R_c - I_3 R_d = 0$$ *0.5 pto*

En base al sistema obtenido los valores de las corrientes son:

- $I_1 = 4.33$ Å
- $I_2 = 0.67$ Å
- $I_3 = 5$ Å
- $I_4 = 0$ Å
- $I_5 = 5$ Å
- $I_6 = 5$ Å

0.25 pto c/u

Las potencia total entregada por el aparato es

$$P_{a+b} = (I_1)^2 R_{a+b} = 112.5\ W$$ *0.5 pto*

$$P_c = (I_2)^2 R_c = 1.34\ W$$ *0.5 pto*

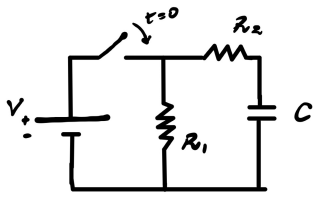
$$P_d = (I_3)^2 R_d = 50\ W$$ *0.5 pto*

$$P_{Tot} = 163.84\ W$$

Respuesta: **SÍ es suficientemente potente**

Cálculo de P_{Tot} + respuesta *0.5 pto*

3. Considera el circuito de la figura. Se conecta en $t = 0$ cuando el condensador C está inicialmente descargado.
Si $R_1 = 1$ Ohm, $R_2 = 2$ Ohm, $C = 1$F y $V = 2$V, determine cuál de las siguientes expresiones describe la carga del condensador en función del tiempo $Q(t)$ en Coulomb



a) $2(1 - e^{-t/3})$

b) $2(1 - e^{-t/2})$

c) $(1 - e^{-t/3})$

d) $(1 - e^{-t/2})$

Asignamos una corriente I pasando desde el terminal negativo al positivo de la fem y una corriente I_2 circulando por la resistencia R_2 hacia la derecha. Con esta elección la ecuación para la malla que incluye la fem y el condensador será:

$$V - I_2 R_2 - V_C = 0,$$

Pero $V_C = Q_2/C$ e $I_2 = dQ_2/dt$, donde Q_2 es la carga en las placas del condensador. Con lo que nos queda la ecuación:

$$V - R_2 \frac{dQ_2}{dt} - \frac{Q_2}{C} = 0$$

Con solución

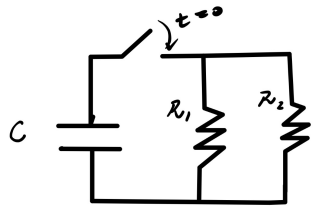
$$Q_2(t) = VC(1 - e^{-t/R_2C})$$

Con los datos obtenemos

$$Q_2(t) = 2(1 - e^{-t/2})$$

. ■

4. El condensador C de la figura tiene carga Q_0 inicialmente cuando se conecta el circuito. Entonces, si $R_1 = 2$ Ohm, $R_2 = 1$ Ohm y $C = 2$F la carga del condensador en $t = 2$s es



a) $Q_0\, e^{-3/2}$

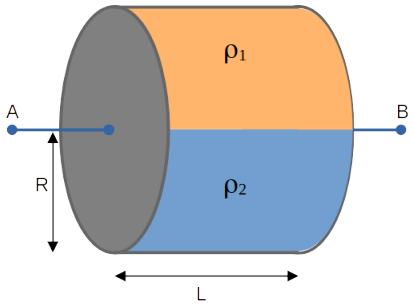
b) $Q_0\, e^{-2/3}$

c) $Q_0\, e^{-1/2}$

d) $Q_0\, e^{-1}$

El sistema tiene un resistencia equivalente $R_{eq} = R_1R_2/(R_1 + R_2)$. Sabemos que en el proceso de descarga la carga en las placas del condensador decae exponencialmente a una tasa dada por la constante de tiempo $\tau = R_{eq}C$. Es decir $Q(t) = Q_0e^{-t/\tau}$. Con los datos: $\tau = R_{eq}C = (2\Omega/3) \cdot 2F = (4/3)s$, luego $Q(t) = Q_0e^{-t/\tau}$ y $Q(2s) = Q_0e^{-3/2}$. ■

5. Considere una resistencia de forma cilíndrica, de largo L y radio R que esta subdividida en dos regiones longitudinales de resistividades ρ_1 y ρ_2 que ocupan igual volúmen. Si $L = 1$ cm, $R = 2$ cm, $\rho_1 = 8$ Ohm $\cdot$ cm y $\rho_2 = 4$ Ohm $\cdot$ cm, la resistencia vista desde los terminales A-B es:



a) $\frac{9}{8\pi}$ Ohm

b) $\frac{36}{\pi}$ Ohm

c) $\frac{15}{2\pi}$ Ohm

d) $\frac{4}{3\pi}$ Ohm

Podemos pensar al cilindro como dos resistencias R_1 y R_2 en paralelo, donde R_1 corresponde a la resistencia de la parte con resistividad ρ_1 y R_2 a la parte con resistividad R_2. Como la corriente se distribuye de forma uniforme en la sección transversal de cada parte podemos usar el resultado $R_i = \rho_i L/A_i$, donde $i = 1, 2.$, $A_i = \pi R^2/2$ corresponde a la sección transversal de cada parte. Al estar en paralelo tenemos

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\frac{\rho_1 L}{(\pi R^2/2)} \frac{\rho_2 L}{(\pi R^2/2)}}{\frac{\rho_1 L}{(\pi R^2/2)} + \frac{\rho_2 L}{(\pi R^2/2)}} = \frac{2L}{\pi R^2} \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$$

Reemplazando los datos encontramos $R_{eq} = (4/3\pi)$Ohm ■

6. Un alambre de forma cilíndrica con diámetro D, hecho de Cobre, tiene una densidad de portadores de carga n_0 y velocidad de portadores promedio v_0 en dirección longitudinal. Si:

   - la carga de los portadores es $q_0 \sim \frac{3}{2} \times 10^{-19}$ C,
   - $n_0 \sim 8 \times 10^{28}$ 1/m^3,
   - $v_0 \sim 2 \times 10^{-6}$ m/s
   - y $D \sim \frac{1}{2}$ cm,

   la corriente que circula por el cable será aproximadamente:

   a) $\frac{\pi}{40}$ A

   b) $\frac{3\pi}{40}$ A

   c) $\frac{\pi}{20}$ A

   d) $\frac{3\pi}{20}$ A

   Notemos que el alambre tiene una sección transversal $A = \pi(D/2)^2$. Por otro lado sabemos que la magnitud de la densidad de corriente es $J = n_0 q_0 v_0$, pero la corriente que circula por el cable se relaciona con J mediante $I = JA$. Juntando toda esta información encontramos:

   $$I = (n_0 q_0 v_0)\left(\frac{\pi D^2}{2^2}\right) = \frac{n_0 q_0 v_0 \pi D^2}{4}$$

   Reemplazando los datos encontramos $I = (3\pi/20)A$.

   ■

7. Se tiene dos condensadores de placas planas y paralelas de capacidad C cada uno, que se conectan en serie a una batería que entrega V volts. Luego se desconecta de la batería esta combinación y se introduce un dieléctrico en uno de los condensadores, cuya constante dieléctrica es $\kappa = 2$ ($\kappa = \epsilon/\epsilon_0$), llenando totalmente el espacio entre las placas, se tiene entonces que:

   a) La energía total almacenada es 2/3 de la energía almacenada inicialmente en el sistema.

   b) La energía total almacenada es 5/8 de la energía almacenada inicialmente en el sistema.

   c) La energía total almacenada es 3/4 de la energía almacenada inicialmente en el sistema.

   d) La energía total almacenada es 3/5 de la energía almacenada inicialmente en el sistema.

   Conectando ambos condensadores en serie, tenemos una capacitancia equivalente $C_{eq,i} = C/2$. Luego de cargados, la carga en el sistema será $Q = C_{eq,i}V = CV/2$, y la energía del sistema será $U_i = Q^2/(2C_{eq,i}) = Q^2/C$. Luego se desconecta la fuente y se inserta el dieléctrico, aumentando la capacidad de uno de los condensadores a κC, pero la carga se mantiene constante. La nueva capacidad equivalente del circuito es $C_{eq,f} = C \cdot \kappa C/(C + \kappa C) = \kappa C/(1+\kappa)$, por lo que la energía final será $U_f = Q^2/(2C_{eq,f}) = (\kappa+1)Q^2/(2\kappa C)$. Es decir, la energía cambia en un factor:

   $$\frac{U_f}{U_i} = \frac{\kappa+1}{2\kappa}$$

   .

   Con $\kappa = 2$ tenemos $U_f/U_i = 3/4$.

   ■

8. Al conectar dos resistencias idénticas en serie entre los terminales de una batería, se observa que la potencia disipada por ellas es 20W. Si las mismas resistencias se conectan en paralelo a la misma batería, la potencia total disipada será: Nota: Para este problema considere despreciable la resistencia interna de la batería.

a) 20W

b) 80W

c) 60W

d) 40W

Si cada resistencia es R, la resistencia equivalente del circuito inicial será $R_{eq,i} = 2R$. La potencia disipada total por efecto Joule será $P_0 = V^2/(2R_{eq,i}) = V^2/(4R)$. Podemos despejar $V^2 = 4RP_0$. Al conectar las resistencias ahora en paralelo tendremos una resistencia equivalente $R_{eq,f} = R/2$, pero la fuente es la misma, por lo que la nueva potencia disipada será $P_f = V^2/(2R_{eq,f}) = V^2/R$, luego $V^2 = RP_f$. Igualando con la expresión anterior para V, tenemos $P_f = 4P_0 = 80$W.

■