Examen

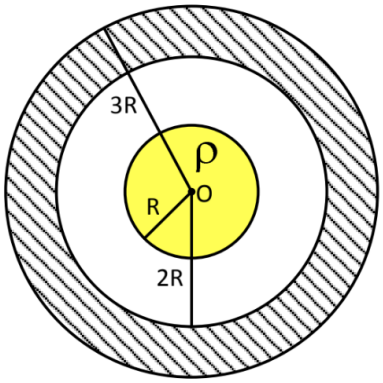
Fecha: 07 de julio del 2025

1. En la figura se muestra una configuración de carga eléctrica, la cual está formada por: Una esfera no conductora de radio R con densidad de carga $\rho = -3\beta r^3$ y otra esfera hueca conductora con radio interno $2R$ y externo $3R$, cuya carga eléctrica neta es $q_{\text{neta}} = -\beta\pi R^6$. Las esferas son concéntricas. Con la información anterior, determinar:

   a) (1 pts.) La carga total, Q, en la esfera de radio R.

   b) (2 pts.) Las densidades de carga en la esfera hueca.

   c) (3 pts.) El vector campo eléctrico en las regiones: 1) $0 < r < R$; 2) $R < r < 2R$; 3) $2R < r < 3R$; 4)$r > 3R$.



Solución:

a) La carga neta en la esfera de radio R vendrá dada por:

$$Q = \int_V \rho\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi\,, \qquad \text{(0.3 pts.)}$$

$$Q = \int_0^R (-3\beta) r^5\, dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi,,$$

$$Q = 4\pi(-3\beta)\int_0^R r^5\, dr\,,$$

$$Q = -2\beta\pi R^6\,. \qquad \text{(0.7 pts.)}$$

b) La densidad interna en la esfera hueca se puede calcular usando la ley de Gauss. Como el campo dentro del conductor debe ser cero, al elegir una superficie gaussiana dentro de ésta, la carga encerrada deberá ser cero también. Luego, la carga en la superficie interior será

$$q_{\text{int}} = -Q, = 2\beta\pi R^6\,. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Luego, la densidad superficial de carga

$$\sigma_{\text{int}} = \frac{q_{\text{int}}}{4\pi(2R)^2} = \frac{2\beta\pi R^6}{16\pi R^2} = \frac{\beta}{8}R^4 \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

La densidad externa en la esfera hueca se puede calcular sabiendo la carga neta de la esfera hueca,

$$q_{\text{ext}} = q_{\text{neta}} - q_{\text{int}} = -\beta\pi R^6 - 2\beta\pi R^6 = -3\beta\pi R^6 \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Luego,

$$\sigma_{\text{ext}} = \frac{q_{\text{ext}}}{4\pi(3R)^2} = \frac{-3\beta\pi R^6}{36\pi R^2} = -\frac{\beta}{12}R^4\,. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

■

c) Utilizamos la ley de Gauss para cada región:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{enc}(S)}}{\epsilon_0}$$
$$\vec{E} = \frac{q_{\text{enc}(S)}}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{r}\,.$$

Luego, aplicando esto a cada superficie: 1) S_1: $0 < r < R$

$$\vec{E}_1 = \frac{q_{\text{enc}(S_1)}}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{r} = \frac{-2\beta\pi r^6}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{r} = -\frac{\beta r^4}{2\epsilon_0}\,\hat{r}\,. \quad \text{(0.75 pts.)}$$

Para la superficie S_2: $R < r < 2R$.

$$\vec{E}_2 = \frac{q_{\text{enc}(S_2)}}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{r} = \frac{-2\beta\pi R^6}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{r} = -\frac{\beta R^6}{2\epsilon_0 r^2}\,\hat{r}\,. \quad \text{(0.75 pts.)}$$

Para la superficie S_3: $2R < r < 3R$.

$$\vec{E}_3 = 0\,, \quad \text{(0.75 pts.)}$$

ya que nos encontramos dentro del conductor.

Finalmente, para S_4: $r > 3R$:

$$\vec{E}_4 = \frac{q_{\text{enc}(S_4)}}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{r} = \frac{q_{\text{neta}} + Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{r} = \frac{-\beta\pi R^6 - 2\beta\pi R^6}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{r} = -\frac{3\beta R^6}{4\epsilon_0 r^2}\,\hat{r}\,. \quad \text{(0.75 pts.)}$$

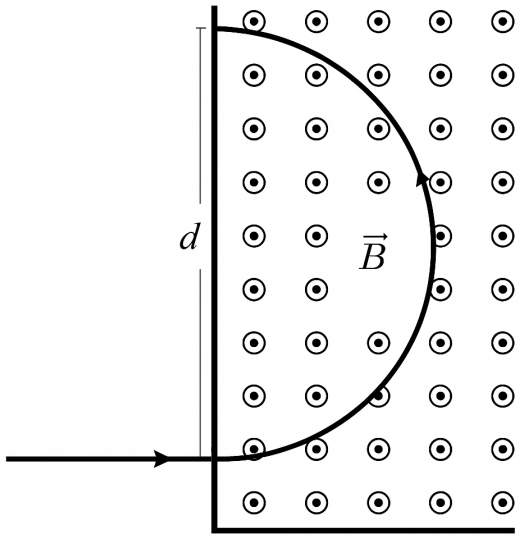
En el cálculo anterior se asume que la permitividad del material es igual a la del vacío. Asumir que no es así también se evalúa como correcto.

■

2. Se realiza un experimento con rayos de partículas cargadas que inciden en un campo magnético constante $\vec{B}$, en dirección saliente al plano como indica la figura. Las partículas inciden con una rapidez $v = |\vec{v}|$ constante durante todo el recorrido. Despreciando efectos de gravedad, y considerando la distancia d de la figura,

   a) (4 pts.) calcular la razón carga/masa de las partículas,

   b) (2 pts) determinar si las partículas están cargadas positiva o negativamente.



Solución:

a) Las partículas describen una trayectoria semi-circular bajo la acción de una fuerza magnética, lo que implica que la fuerza centrípeta es igual al módulo de la fuerza de Lorentz:

$$\frac{mv^2}{r} = |q|vB. \qquad (1.0 \text{ pts.})$$

Simplificando:

$$\frac{mv}{r} = |q|B \quad \Rightarrow \quad \frac{|q|}{m} = \frac{v}{rB}. \qquad (0.5 \text{ pts.})$$

Por otro lado, el radio de la trayectoria es:

$$r = \frac{d}{2}, \qquad (0.5 \text{ pts.})$$

implicando que

$$\frac{|q|}{m} = \frac{2v}{dB}. \qquad (0.5 \text{ pts.})$$

Resultado final:

$$\boxed{\frac{q}{m} = \pm\frac{2v}{dB}} \qquad (1.5 \text{ pts.})$$

[El signo de la carga se determina en el inciso b)]

■

b) Para determinar el signo de la carga, usamos la regla de la mano derecha: si $\vec{v}$ es hacia la derecha y $\vec{B}$ es saliente (hacia afuera del plano), entonces por la expresión de la fuerza de Lorentz, $\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$, (0.5 pts.) tenemos que:

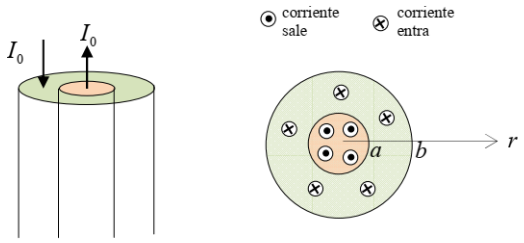
- Si la carga es positiva, la fuerza inicial actúa hacia abajo (trayectoria horaria).
- Si la carga es negativa, la fuerza inicial actúa hacia arriba (trayectoria anti-horaria).

Como en la figura la partícula describe su trayectoria en en sentido antihorario, se conluye que la carga es negativa.

$\boxed{q < 0}$ (la partícula está cargada negativamente). (1.5 pts.)

■

3. Un cable coaxial lleva una corriente $I_1 = I_0$ hacia arriba, distribuida homogéneamenteen un área circular de radio a. Entre $r = a$ = y $r = b$ se distribuye homogéneamente una corriente $I_2 = I_0$ hacia abajo.
   a) (5 pts.) Calcule el campo magnético en cada una de las tres regiones:
   i) $r < a$,
   ii) $a < r < b$,
   iii) $r > b$
   b) (1 pts.) Realice un gráfico $|\vec{B}|$ con respecto a la distancia desde el eje de simetría r.



Solución:
a) Vamos a resolver este ejercicio usando ley de Ampere:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}. \qquad \text{(0.1 pts.)}$$

Este problema posee simetría cilíndrica, vamos a definir una curva amperiana circular de radio r concéntrica al eje del cilindro. Por la definición de la curva amperiana 0.2 pts.

$$d\vec{l} = r\, d\theta\, \hat{\theta}. \qquad \text{(0.2 pts.)}$$

Y el campo magnético tendrá una simetria:

$$\vec{B} = B\, \hat{\theta}. \qquad \text{(0.2 pts.)}$$

Así, el campo magnético:

$$\int_0^{2\pi} (B\, \hat{\theta}) \cdot (r\, d\theta\, \hat{\theta}) = 2\pi r B = \mu_0 I_{enc}. \qquad \text{(0.3 pts.)}$$

Ahora vamos a calcular la corriente encerrada para cada región:

- $r < a$: En esta región, la densidad de corriente J_1 está dada por:

$$\vec{J}_1 = \frac{I_0}{\pi a^2}\, \hat{k}. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Por lo que la corriente neta encerrada en la curva Amperiana circular de radio $r < a$ está dada por:

$$I_{enc} = \int \vec{J}_1 \cdot d\vec{A}_1, \qquad \text{(0. 2pts.)}$$

$$I_{enc} = \int_0^r \int_0^{2\pi} \left(\frac{I_0}{\pi a^2}\, \hat{k} \right) \cdot \left(r' dr' d\theta\, \hat{k} \right),$$

$$I_{enc} = \left(\frac{I_0}{\pi a^2} \right) \left(\frac{r^2}{2} 2\pi \right),$$

$$I_{enc} = I_0 \left(\frac{r^2}{a^2} \right). \qquad \text{(0.2 pts.)}$$

Nota: Los 0.2pts no se otorgan por fórmula. Los 0.2 pts se otorgan por la aplicación correcta de la definición, incluyendo la elección adecuada del diferencial de área, los límites de integración y el producto punto.

Por lo tanto el campo magnético en esta region está dado por:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a^2}\, r\, \hat{\theta}.} \quad \text{para } r < a \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

■

- Para la región $a < r < b$: En la región entre a y b, la corriente va en dirección contraria (sentido negativo del eje z) . La densidad de corriente J_2 en esta región está dada por:

$$\vec{J}_2 = -\frac{I_0}{\pi(b^2-a^2)}\,\hat{k}. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Y la corriente encerrada por la corriente encerrada está dada por:

$$I_{enc} = \int \vec{J}_1 \cdot d\vec{A}_1 + \int \vec{J}_2 \cdot d\vec{A}_2 \qquad \text{(0. 4pts.)}$$

$$I_{enc} = \int_0^a \int_0^{2\pi} \left(\frac{I_0}{\pi a^2}\,\hat{k}\right) \cdot \left(r'dr'd\theta\,\hat{k}\right) + \int_a^r \int_0^{2\pi} \left(-\frac{I_0}{\pi(b^2-a^2)}\,\hat{k}\right) \cdot \left(r'dr'd\theta\,\hat{k}\right),$$

$$I_{enc} = I_0 - I_0\left(\frac{r^2-a^2}{b^2-a^2}\right),$$

$$I_{enc} = I_0\left(\frac{b^2-r^2}{b^2-a^2}\right). \qquad \text{(0.2 pts.)}$$

Nota: Los 0.2pts no se otorgan por fórmula. Los 0.2 pts se otorgan por la aplicación correcta de la definición, incluyendo la elección adecuada del diferencial de área, los límites de integración y el producto punto. Por lo tanto, el campo magnetico en esta región está dado por:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\left(\frac{b^2-r^2}{b^2-a^2}\right)\hat{\theta}.} \quad \text{para } a < r < b \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

■

- Para la región $r > b$: En esta región, la corriente encerrada es cero:

$$I_{enc} = I_0 - I_0$$
$$I_{enc} = 0. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Por lo tanto, el campo magnetico tambien es cero en esta región:

$$\boxed{\vec{B} = 0.} \quad \text{para } r > b \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

En resumen,

$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a^2}\, r & r < a \\ \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\left(\frac{b^2-r^2}{b^2-a^2}\right) & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

■

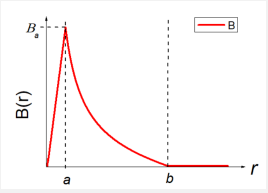
b) Para realizar el grafico, vamos a analizar el comportamiento del campo magnetico:

Para $r < a$, el campo tiene un comportamiento lineal con r.
Para $r = a$:

$$\boxed{B_a = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a}.}$$

Para $a < r < b$, el campo disminuye en forma no lineal dentro del cilindro.

Para $r > b$, el campo se anula completamente fuera del cable coaxial debido a cancelación de corrientes.
Por la realización del gráfico 1.0 pts.



■

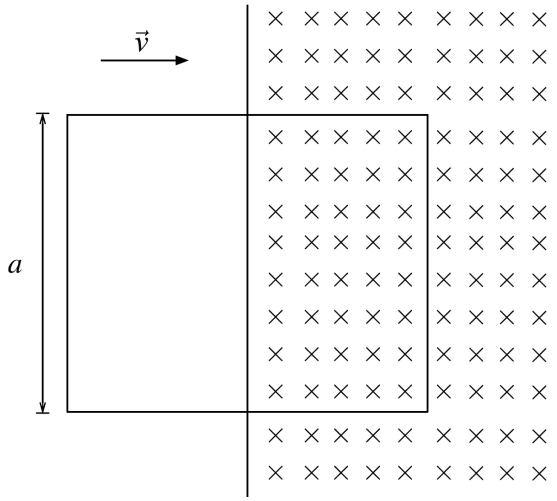
4. Una espira rectangular de resistencia R y altura a se mueve con velocidad constante $\vec{v}$ hacia una zona de campo magnético constante $\vec{B}$ entrante, como se visualiza en la figura. Determine la fem inducida en la espira, la corriente inducida, y el sentido de la corriente inducida en tres regiones:

   a) (1,5 pts.) cuando la espira avanza en la región fuera del campo $\vec{B}$,

   b) (3 pts.) cuando está parcialmente inmersa en el campo $\vec{B}$,

   c) (1,5 pts.) cuando avanza completamente inmersa en el campo $\vec{B}$.

   Asumir que la corriente transporta cargas positivas.



Solución:
a) Cuando la espira está fuera de la región con campo magnético, el flujo a través de ella será nulo, por lo tanto no habrá fem ni corriente inducida (1.5 pts.).

b) Considerando que el vector área apunta en la misma dirección que el campo magnético, y sea x la distancia que la espira ha entrado en la región de campo magnético, el flujo magnético será

$$\Phi_B = BA = Bax \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Luego, la variación temporal será

$$\frac{d\Phi}{dt} = Ba\frac{dx}{dt} = Bav \qquad \text{(1.0 pts.)}$$

Entonces la fem inducida será

$$\varepsilon = -Bav \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

La corriente inducida,

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{Bav}{R} \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

La corriente circulará en el sentido antihorario (0.5 pts.).

c) Cuando la espira está completamente inmersa en la región de campo magnético, el flujo magnético será máximo, pero éste no cambiará en el tiempo, por lo que no habrá fem ni corriente inducida (1.5 pts.).

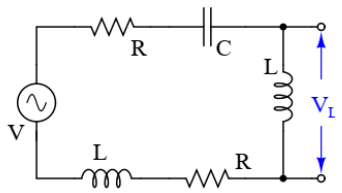
■

5. Un circuito contiene dos resistencias R, dos inductancias L y una capacitancia C. Estos elementos están conectados a una fuente de voltaje alterna $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$ como se observa en la figura. Se pide:

   a) (1 pts.) La impedancia vista desde la fuente de voltaje.

   b) (3 pts.) El fasor de corriente del circuito y el fasor de voltaje $\hat{V}_L$

   c) (2 pts.) Determine la frecuencia ω_0 que debe tener la fuente de voltaje, de modo que la amplitud de la corriente que sale de la fuente sea máxima. Ademas calcule cual sera dicha amplitud máxima.



Solución:

Usaremos la notacion $j = \sqrt{-1}$, mas usual para impedancias;
a) La impedancia en serie sera la suma de las impedancias de cada elemento o sea:

$$Z_{eq} = R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L + R + j\omega L \quad \text{0.5 pts.}$$

o simplificando

$$Z_{eq} = 2R + 2j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \quad \text{0.5 pts.}$$

b) el fasor de corriente sera el fasor de voltaje dividido por la impedancia equivalente

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{Z_{eq}} = \frac{V_0}{2R + 2j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \quad \text{1.0 pts.}$$

que se puede simplificar llevando la impedancia a notacion polar:

$$Z_{eq} = 2R + j(X_L - X_C) = \sqrt{4R^2 + (X_L - X_C)^2}\, e^{j\phi} \quad \text{0.5 pts.}$$

con $\phi = \arctan \frac{X_L - X_C}{2R}$, $X_L = 2\omega L$ y $X_C = \frac{1}{\omega C}$.

Con esto el fasor de corriente se puede escribir:

$$\hat{I} = \frac{V_0}{\sqrt{4R^2 + (X_L - X_C)^2}}\, e^{-j\phi} \quad \text{0.5 pts.}$$

Ahora bien usando $\hat{V}_L = Z_L \hat{I}$, se encuentra que:

$$\hat{V}_L = j\omega L \hat{I} = \frac{V_0 \omega L}{\sqrt{4R^2 + (X_L - X_C)^2}}\, e^{j\,(-\phi + \frac{\pi}{2})} \quad \text{1.0 pts.}$$

NOTA: Se considera correcto si la respuesta no usa la notacion X_C y X_L pero es equivalente;
c) Si el fasor de corriente, es el correcto, la corriente debe ser:

$$i(t) = Re(\hat{I} e^{j\omega t}) = \frac{V_0}{\sqrt{4R^2 + (X_L - X_C)^2}}\, cos\,(\omega t - \phi)$$

que se consigue tenga amplitud máxima cuando $X_L = X_C$ (0.5 pts.), o sea cuando ω es igual a $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{2LC}}$ (0.5 pts.) En dicho caso a amplitud maxima de la corriente corresponde a $\frac{V_0}{2R}$ (1 pts.). NOTA: no es necesario la escritura de la corriente misma como funcion del tiempo, pues no se pide explicitamente, pero ayuda al analisis.

■

6. Demuestre (2,5 pt) que la ecuación de Maxwell del rotor del campo eléctrico para una onda electromagnética plana de frecuencia ω conduce a [por ejemplo, use la notación fasorial para los campos, es decir $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$],

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \tag{6}$$

Ahora suponga que el campo eléctrico es paralelo al eje x con un valor absoluto máximo E_0 (y proporcional al coseno) y que la onda se propaga en la dirección $+\hat{z}$.

a) (1,5 pt) ¿Cuánto vale el campo magnético? y en particular ¿qué dirección tiene? Exprese el campo en función de E_0, k_z, y ω.

b) (2 pts) Un receptor es un cuadrado de lado a y perpendicular a $\hat{z}$. Calcule el vector de Poynting. ¿Cuánta energía por unidad de tiempo le llega? A las variables conocidas anteriores agregue μ_0 y a.

Solución:

La ecuación de Maxwell para el rotor del campo eléctrico es,

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad 0,5\,pt \tag{7}$$

Usando la notación fasorial (o compleja), $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ tenemos que el rotor cumple (usando su definición),

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -ik_x & -ik_y & -ik_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -i\vec{k} \times \vec{E} \qquad 0,5\,pt \tag{8}$$

ya que al derivar con respecto a x, y, o z una componente del campo eléctrico, aparece la correspondiente coordenada del vector $\vec{k}$. Por ejemplo,

$$\frac{\partial}{\partial x} E_y = \frac{\partial}{\partial x}\left[E_{0y} e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[E_{0y} e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}\right] = -ik_x \left[E_{0y} e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}\right] = -ik_x E_y \qquad 0,5\,pt \tag{9}$$

Al derivar con respecto al tiempo sucede algo análogo. Por ejemplo derivamos con respecto al tiempo la coordenada x del campo eléctrico,

$$\frac{\partial}{\partial t} E_x = \frac{\partial}{\partial t}\left[E_{0x} e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[E_{0x} e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}\right] = i\omega \left[E_{0x} e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}\right] = i\omega E_x \qquad 0,5\,pt \tag{10}$$

Reemplazando queda,

$$-i\vec{k} \times \vec{E} = -i\omega \vec{B} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \qquad 0,5\,pt \tag{11}$$

que es la ecuación pedida. Si conocemos los vectores $\vec{k}$ y $\vec{E}$ podemos calcular $\vec{B}$.
Para las siguientes preguntas tenemos que el campo eléctrico es paralelo al eje x con un valor absoluto E_0 y que la onda se propaga en la dirección $+\hat{z}$.
a) Calculamos el campo magnético. Para fasores se cumple,

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega}\vec{k} \times \vec{E} = \frac{1}{\omega}\left[k_z \hat{z}\right] \times \left[E_0 \hat{x} e^{i(\omega t - k_z z)}\right] = E_0 \frac{k_z}{\omega} \hat{y} e^{i(\omega t - k_z z)} \qquad 1\,pt \tag{12}$$

y el campo magnético es,

$$\vec{B}(t) = E_0 \frac{k_z}{\omega} \hat{y} \cos(\omega t - k_z z) \qquad 0,5\,pt \tag{13}$$

cuya dirección es paralela al eje y. ■

b) Para determinar la energía que capta el receptor calculamos primero el vector de Poynting. Se cumple,

$$\vec{S}(t) = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\left[\vec{E}_0\cos(\omega t - k_z z)\right]\times\left[\vec{B}_0\cos(\omega t - k_z z)\right] = \frac{\vec{E}_0\times\vec{B}_0}{\mu_0}\cos^2(\omega t - k_z z)$$
$$= \frac{1}{\mu_0}(E_0\hat{x})\times(E_0\frac{k_z}{\omega}\hat{y})\cos^2(\omega t - k_z z) = \frac{E_0^2 k_z}{\mu_0\omega}\hat{z}\cos^2(\omega t - k_z z) \qquad 0,5\,pt \tag{14}$$

entonces el vector de Poynting es,

$$\vec{S}(t) = \frac{E_0^2 k_z}{\mu_0\omega}\hat{z}\cos^2(\omega t - k_z z) \qquad 0,5\,pt \tag{15}$$

El vector de Poynting oscila en el tiempo, por lo que calculamos el promedio temporal en un periodo,

$$\langle\vec{S}(t)\rangle = \frac{E_0^2 k_z}{2\mu_0\omega}\hat{z} \qquad 0,5\,pt \tag{16}$$

ya que $\langle\cos^2(\omega t - k_z z)\rangle = 1/2$. La energía (promedio) por unidad de tiempo (potencia) es,

$$P = \langle\vec{S}\rangle a^2 = \frac{E_0^2 k_z}{2\mu_0\omega}a^2 \qquad 0,5\,pt \tag{17}$$

ya que el área del receptor es perpendicular.

■