Electricidad y Magnetismo

Problemas de selección múltiple

Sebastián Urrutia Quiroga
sgurruti@uc.cl
www.sgurruti.cl

Primera Edición – Julio de 2015

Disponible en línea: http://www.sgurruti.cl/

Sebastián Urrutia Quiroga
Contacto: sgurruti at uc.cl

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica que acredita al trabajo y a su autor.

Prohibida su Comercialización

Índice general

1. Fuerzas y campos electrostáticos 2

2. Condensadores, dieléctricos y corriente eléctrica 49

3. Circuitos eléctricos 80

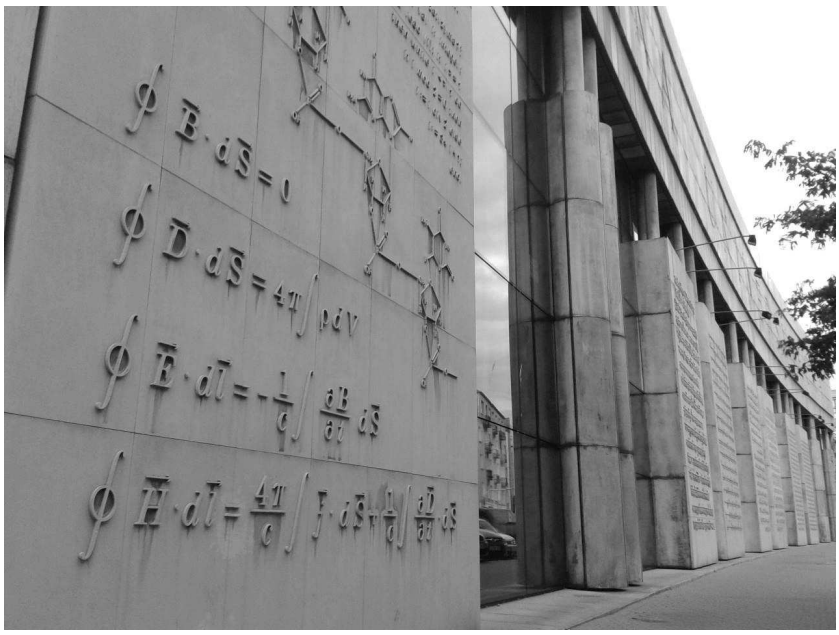
4. Magnetostática 100

5. Inductancias y flujo magnético 129

6. Circuitos de corriente alterna y campos variables en el tiempo 145

1

Fuerzas y campos electrostáticos



Ecuaciones de Maxwell en uno de los muros exteriores de la Universidad de Varsovia

Problema 1.1.
Se tienen dos alambres muy largos (que se pueden asumir infinitos) cada uno uniformemente cargado con densidades lineales de carga λ y $\lambda/2$ respectivamente. Los alambres están situados paralelamente a una distancia ℓ entre ellos. La magnitud de la fuerza por unidad de largo entre los alambres es:

a) $\dfrac{\lambda^2}{4\pi\ell\varepsilon_0}$

b) $\dfrac{\lambda^2}{2\pi\ell\varepsilon_0}$

c) $\dfrac{\lambda^2}{\pi\ell\varepsilon_0}$

d) $\dfrac{2\lambda^2}{\pi\ell\varepsilon_0}$

e) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Sin pérdida de generalidad, supongamos que ambos cables están ubicados en el plano XY. Supondremos que el cable con densidad de carga λ coincide con el eje Y y crea un campo

$$\vec{E} = E(x)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

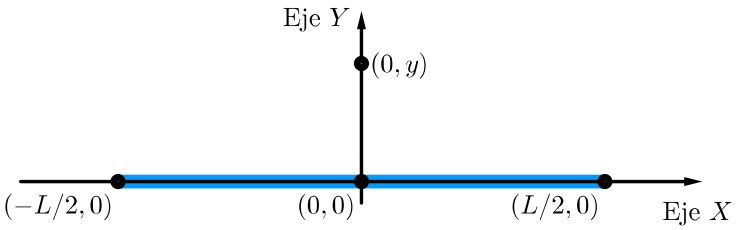
con x la distancia que separa al cable del punto donde se calcula el campo. Sobre un elemento dq del cable con densidad de carga $\lambda/2$ este campo ejerce una fuerza de magnitud $dF = dq\,E(\ell)$. Para este cable se tiene que $dq = (\lambda/2)\,dy$, y con ello

$$dF = \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0\ell}\,dy$$

Finalmente, la magnitud de la fuerza por unidad de largo es

$$f = \frac{F}{L} = \frac{\lambda^2}{4\pi\ell\varepsilon_0}$$

Problema 1.2.
Considere un cable aislante de largo L en el eje X, donde su densidad lineal de carga es $\lambda(x) = \lambda_0\dfrac{|x|}{L}$ con respecto al sistema de referencia indicado en la figura. ¿Cuál de las siguientes expresiones expresa correctamente la magnitud del campo eléctrico $\vec{E}(0, y)$, con $y > 0$ arbitrario, producido por el cable?



a) $\dfrac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 L}\dfrac{y^2}{(y^2+L^2/4)}$

b) $\dfrac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 L}\dfrac{y^2}{(y^2+L^2/4)}$

c) $\dfrac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 L}\dfrac{y}{\sqrt{y^2+L^2/4}}$

d) $\dfrac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(1-\dfrac{y}{\sqrt{y^2+L^2}}\right)$

e) $\dfrac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 L}\left(1-\dfrac{y}{\sqrt{y^2+L^2/4}}\right)$

Solución:

Usando la definición del campo eléctrico para una distribución continua de masa,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dq(\vec{R})\frac{\vec{r}-\vec{R}}{\|\vec{r}-\vec{R}\|^3}$$

En este problema, $\vec{r} = y\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, $\vec{R} = x\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$ y $dq = \lambda(x)\,dx$. Reemplazando en el campo eléctrico, tenemos que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2}\lambda_0\,|x|\frac{y\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}-x\,\hat{\boldsymbol{\imath}}}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dx$$

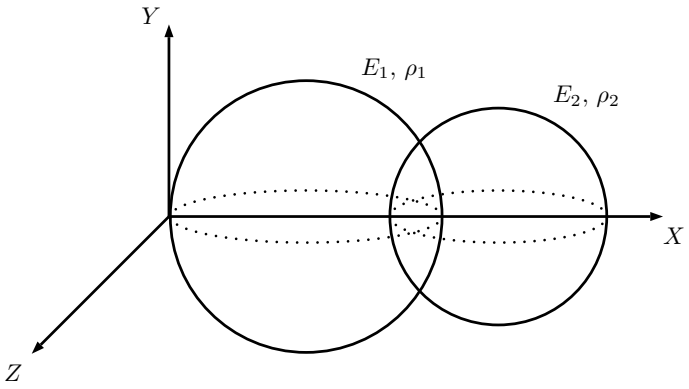
La componente $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ se anula porque el integrando es impar y la integral se realiza entre $\pm L/2$ (se puede argumentar también por la geometría del problema). El integrando de la la componente $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ es par, por lo que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = 2\frac{\lambda_0 y}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{L/2}\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dx\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 L}\left(1-\frac{y}{\sqrt{y^2+L^2/4}}\right)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Problema 1.3.

Se intersecan dos esferas sólidas cargadas, E_1 y E_2, con densidades de carga uniforme ρ_1 y ρ_2 respectivamente. Los radios de ambas esferas son $4R$ y $3R$, y sus centros se ubican en los puntos $(4R, 0, 0)$ y

$(8R, 0, 0)$, respectivamente como indica la figura (notar que en la intersección la densidad es $\rho_1 + \rho_2$). Suponiendo que las densidades de carga satisfacen la relación $\rho_1 = \rho_2 \equiv \rho$, ¿cuál de las siguientes expresiones corresponde a la magnitud del campo eléctrico en el punto $(12R, 0, 0)$?



a) $\dfrac{18\rho R}{27\varepsilon_0}$

b) $\dfrac{3\rho R}{8\varepsilon_0}$

c) $\dfrac{\rho R}{4\varepsilon_0}$

d) $\dfrac{43\rho R}{48\varepsilon_0}$

e) $\dfrac{47\rho R}{36\varepsilon_0}$

Solución:

El punto $12R\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$ se encuentra fuera de ambas esferas, por lo que el campo que cada esfera produce corresponde al de dos cargas puntuales en sus respectivos orígenes. El punto $12R\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$ está a distancia $8R$ del centro de E_1 y a $4R$ del centro de E_2. El campo está dirigido a lo largo del eje X y es:

$$E = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0(8R)^2} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0(4R)^2}$$

Donde

$$Q_1 = \frac{4\pi(4R)^3}{3}\rho\ , \quad Q_2 = \frac{4\pi(3R)^3}{3}\rho$$

Reemplazando en E resulta

$$E = \frac{43\rho R}{48\varepsilon_0}$$

Problema 1.4.
Considere nuevamente las esferas de la figura anterior. Suponiendo que ambas esferas tienen carga

positiva, ¿cuál debe ser la razón ρ_1/ρ_2 entre las densidades para que el campo eléctrico en el punto $(6R, 0, 0)$ sea nulo?

a) $\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{1}{3}$

c) 1

d) $\dfrac{4}{3}$

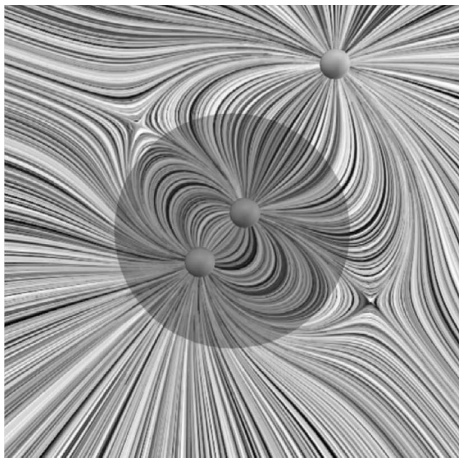
e) Ninguna de las anteriores

Solución:

El punto $6R$ está a la derecha del centro de E_1, y a una distancia $2R$ del mismo. Por otro lado, el punto se encuentra también a distancia $2R$ del centro de la esfera E_1, pero a la izquierda. Por lo tanto, solo si las densidades son iguales ambos campos serán de igual magnitud, pero de dirección opuesta y se cancelan. Así, la respuesta correcta es:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = 1$$

Problema 1.5.
La siguiente figura muestra las líneas de campo producidas por tres cargas con magnitud $+1\,\mathrm{C}$, $+1\,\mathrm{C}$ y $-1\,\mathrm{C}$, aunque no necesariamente en este orden. La superficie gaussiana que se muestra en la figura es una esfera que contiene dos de las cargas. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta para el flujo eléctrico a través de esta superficie?



a) Es $-\dfrac{2\,\mathrm{C}}{\varepsilon_0}$

b) Es $\dfrac{2\,\mathrm{C}}{\varepsilon_0}$

c) Es cero

d) Dependerá de la distancia a la que se encuentren las cargas que están adentro

e) Dependerá de la distancia a la que se encuentre la carga que está afuera

Solución:

En la región sombreada se ven líneas de campo que parten de una de las cargas y terminan en la otra. Esto quiere decir que las cargas son de signo opuesto, por lo tanto la respuesta correcta es

$$\Phi_e = 0$$

Problema 1.6.
Una esfera conductora masiva con radio r_1 se encuentra dentro de un cascarón esférico conductor de radio interior r_2 y radio exterior r_3, el cual se encuentra dentro de otro cascarón esférico conductor con radio interior r_4 y radio exterior r_5. Los radios cumplen con $r_1 < r_2 < r_3 < r_4 < r_5$. Los tres conductores están ubicados en forma concéntrica unos con otros. La esfera y el cascarón exterior están eléctricamente cargados con carga positiva $+2q$ y carga negativa $-q$, respectivamente. Por otro lado, el cascarón del medio se encuentra eléctricamente neutro. La densidad superficial de carga eléctrica en la superficie exterior del cascarón del medio es:

a) $\sigma = -\dfrac{q}{2\pi r_2^2}$

b) $\sigma = \dfrac{q}{2\pi r_3^2}$

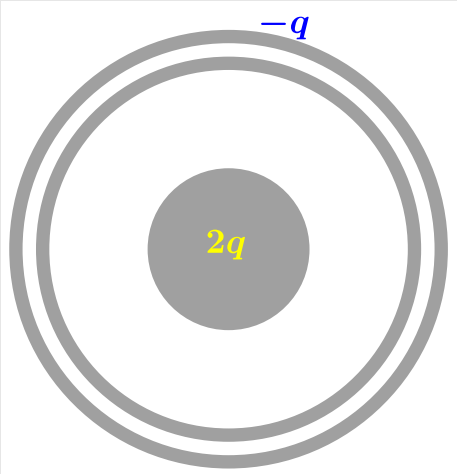
c) $\sigma = \dfrac{q}{4\pi r_2 r_3}$

d) $\sigma = \dfrac{q}{4\pi r_1^2}$

e) $\sigma = \dfrac{q}{4\pi r_5^2}$

Solución:

La situación descrita se puede esquematizar de la siguiente forma:



Como, en el interior del cascarón intermedio, el campo tiene que ser cero, en la superficie interna del cascarón se induce una carga $-2q$. Puesto que dicho cascarón es eléctricamente neutro, debe inducirse una carga $2q$ en la cara externa del mismo. La densidad en esta superficie externa es:

$$\sigma = \frac{2q}{4\pi {r_3}^2} = \frac{q}{2\pi {r_3}^2}$$

Problema 1.7.
Para la configuración del Problema 1.6, la magnitud del campo eléctrico como función del radio r en el espacio $r_3 < r < r_4$ es:

a) $E(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

b) $E(r) = \dfrac{q}{\pi\varepsilon_0 r^2}$

c) $E(r) = \dfrac{q r_3^2}{\varepsilon_0 r^4}$

d) $E(r) = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$

e) $E(r) = \dfrac{q}{\frac{3\pi}{4}\varepsilon_0 r^2}$

Solución:

Si se usa la ley de Gauss en esta región se descubrirá que la carga encerrada es $2q$. Por tanto, el campo es:

$$E(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Problema 1.8.
Para la configuración del Problema 1.6, la diferencia de potencial entre la esfera y el cascarón exterior es:

a) $\Delta V = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{r_4 - r_1}{r_1 r_4} - \dfrac{r_3 - r_2}{r_2 r_3}\right)$

b) $\Delta V = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_4}\right)$

c) $\Delta V = 0\,\mathrm{V}$

d) $\Delta V = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_3}\right)$

e) $\Delta V = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r_1 r_4}}$

Solución:

Se nos pide calcular $V(r_1) - V(r_4)$. Antes que todo, calcularemos el campo eléctrico para $r_1 < r < r_4$:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} & r_1 < r \leq r_2 \\ \vec{0} & r_2 < r \leq r_3 \\ \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} & r_3 < r \leq r_4 \end{cases}$$

Usando la definición de diferencia de potencial entre dos puntos,

$$\begin{aligned} V(r_1) - V(r_4) &= -\int_{r_4}^{r_1} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_4} \vec{E}\cdot d\vec{r} \\ &= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} + \int_{r_3}^{r_4}\frac{dr}{r^2}\right) \\ &= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}\right) \\ &= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_4 - r_1}{r_1 r_4} - \frac{r_3 - r_2}{r_2 r_3}\right) \end{aligned}$$

Problema 1.9.
Un cable coaxial consiste de un alambre metálico con radio $r_0 = 1\,\mathrm{mm}$ y un cascaron cilíndrico metálico con radio interior $r_i = 6\,\mathrm{mm}$ y radio exterior $r_e = 6.2\,\mathrm{mm}$ que se encuentra en forma concéntrica alrededor del alambre. El alambre tiene una densidad superficial de carga $\sigma = 3.6\,\mu\mathrm{C\,m^{-2}}$ y el cascarón está conectado a tierra. El largo del cable es tal que se pueden despreciar los efectos en los extremos del cable. Sabiendo que,

- $\varepsilon_0 \approx 9 \times 10^{-12}\,\mathrm{C\,V^{-1}\,m^{-1}}$
- Un objeto conectado a tierra significa que, vía un cable conductor, el objeto se conecta a un conductor infinitamente grande

el valor máximo de la magnitud del campo eléctrico en el espacio entre el alambre y el cascarón es:

a) $E_{\max} = 4\,\mathrm{kV\,m^{-1}}$

b) $E_{\max} = 20\,\mathrm{kV\,m^{-1}}$

c) $E_{\max} = 40\,\mathrm{kV\,m^{-1}}$

d) $E_{\max} = 80\,\mathrm{kV\,m^{-1}}$

e) $E_{\max} = 400\,\mathrm{kV\,m^{-1}}$

Solución:

El campo eléctrico es más intenso cerca del cilindro interno y decae al alejarse, por lo tanto su mayor valor ocurre en $r = r_0$. Como se trata de la superficie de un conductor sabemos que

$$E(r_0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Reemplazando los valores, fijándose en las unidades, se encuentra que:

$$E_{\max} = \frac{3.6 \times 10^{-6}}{9 \times 10^{-12}} = 400 \times 10^{3}\,\mathrm{V\,m^{-1}} = 400\,\mathrm{kV\,m^{-1}}$$

Problema 1.10.
Para el cable coaxial del Problema 1.9, la densidad superficial de carga en la superficie interior del cascarón es:

a) $\sigma_i = -3.0\,\mu\mathrm{C\,m^{-2}}$

b) $\sigma_i = -0.6\,\mu\mathrm{C\,m^{-2}}$

c) $\sigma_i = -1.2\,\mu\mathrm{C\,m^{-2}}$

d) $\sigma_i = -0.3\,\mu\mathrm{C\,m^{-2}}$

e) $\sigma_i = -2.0\,\mu\mathrm{C\,m^{-2}}$

Solución:

Aplicando la ley de Gauss a un cilindro concéntrico y de radio tal que quede en el interior del cilindro externo, sabemos que el flujo es cero (puesto que el campo eléctrico es cero en el interior del conductor). Esto implica que la carga encerrada tiene que ser cero. La carga encerrada es la suma de la carga ubicada en el cilindro interno y la carga que está ubicada en la superficie interna del cilindro externo. Entonces,

$$2\pi r_0 h\,\sigma + 2\pi r_i h\,\sigma_i = 0$$

de donde se obtiene que:

$$\sigma_i = -\frac{r_0}{r_i}\sigma = -0.6\,\mu\mathrm{C\,m^{-2}}$$

Problema 1.11.
Para el cable coaxial del Problema 1.9, la magnitud del campo eléctrico al exterior del cascaron ($r > r_e$) es:

a) $E(r) = \dfrac{2\pi r_0 L\sigma}{r^2}$

b) $E(r) = \dfrac{2\pi r_0^2\sigma}{r^2}$

c) $E(r) = \dfrac{\pi r_0 L\sigma}{r^2}$

d) $E(r) = 0\,\mathrm{V\,m^{-1}}$

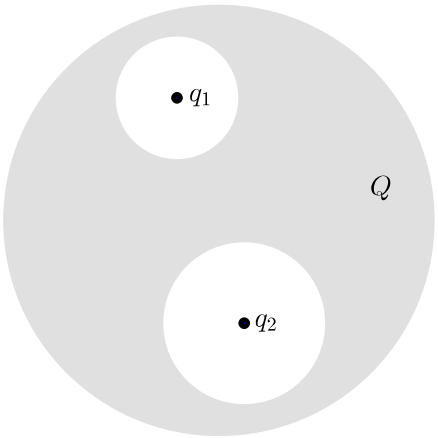
e) $E(r) = \dfrac{L^2\sigma}{r^2}$

Solución:

Como el cilindro externo está conectado a tierra, su potencial es cero. No se deposita carga en la superficie externa de este cilindro por lo que el campo al exterior del cascarón es:

$$E(r) = 0\,\mathrm{V\,m^{-1}}$$

Problema 1.12.
Una esfera conductora de radio a tiene dos cavidades también esféricas de radios R_1 y R_2. Llamemos S a la superficie exterior y S_i a la superficie en torno a la cavidad $i-$ésima ($i = 1, 2$) como se muestra en la figura. En el centro de la cavidad de radio R_1 hay una carga puntual q_1 y en el centro de la cavidad de radio R_2 hay una carga puntual q_2, mientras que la separación entre las ambas cargas es d. Por otra parte, la esfera conductora tiene carga total Q.



El módulo de la fuerza sobre la carga q_1 es:

a) $F = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$

b) $F = \dfrac{Q q_1}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$

c) $F = 0\,\mathrm{N}$

d) $F = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}$

e) $F = \dfrac{q_1^2}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}$

Solución:

Como el campo en el conductor se anula y la carga q_1 está al centro de la cavidad, la densidad superficial en S_1 se distribuye con simetría esférica y la carga inducida total es $-q_1$. Por tanto, no se genera fuerza sobre la carga en la cavidad. Por otra parte, el campo eléctrico en la cavidad corresponde solamente el campo creado por q_1, y por lo tanto nada hace fuerza sobre q_1. Así, la solución correcta es:

$$F = 0\,\mathrm{N}$$

Problema 1.13.
Considere nuevamente la configuración descrita en el Problema 1.12. Tomando como referencia el potencial en infinito igual a cero, la superficie S_1 está a potencial eléctrico igual a:

a) $V = \dfrac{Q + q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 a}$

b) $V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

c) $V = \dfrac{Q - q_1 - q_2}{4\pi\varepsilon_0 a}$

d) $V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$

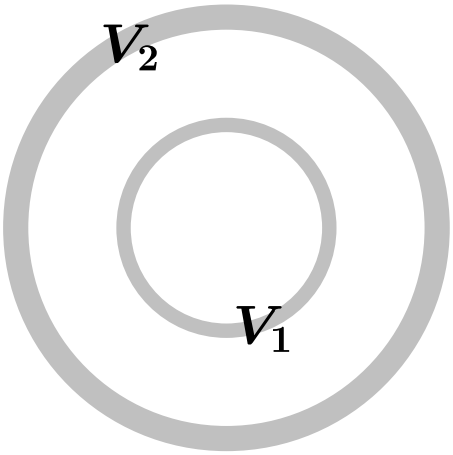
e) $V = \dfrac{Q + q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 (a - R_1 - R_2)}$

Solución:

Sobre las superficies internas S_1 y S_2 se depositan $-q_1$ y $-q_2$ respectivamente. Sobre la superficie externa S se deposita entonces una carga $Q + q_1 + q_2$ con simetría esférica. Desde fuera se ve como una carga puntual en el origen, por lo tanto:

$$V = \frac{Q + q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

Problema 1.14.
Dos cascarones esféricos concéntricos están a potenciales eléctricos V_1 y V_2 (tomamos como referencia que el potencial en infinito es cero). El radio del cascarón interior es a y el radio del cascarón exterior es $2a$. Ambos cascarones poseen un grosor despreciable.



La carga en el cascarón interior es:

a) No se puede calcular con los datos dados

b) $Q_1 = 4\pi\varepsilon_0 a V_1$

c) $Q_1 = 2\pi\varepsilon_0 (aV_1 + bV_2)$

d) $Q_1 = 0\,\mathrm{C}$

e) $Q_1 = 8\pi\varepsilon_0 a (V_1 - V_2)$

Solución:

Llamemos Q_1 la carga en el cascarón interior. En la región $a < r < 2a$ el campo se debe solamente a Q_1 y es:

$$\vec{E}_I = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Entonces

$$V_2 - V_1 = -\int_{r_1=a}^{r_2=2a} \vec{E}_I \cdot d\vec{r} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = -\frac{Q_1}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

Por tanto,

$$Q_1 = 8\pi\varepsilon_0 a(V_1 - V_2)$$

Problema 1.15.
Considere la situación expuesta el Problema 1.14. La carga en el cascarón exterior es:

a) No se puede calcular con los datos dados

b) $Q_2 = 8\pi\varepsilon_0 a(2V_2 - V_1)$

c) $Q_2 = 8\pi\varepsilon_0 a V_2$

d) $Q_2 = Q_1\dfrac{V_2}{V_1}$

e) $Q_2 = Q_1\dfrac{V_1}{V_2}$

Solución:

Si llamamos Q_2 la carga en el cascarón exterior, el campo y el potencial en $r > 2a$ son:

$$\vec{E}_{II} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\ , \qquad V_{II} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Entonces $V_2 = V_{II}(2a)$. Usando el valor de Q_1 encontrado en el problema anterior, se despeja Q_2 y resulta:

$$Q_2 = 8\pi\varepsilon_0 a(2V_2 - V_1)$$

Problema 1.16.
Nuevamente considere la situación expuesta en el Problema 1.14. El trabajo necesario para llevar una carga q desde infinito hasta el centro de las esferas es:

a) $W = q(V_1 + V_2)$

b) $W = q(V_2 - V_1)$

c) $W = -q(V_2 - V_1)$

d) $W = qV_1$

e) $W = 0\,\mathrm{J}$

Solución:

El cascarón interior está a potencial V_1. Para $r < a$ no hay otras cargas y por lo tanto el potencial no cambia y $V = V_1$ para $r < a$. Como el trabajo es $W = q(V_{final} - V_{inicial})$, el resultado correcto:

$$W = qV_1$$

Problema 1.17.
Nuevamente considere la situación expuesta en el Problema 1.14. El trabajo necesario para llevar una carga q desde la esfera interna de radio a hasta una posición fuera de las esferas $r = 3a$ es:

a) $W = \frac{q}{3}(2V_2 - 3V_1)$

b) $W = \frac{q}{3}(V_2 + 2V_1)$

c) $W = \frac{q}{6}(2V_2 - V_1)$

d) $W = -\frac{q}{2}(3V_2 - 2V_1)$

e) $W = -q(3V_2 + V_1)$

Solución:

El trabajo $W = q\Big(V(3a) - V(a)\Big)$. Sabemos $V(a) = V_1$. Y afuera el potencial es el de una carga puntual, y vale V_2 en $r = 2a$, de modo que afuera podemos escribir:

$$V = V_2\frac{2a}{r}, \quad r > 2a$$

La respuesta correcta es, entonces,

$$W = \frac{q}{3}(2V_2 - 3V_1)$$

Problema 1.18.
Considere la siguiente distribución de carga: un plano infinito con densidad uniforme σ ubicado en el plano XY y un alambre delgado de largo infinito con densidad uniforme de carga λ perpendicular al plano (que atraviesa el plano por un orificio de tamaño despreciable). Elija el eje Z de modo que coincida con el alambre. El trabajo necesario para llevar una carga q desde el punto $(1, 0, 1)$ hasta el punto $(2, 0, 2)$ es:

a) $W = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}(\lambda \ln 2 + \pi\sigma)$

b) $W = -\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}(\lambda \ln 2 + \pi\sigma)$

c) $W = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}(\lambda \ln 2 - \pi\sigma)$

d) $W = -\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}(\lambda \ln 2 - \pi\sigma)$

e) $W = \dfrac{q}{\pi\varepsilon_0}(\lambda \ln 2 - 2\pi\sigma)$

Solución:

El campo eléctrico es la suma entre el campo que produce el alambre y el campo que produce el plano:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

El trabajo es

$$W = q(V_f - V_i) = -q\int_{(1,0,1)}^{(2,0,2)} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

Tomamos el siguiente camino:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)\ , \qquad \begin{array}{ll} \vec{r}_1(t)\colon (x,y,z) = (t,0,1) & \forall t \in [1,2] \\ \vec{r}_2(t)\colon (x,y,z) = (2,0,t) & \forall t \in [1,2] \end{array}$$

Realizamos ambas integrales:

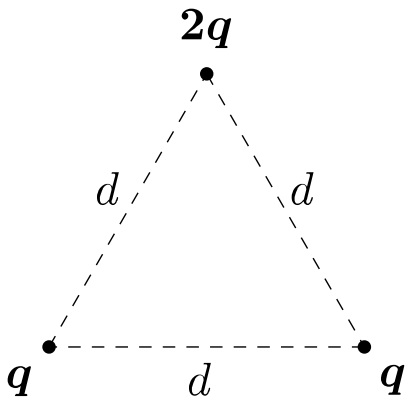
$$\begin{aligned} \int_{\vec{r}_1} \vec{E}\cdot d\vec{r} &= \int_1^2 \frac{\lambda\ dt}{2\pi\varepsilon_0 t} \\ &= \frac{\lambda \ln 2}{2\pi\varepsilon_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\vec{r}_2} \vec{E}\cdot d\vec{r} &= \int_1^2 \frac{\sigma\ dt}{2\varepsilon_0} \\ &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \end{aligned}$$

Sumando ambos resultados,

$$W = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}(\lambda \ln 2 + \pi\sigma)$$

Problema 1.19.
Considere la configuración de cargas de la figura. Cada una de las cargas están separadas por una distancia d de las otras. El trabajo necesario para lograr esta configuración, si inicialmente las cargas estaban infinitamente separadas las unas de las otras, es:



a) $W = \dfrac{5q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}$

b) $W = \dfrac{5q^2}{2\pi\varepsilon_0 d}$

c) $W = \dfrac{5q^2}{8\pi\varepsilon_0 d}$

d) $W = \dfrac{5q^2}{16\pi\varepsilon_0 d}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

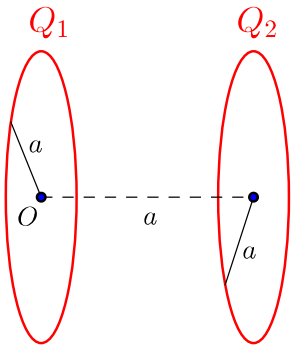
La energía almacenada en esta configuración, que equivale al trabajo realizado para armar dicha configuración, es:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right)$$

Como la distancia r_{ij} entre ellas es d, esto equivale a:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q^2}{d} + \frac{2q^2}{d} + \frac{2q^2}{d}\right) = \frac{5q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

Problema 1.20.
Dos anillos idénticos (muy delgados) de radio a, cargados uniformemente con cargas Q_1 y Q_2, se colocan coaxialmente a una distancia a de separación, como se muestra en la figura. Calcule el trabajo hecho por un agente externo para mover una carga q desde el centro del anillo con Q_1 al centro del anillo con Q_2.



a) $\dfrac{q(Q_1+Q_2)}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$

b) $\dfrac{q(Q_1-Q_2)}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$

c) $\dfrac{q(Q_1-Q_2)}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$

d) $\dfrac{q(Q_1+Q_2)}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$

e) No se puede determinar con estos datos

Solución:

Si pensamos que el centro del anillo con Q_1 coincide con el origen de los ejes cartesianos, entonces el potencial eléctrico realizado por este anillo en un punto P a una distancia x en el eje de simetría es:

$$\phi_{Q_1}(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

En el caso del segundo anillo, el potencial en el mismo punto P bajo las mismas condiciones es:

$$\phi_{Q_2}(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{\sqrt{(x-a)^2+a^2}}$$

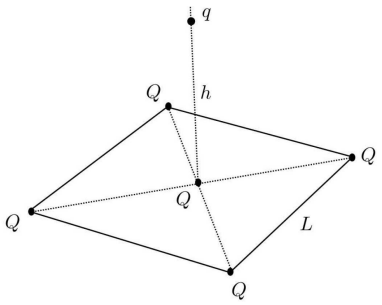
Con ello, el potencial total de la configuración es:

$$\phi(x) = \phi_{Q_1}(x) + \phi_{Q_2}(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{Q_2}{\sqrt{(x-a)^2+a^2}}\right)$$

El trabajo realizado por un agente externo equivale a calcular $W = q(\phi_{final} - \phi_{inicial})$. Por tanto,

$$\begin{aligned} W &= q\Big(\phi(a) - \phi(0)\Big) \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\left[\frac{Q_1}{\sqrt{2}a} + \frac{Q_2}{a}\right] - \left[\frac{Q_1}{a} + \frac{Q_2}{\sqrt{2}a}\right]\right) \\ &= \frac{q(Q_1 - Q_2)}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

Problema 1.21.
La figura muestra un cuadrado de largo L, formado por cinco cargas positivas iguales de magnitud Q en un plano horizontal (cuatro en los vértices y una quinta en el centro del cuadrado). Una carga positiva, de magnitud q y masa m se introduce a una altura h por encima del centro del cuadrado. Suponga que $L = \sqrt{6}h$. ¿Cuál de las siguientes relaciones es correcta cuando la carga q está en equilibrio? Considere a la aceleración de la gravedad simplemente como g.



a) $Q = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 h^2 mg}{3q}$

b) $Q = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 h^2 mg}{3q}$

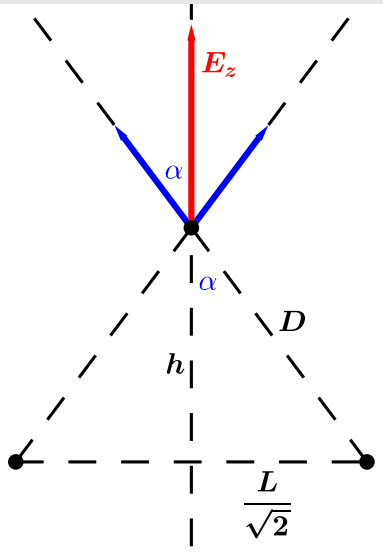
c) $Q = \dfrac{6\pi\varepsilon_0 h^2 mg}{3q}$

d) $Q = \dfrac{8\pi\varepsilon_0 h^2 mg}{3q}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

La simetría del problema nos indica que los campos eléctricos producidos por las cargas en los vértices del cuadrado solo apuntan en la dirección $\hat{\boldsymbol{k}}$, pues las otras componentes se anulan unas con otras, como indica la figura:



Sea α el ángulo indicado en la figura, que nos ayudará a encontrar la componente E_z del campo eléctrico total. Si denotamos por D la distancia entre las cargas en los vértices y la carga q, entonces:

$$E_z = 4 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{D^2}\cos\alpha$$

Usando las propiedades geométricas del problema,

$$D^2 = h^2 + \frac{L^2}{2} = h^2 + \frac{6h^2}{2} = 4h^2\ , \quad \cos\alpha = \frac{h}{D} = \frac{h}{2h} = \frac{1}{2}$$

y por tanto:

$$E_z = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2h^2}$$

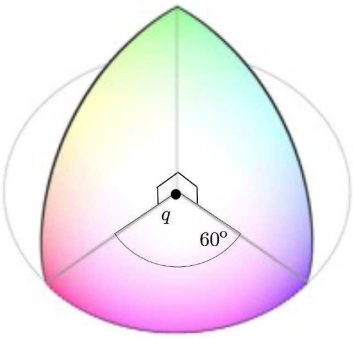
Así, el campo eléctrico total viene dado por:

$$E = E_z + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{h^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2h^2} + \frac{1}{h^2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{2h^2}$$

Igualando fuerzas,

$$mg = qE = \frac{3Qq}{8\pi\varepsilon_0 h^2} \quad \longrightarrow \quad Q = \frac{8\pi\varepsilon_0 h^2 mg}{3q}$$

Problema 1.22.
Una carga puntual positiva de magnitud q se encuentra en el vértice de una sección esférica, como se muestra en la figura. Los planos verticales de la sección esférica forman un ángulo de 60°. ¿Cuál es el flujo eléctrico que atraviesa la sección esférica?



a) $\dfrac{q}{4\varepsilon_0}$

b) $\dfrac{q}{8\varepsilon_0}$

c) $\dfrac{q}{16\varepsilon_0}$

d) $\dfrac{q}{32\varepsilon_0}$

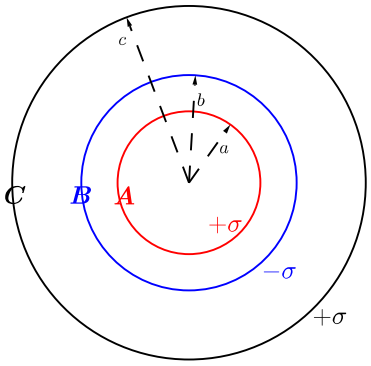
e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Aplicando la ley de Gauss,

$$\Phi_e = \iint \vec{E}\cdot\hat{n}\; dS = \int_0^{\pi/3}\int_0^{\pi/2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, r^2 \sin\theta \; d\theta\, d\phi = \frac{q}{12\varepsilon_0}$$

Problema 1.23.
Tres cascarones esféricos concéntricos A, B y C, de espesores despreciables, poseen radios a, b y c y densidades de carga $+\sigma$, $-\sigma$, y $+\sigma$, respectivamente, como muestra la figura. Si los cascarones A y C están al mismo potencial, ¿cuál es la relación entre a, b y c?



a) $a = b + c$

b) $a = b - c$

c) $a = -b + c$

d) $a = -b - c$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Sabemos, por la ley de Gauss, que el campo eléctrico de un cascarón esférico de radio R y densidad superficial de carga σ es

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi R^2\sigma}{r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^2\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \qquad \forall r > R$$

Con ello, el campo eléctrico de la configuración es:

$$\vec{E}_{total} = \begin{cases} \vec{0} & 0 < r \\ \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\dfrac{a^2}{r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} & a < r < b \\ \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\dfrac{a^2 - b^2}{r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} & b < r < c \\ \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} & c < r \end{cases}$$

Ahora, calculamos ambos potenciales tomando como referencia el infinito a potencial nulo:

$$\begin{aligned} V(c) &= -\int_\infty^c \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_c^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r} \\ &= \frac{\sigma(a^2 - b^2 + c^2)}{\varepsilon_0}\int_c^\infty \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{\sigma(a^2 - b^2 + c^2)}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{c}\right) \\ V(a) &= -\int_\infty^a \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_a^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r} \\ &= \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{\sigma(a^2 - b^2)}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) + \frac{\sigma(a^2 - b^2 + c^2)}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{c}\right) \end{aligned}$$

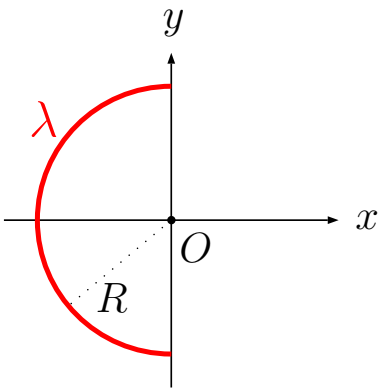
Igualando y simplificando,

$$\begin{aligned} a^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+(a^2-b^2)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right) &= 0 \\ a-b-\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{c} &= 0 \\ a-b &= \frac{a^2-b^2}{c} \\ 1 &= \frac{a+b}{c} \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$a+b=c$$

Problema 1.24.
Se tiene un medio anillo de radio R con densidad lineal de carga λ constante. Determine la magnitud del campo eléctrico en el punto O de la figura:



a) $E=\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$

b) $E=\dfrac{\lambda}{8\pi\varepsilon_0 R}$

c) $E=\dfrac{\lambda}{6\pi\varepsilon_0 R}$

d) $E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

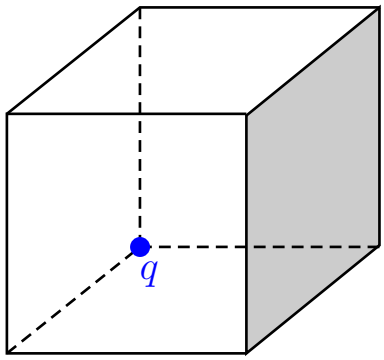
En este caso, $\vec{r} = \vec{0}$ y $\vec{R} = R\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$, con $\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{2}$. Así, y dado que $dq = \lambda R\, d\theta$,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{dq\,(\vec{r}-\vec{R})}{\|\vec{r}-\vec{R}\|^3} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \hat{\boldsymbol{\rho}}\; d\theta$$

Como el vector unitario radial depende del ángulo, debemos descomponerlo en coordenadas cartesianas:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \hat{\boldsymbol{\rho}}\; d\theta = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos\theta\; d\theta\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin\theta\; d\theta\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right] = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

Problema 1.25.
Una carga se encuentra en una esquina de un cubo de arista L, como indica la figura. ¿Cuál es el flujo eléctrico que pasa por la cara gris de este cubo?



a) $\Phi_e = \dfrac{q}{16\varepsilon_0}$

b) $\Phi_e = \dfrac{q}{8\varepsilon_0}$

c) $\Phi_e = \dfrac{q}{4\varepsilon_0}$

d) $\Phi_e = \dfrac{q}{32\varepsilon_0}$

e) $\Phi_e = \dfrac{q}{24\varepsilon_0}$

Solución:

En vez de realizar alguna integral, abordaremos este problema desde una perspectiva cualitativa utilizando argumentos de simetría. Consideremos que nuestra carga se encuentra en el centro de

un cubo imaginario de lado $2L$. El flujo a través de la superficie de este cubo es q/ε_0 por la ley de Gauss, dado que se trata de una superficie cerrada que contiene carga. Ahora imaginemos que dividimos cada cara del cubo mayor en cuatro cuadrados de largo L. Por simetría, el flujo a través de cada cuadrado es el mismo, y hay en total 24 de dichos cuadrados (dado que hay 6 caras), por lo que el flujo a través de cada cuadrado es $\dfrac{q}{24\varepsilon_0}$.

Ahora, simplemente notemos que si cortásemos el cubo mayor en 8 cubos de largo L, entonces cada uno de los cuadrados mencionados en el párrafo anterior corresponderían a una cara de uno de los cubos en el cual la carga está en la esquina.

Por otra parte, observe que la porción de flujo que viene de la carga no atraviesa las caras del cubo que *tocan* la carga. Solo un octavo del flujo total atraviesa las caras de cada uno de los cubos de arista L. Entonces, por cada una de las tres caras opuestas a la carga hay un tercio del flujo en cada cubo, puesto que las otras tres caras (adyacentes a la carga) son paralelas al campo eléctrico, y con ello no hay flujo a través de ellas. Este argumento también nos lleva a la conclusión de que el flujo a través de la cara marcada es $\dfrac{q}{24\varepsilon_0}$.

Problema 1.26.
Considere la siguiente densidad de carga expresada en coordenadas cartesianas:

$$\rho(x,y,z) = \rho_0 \left(\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2} \right)$$

¿Cuánto vale el módulo E del campo eléctrico en todo el espacio?

a) $E = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\dfrac{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}}{5a^2} \right)$

b) $E = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\dfrac{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}}{4a^2} \right)$

c) $E = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\dfrac{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}}{3a^2} \right)$

d) $E = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\dfrac{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}}{2a^2} \right)$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

En coordenadas esféricas, la densidad de carga toma la siguiente forma:

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r}{a} \right)^2$$

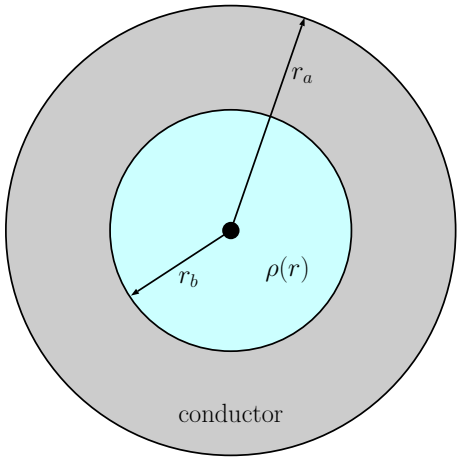
Aplicando la ley de Gauss en coordenadas esféricas, utilizando como superficie gaussiana una esfera de radio r arbitrario,

$$\begin{aligned} \oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}\cdot\hat{n}\, dS &= \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \\ 4\pi r^2\, E &= \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \rho\, dV \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\frac{4\pi\rho_0}{a^2}\int_0^r r'^4\, dr' \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\frac{4\pi\rho_0}{a^2}\cdot\frac{r^5}{5} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$E = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{r^3}{5a^2} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}}{5a^2}\right)$$

Problema 1.27.
Se tiene un conductor cilíndrico neutro de radio exterior r_a y radio interior r_b. La cavidad interior ($r < r_b$) está llena con un material no conductor con densidad de carga $\rho(r) = \mu/r$, donde r es la distancia al eje de simetría del cilindro (ver figura). En la aproximación en que el cilindro es infinito, determine el potencial eléctrico en las regiones $r < r_b$ y $r > r_a$. Asuma que $V(0) = 0$.



a) $V(r<r_b) = -\dfrac{\mu r}{\varepsilon_0}$ y $V(r>r_a) = \dfrac{\mu r_b}{\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{r_b}{r}\right)$

b) $V(r<r_b) = \dfrac{\mu r_b}{\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{r_b}{r}\right)$ y $V(r>r_a) = \dfrac{\mu r_a}{\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{r_a}{r}\right)$

c) $V(r<r_b) = -\dfrac{\mu r}{\varepsilon_0}$ y $V(r>r_a) = \dfrac{\mu r_b}{\varepsilon_0}\left[\ln\left(\dfrac{r_a}{r}\right)-1\right]$

d) $V(r<r_b) = \dfrac{\mu r_b}{\varepsilon_0}\left[\ln\left(\dfrac{r_b}{r}\right)-1\right]$ y $V(r>r_a) = \dfrac{\mu r_a}{\varepsilon_0}\left[\ln\left(\dfrac{r_a}{r}\right)-1\right]$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Dada la simetría del problema, calcularemos primero el campo eléctrico vía ley de Gauss. Para $r < r_b$,

$$\begin{aligned} \oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS &= \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \\ 2\pi r L\, E(r) &= \frac{2\pi L}{\varepsilon_0} \int_0^r \rho(r')\, r'\, dr' \\ &= \frac{2\pi r L \mu}{\varepsilon_0} \\ \therefore\ E(r) &= \frac{\mu}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

Para $r_b < r < r_a$,

$$\begin{aligned} \oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS &= \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \\ 2\pi r L\, E(r) &= \frac{2\pi L}{\varepsilon_0} \int_0^{r_b} \rho(r')\, r'\, dr' \\ &= \frac{2\pi r_b L \mu}{\varepsilon_0} \\ \therefore\ E(r) &= \frac{\mu r_b}{\varepsilon_0 r} \end{aligned}$$

donde hemos usado que el conductor es neutro. Fijando $V(0) = 0$, el potencial en la región interior es:

$$\begin{aligned} V(r < r_b) - V(0) &= -\int_0^r \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ &= -\frac{\mu r}{\varepsilon_0} \\ \therefore\ V(r < r_b) &= -\frac{\mu r}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

En la región exterior,

$$\begin{aligned} V(r > r_a) - V(r_a) &= -\int_{r_a}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ &= -\frac{\mu r_b}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_a}\right) \\ \therefore\ V(r > r_a) &= \frac{\mu r_b}{\varepsilon_0} \left[\ln\left(\frac{r_a}{r}\right) - 1\right] \end{aligned}$$

donde hemos usado que el potencial debe ser continuo y que $V(r_a) = V(r_b) = -\mu r_b/\varepsilon_0$ al tratarse de un conductor.

Problema 1.28.
En el problema anterior, ¿cuál es la densidad de carga en la superficie interior del conductor?

a) $\sigma = \mu$

b) $\sigma = 2\mu$

c) $\sigma = -\mu$

d) $\sigma = \dfrac{\mu}{2}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Al tratarse de un conductor, el flujo eléctrico a través de un cilindro de radio $r_b < r < r_a$ y largo L es cero. Luego, la carga encerrada po dicha superficie debe ser cero. De acuerdo a lo calculado en el problema anterior, la carga total del cilindro interior es $Q = 2\pi r_b L\mu$. Por tanto, la carga superficial debe ser $Q_b = -Q = -2\pi r_b L\mu$. Así,

$$\sigma_b = \frac{Q_b}{A_b} = -\frac{2\pi r_b L\mu}{2\pi r_b L} = -\mu$$

Problema 1.29.
Entre dos planos geométricos infinitos y paralelos ubicados en $x = \pm a$ se encuentra una distribución de carga homogénea con densidad ρ. El campo eléctrico en la región $|x| > a$ es:

a) $\vec{E} = \text{signo}(x)\dfrac{\rho a}{2\varepsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$

b) $\vec{E} = -\text{signo}(x)\dfrac{\rho a}{\varepsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$

c) $\vec{E} = -\text{signo}(x)\dfrac{\rho a}{2\varepsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$

d) $\vec{E} = \text{signo}(x)\dfrac{\rho a}{\varepsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Tomemos como superficie gaussiana un cilindro de radio R, orientado de forma perpendicular a los planos y cuyas tapas se ubican en $\pm x$ ($|x| > a$). Por argumentos de simetría, planteamos que

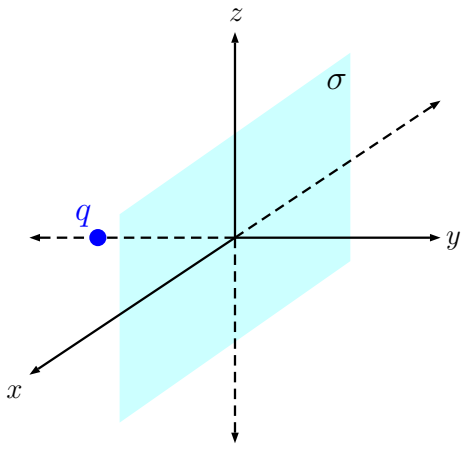
$\vec{E} = \pm E(x)\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$ con el signo según corresponda de acuerdo a la dirección del campo (hacia la derecha para $x > a$ y hacia la izquierda para $x < -a$). Así, por la ley de Gauss,

$$\begin{aligned} \oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}\cdot\hat{n}\; dS &= \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \\ \pi R^2\Big[E(x) - E(-x)\Big] &= 2a\rho\pi R^2 \\ 2\pi r^2 E(x) &= \\ \therefore\; E(x) &= \frac{\rho a}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

donde hemos usado la simetría $E(-x) = -E(x)$ del campo. Así,

$$E(x) = \begin{cases} \dfrac{\rho a}{\varepsilon_0} & (x > a) \\ \\ -\dfrac{\rho a}{\varepsilon_0} & (x < -a) \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{E} = \text{signo}(x)\frac{\rho a}{\varepsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

Problema 1.30.
En la figura se muestra un plano infinito (MUY grande) localizado en $y = 0$ (i.e. el plano XZ) con densidad superficial de carga $\sigma = q/(25\pi d^2)$, con d una constante positiva. Además, se tiene una carga puntual q en el punto $(x, y, z) = (0, -d, 0)$. Entonces, el campo eléctrico producido por el sistema en el punto $(0, 2d, 4d)$ es:



a) $\vec{E} = \dfrac{q}{500\pi\varepsilon_0 d^2}\left(13\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 4\,\hat{\boldsymbol{k}}\right)$

b) $\vec{E} = \dfrac{q}{500\pi\varepsilon_0 d^2}\left(11\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 3\,\hat{\boldsymbol{k}}\right)$

c) $\vec{E} = \dfrac{q}{500\pi\varepsilon_0 d^2}\left(17\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + 4\,\hat{\boldsymbol{k}}\right)$

d) $\vec{E} = \dfrac{q}{500\pi\varepsilon_0 d^2}\left(9\,\hat{\boldsymbol{j}} + 3\,\hat{\boldsymbol{k}}\right)$

e) $\vec{E} = \dfrac{q}{500\pi\varepsilon_0 d^2}\left(15\,\hat{\boldsymbol{j}} + 4\,\hat{\boldsymbol{k}}\right)$

Solución:

Llamemos $\vec{E}_q$ y $\vec{E}_\sigma$ a los campos eléctricos creados por la carga puntual y el plano infinito, respectivamente. Por el principio de superposición, tenemos que el campo en el punto pedido $\vec{r} = (0, 2d, 4d)$ es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_q(\vec{r}) + \vec{E}_\sigma(\vec{r})$$

El campo eléctrico de un campo infinito es:

$$\vec{E}_\sigma(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{j}} = \frac{q}{50\pi\varepsilon_0 d^2}\,\hat{\boldsymbol{j}}$$

Por otra parte, para calcular el campo de una carga puntual, utilizamos el hecho de que $\vec{R} = (0, -d, 0)$:

$$\vec{E}_q(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r} - \vec{R}}{\|\vec{r} - \vec{R}\|^3} = \frac{q}{500\pi\varepsilon_0 d^2}(3\,\hat{\boldsymbol{j}} + 4\,\hat{\boldsymbol{k}})$$

donde hemos utilizado que $\vec{r} - \vec{R} = (0, 3d, 4z)$ y $\|\vec{r} - \vec{R}\| = 5d$. Finalmente,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{500\pi\varepsilon_0 d^2}\left(13\,\hat{\boldsymbol{j}} + 4\,\hat{\boldsymbol{k}}\right)$$

Problema 1.31.
Considere la situación expuesta el Problema 1.30. El trabajo mínimo que debe realizar un agente externo para transportar una carga de prueba Q desde el punto $(0, d, d)$ hasta el punto $(0, d, -d)$ es:

a) $W = +\dfrac{5qQ}{8\pi\varepsilon_0 d}$

b) $W = -\dfrac{13qQ}{25\pi\varepsilon_0 d}$

c) $W = +\dfrac{13qQ}{50\pi\varepsilon_0 d}$

d) $W = -\dfrac{5qQ}{8\pi\varepsilon_0 d}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

El trabajo requerido, realizado por un agente externo, es equivalente al producto de la carga Q y la diferencia de potencial $\Delta V = V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i)$ entre estos dos puntos. Por superposición, es claro que

$$\Delta V = \Delta V_q + \Delta V_\sigma$$

Notemos que las superficies equipotenciales de un plano infinito también son planos paralelos al original. Dado que los puntos inicial y final están contenidos en el plano $y = d$, que es una superficie equipotencial para el plano cargado, entonces $\Delta V_\sigma = 0$. Por otra parte, las superficies equipotenciales de una carga puntual son esferas centradas en la carga. Los puntos inicial y final están a la misma distancia de la carga puntual, por lo que pertenecen a la misma equipotencial. Así, $\Delta V_q = 0$. En síntesis,

$$W = Q\,\Delta V = 0\,\text{J}$$

Problema 1.32.
Considere la situación expuesta el Problema 1.30. Asuma que Q y q son de igual signo. Suponga que ponemos una carga de prueba Q en reposo en el punto $(0, d, 0)$. Entonces, la energía cinética K de Q en el punto $(0, 2d, 0)$ es:

a) $K = \dfrac{47}{300}\dfrac{qQ}{\pi\varepsilon_0 d}$

b) $K = \dfrac{37}{600}\dfrac{qQ}{\pi\varepsilon_0 d}$

c) $K = \dfrac{41}{400}\dfrac{qQ}{\pi\varepsilon_0 d}$

d) $K = \dfrac{17}{500}\dfrac{qQ}{\pi\varepsilon_0 d}$

e) $K = \dfrac{21}{200}\dfrac{qQ}{\pi\varepsilon_0 d}$

Solución:

De la conservación de energía,

$$U(\vec{r}_i) = K + U(\vec{r}_f) \quad \longrightarrow \quad K = U(\vec{r}_i) - U(\vec{r}_f) = \Big[U_q(\vec{r}_i) - U_q(\vec{r}_f)\Big] + \Big[U_\sigma(\vec{r}_i) - U_\sigma(\vec{r}_f)\Big]$$

donde $\vec{r}_i = (0, d, 0)$ y $\vec{r}_f = (0, 2d, 0)$. Es fácil ver que:

$$U_\sigma(\vec{r}_i) - U_\sigma(\vec{r}_f) = Q \cdot \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot d = \frac{qQ}{50\pi\varepsilon_0 d}$$

En el caso de la carga puntual,

$$U_q(\vec{r}) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\|\vec{r}-\vec{R}\|} \quad \longrightarrow \quad U_q(\vec{r}_i) - U_q(\vec{r}_f) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{3a}\right) = \frac{qQ}{24\pi\varepsilon_0 d}$$

Finalmente, sumando ambas contribuciones,

$$K = \frac{37}{600}\frac{qQ}{\pi\varepsilon_0 d}$$

Problema 1.33.
En $t = 0$, una carga $Q > 0$ se encuentra en el centro de una esfera conductora de radio $R = 1\,\text{m}$. Si la carga se mueve con una velocidad constante de $2\,\text{m/s}$ en dirección radial, ¿cuánto vale el flujo eléctrico a través de la esfera en $t = 0.3\,\text{s}$?

a) $\Phi_e = 0$

b) $\Phi_e = 0.3Q/\varepsilon_0$

c) $\Phi_e = Q/\varepsilon_0$

d) $\Phi_e = 2Q/\varepsilon_0$

e) $\Phi_e = 3Q/\varepsilon_0$

Solución:

Notemos que la distancia recorrida por la carga Q es:

$$d = v\,\Delta t = 0.6\,\text{m} < 1\,\text{m} = R$$

por lo que la carga sigue estando al interior de la esfera. Así, el flujo eléctrico -vía ley de Gauss- es:

$$\Phi_e = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Problema 1.34.
Considere una línea semicircular cargada en el plano YZ con ecuaciones $y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$. El semicírculo posee una densidad de carga no uniforme $\lambda(\theta) = Q\theta/(\pi R)$, donde Q tiene dimensiones de carga y θ es el ángulo de cada punto del semicírculo medido desde el eje Y. Determine el potencial eléctrico (con $V = 0$ en el infinito) en un punto x del eje X.

a) $V(x) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+x^2}}$

b) $V(x) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{\sqrt{R^2+x^2}}$

c) $V(x) = \dfrac{1}{8\varepsilon_0}\dfrac{QR}{\sqrt{R^2+x^2}}$

d) $V(x) = \dfrac{1}{4\varepsilon_0}\dfrac{QR}{\sqrt{R^2+x^2}}$

e) $V(x) = \dfrac{1}{8\varepsilon_0}\dfrac{Q}{\sqrt{R^2+x^2}}$

Solución:

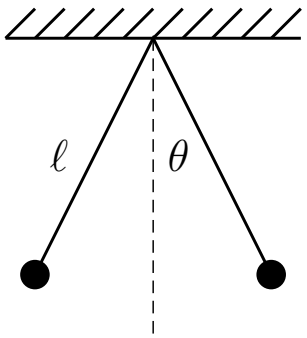
Realizando las siguientes definiciones,

$$\vec{r} = x\,\hat{\boldsymbol{\imath}} \qquad \vec{R} = R\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \qquad dq = R\lambda(\theta)\,d\theta$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{dq}{\|\vec{r}-\vec{R}\|} \\ &= \frac{1}{4\pi^2\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+x^2}}\int_0^{\pi}\theta\,d\theta \\ &= \frac{1}{8\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+x^2}} \end{aligned}$$

Problema 1.35.
Dos esferas metálicas idénticas de masa m y carga q están suspendidas por una cuerda de largo ℓ como muestra la figura. Despreciando las masas de las cuerdas, encuentre $|q|$ si el ángulo de equilibrio es θ. Considere g como la aceleración de gravedad.



a) $|q| = 4\ell\sin\theta\sqrt{\pi mg\varepsilon_0\tan\theta}$

b) $|q| = 4\ell\sin\theta\sqrt{\pi mg\varepsilon_0}$

c) $|q| = 4\ell\sqrt{\pi mg\varepsilon_0\tan\theta}$

d) $|q| = 4\ell\sqrt{\pi mg\varepsilon_0}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Aplicando la condición de equilibrio en el eje Y:

$$mg = T\cos\theta \quad \longrightarrow \quad T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

En el eje X,

$$T\sin\theta = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} \quad \longrightarrow \quad |q| = 2d\sqrt{\pi mg\varepsilon_0\tan\theta} = 4\ell\sin\theta\sqrt{\pi mg\varepsilon_0\tan\theta}$$

con $d = 2\ell\sin\theta$ la distancia que separa a ambas cargas.

Problema 1.36.
La molécula de agua tiene un momento dipolar de $p = 6.3\times10^{-30}\,\mathrm{C\,m}$. Una muestra contiene 10^{21} moléculas, todas con su momento dipolar alineado en la dirección de un campo eléctrico externo de magnitud $E = 2.5\times10^5\,\mathrm{N/C}$. El trabajo necesario para rotar todas las moléculas hasta una orientación perpendicular al campo es:

a) $0\,\mathrm{J}$

b) $2.5\times10^{-26}\,\mathrm{J}$

c) $2.5\times10^{-9}\,\mathrm{J}$

d) $1.6\times10^{-24}\,\mathrm{J}$

e) $1.6\times10^{-3}\,\mathrm{J}$

Solución:

El trabajo realizado por un agente externo para orientar un molécula viene dado por:

$$W = N\Delta U = N(U_f - U_i)$$

con N el número de moléculas y $U = -\vec{p}\cdot\vec{E} = -pE\cos\theta$ la energía potencial de un dipolo, donde θ es el ángulo entre el campo eléctrico y el momento dipolar. En este caso,

$$U_i = -pE\cos\theta_i = -1.575\times10^{-24}\,\mathrm{J} \approx -1.6\times10^{-24}\,\mathrm{J}$$

pues $\theta_i = 0$, mientras que

$$U_f = -pE\cos\theta_f = 0\,\mathrm{J}$$

porque $\theta_f = \pi/2$. Con ello,

$$W = (10^{21})(1.6\times10^{-24}\,\mathrm{J}) = 1.6\times10^{-3}\,\mathrm{J}$$

Problema 1.37.
Una carga puntual $q > 0$ se ubica a una distancia r de un dipolo eléctrico $\vec{p}$, como muestra la figura. Asuma que el dipolo es muy pequeño, i.e. que la separación d entre las cargas del dipolo satisface $d \ll r$. La fuerza que experimenta la carga es:



a) $F = \dfrac{qp}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ hacia la derecha

b) $F = \dfrac{qp}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$ hacia la izquierda

c) $F = \dfrac{qp}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ hacia la izquierda

d) $F = \dfrac{qp}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$ hacia la derecha

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Sabemos que el campo eléctrico generado por un momento dipolar $\vec{p}$ en el origen está dado por:

$$\vec{E}_{dip}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\Big[3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p}\Big]$$

En nuestro caso, $\vec{p} = p\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$ y $\vec{r} = -r\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$ ($\hat{r} = -\hat{\boldsymbol{\imath}}$), por lo que el campo toma la siguiente forma:

$$\vec{E}_{dip}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\Big[-3(-p)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} - p\,\hat{\boldsymbol{\imath}}\Big] = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

De la ley de Coulomb,

$$\vec{F} = q\vec{E}_{dip}(\vec{r}) = \frac{qp}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

Problema 1.38.
¿Cuánta energía es necesaria para cargar una esfera conductora de radio R desde una carga Q hasta una carga $Q' > Q$ (diferencia de energía acumulada con Q y Q')?

a) $\dfrac{(Q'+Q)(Q'-Q)}{4\pi\varepsilon_0 R}$

b) $\dfrac{(Q'+Q)^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$

c) $\dfrac{(Q'-Q)^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$

d) $\dfrac{Q'^2 - Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Recordemos que la energía potencial asociada a un campo eléctrico $\vec{E}$ viene dada por:

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \|\vec{E}\|^2 \, dV$$

En este caso, el campo eléctrico de la esfera conductora de carga q es fácilmente calculable vía ley de Gauss:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{0} & (r < R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} & (r > R) \end{cases}$$

Con ello,

$$\begin{aligned} U(q) &= \frac{\varepsilon_0}{2} \iint d\Omega \int_R^\infty \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{dr}{r^2} \\ &= 2\pi\varepsilon_0 \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\Delta U = U(Q') - U(Q) = \frac{Q'^2 - Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

Problema 1.39.
Sobre un disco plano de radio R se distribuye una carga superficial que varía radialmente de la forma:

$$\sigma(r) = \begin{cases} \sigma_0 \left(\dfrac{r}{R}\right)^2 & (r < R) \\ 0 & (r > R) \end{cases}$$

siendo r la distancia al centro del disco y $\sigma_0 > 0$. Calcule el potencial eléctrico V en el eje Z perpendicular al disco y que tiene su origen en el centro del mismo. Asuma que $V(\infty) = 0$. La siguiente integral puede resultar de utilidad:

$$\int \frac{t}{\sqrt{t + z^2}} \, dt = \frac{2}{3}(t - 2z^2)\sqrt{t + z^2}$$

a) $V(0,0,z) = -\dfrac{\sigma_0}{6\varepsilon_0 R^2}\left[2z^2(|z| - \sqrt{z^2 + R^2}) + R^2\sqrt{z^2 + R^2}\right]$

b) $V(0,0,z) = +\dfrac{\sigma_0}{6\varepsilon_0 R^2}\left[2z^2(|z| + \sqrt{z^2+R^2}) + R^2\sqrt{z^2+R^2}\right]$

c) $V(0,0,z) = +\dfrac{\sigma_0}{6\varepsilon_0 R^2}\left[2z^2(|z| - \sqrt{z^2+R^2}) + R^2\sqrt{z^2+R^2}\right]$

d) $V(0,0,z) = +\dfrac{\sigma_0}{6\varepsilon_0 R^2}\left[2z^2(|z| - \sqrt{z^2+R^2}) - R^2\sqrt{z^2+R^2}\right]$

e) $V(0,0,z) = -\dfrac{\sigma_0}{6\varepsilon_0 R^2}\left[2z^2(|z| + \sqrt{z^2+R^2}) + R^2\sqrt{z^2+R^2}\right]$

Solución:

Sean:

$$\vec{r} = z\,\hat{\boldsymbol{k}} \qquad \vec{R} = r\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \qquad dq = \sigma(r)\,dA = \sigma(r) r\,dr\,d\theta$$

Con ello,

$$\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\frac{dq}{\|\vec{r}-\vec{R}\|} \\
&= \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0 R^2}\int_0^{R}\frac{r^3\,dr}{\sqrt{r^2+z^2}} \qquad (\text{Sea } t = r^2) \\
&= \frac{\sigma_0}{4\varepsilon_0 R^2}\int_0^{R^2}\frac{t\,dt}{\sqrt{t+z^2}} \\
&= \frac{\sigma_0}{6\varepsilon_0 R^2}\left[(t-2z^2)\sqrt{t+z^2}\right]_0^{R^2} \\
&= \frac{\sigma_0}{6\varepsilon_0 R^2}\left[(R^2-2z^2)\sqrt{R^2+z^2} + 2z^2|z|\right] \\
&= \frac{\sigma_0}{6\varepsilon_0 R^2}\left[2z^2(|z| - \sqrt{R^2+z^2}) + R^2\sqrt{R^2+z^2}\right]
\end{aligned}$$

Problema 1.40.
Considere una esfera conductora con carga Q y radio R_1, rodeada por un cascarón esférico conductor concéntrico. Dicho cascarón es neutro y posee un radio interno R_2 y un radio externo R_3 ($R_1 < R_2 < R_3$). ¿Cuál es la energía almacenada en el sistema?

a) $\left(-\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}\right)\dfrac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}$

b) $\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}\right)\dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}$

c) $\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} - \dfrac{1}{R_3}\right)\dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}$

d) $\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}\right)\dfrac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

En este caso, el campo eléctrico puede ser calculado empleando la ley de Gauss de forma directa:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{0} & (r < R_1) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} & (R_1 < r < R_2) \\ \vec{0} & (R_2 < r < R_3) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} & (R_3 < r) \end{cases}$$

Por tanto, la energía potencial almacenada en el sistema es:

$$\begin{aligned} U &= \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \iint d\Omega \left[\int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} + \int_{R_3}^{\infty} \frac{dr}{r^2}\right] \\ &= 2\pi\varepsilon_0 \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right] \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right] \end{aligned}$$

Problema 1.41.
Dos cilindros concéntricos de radios a y b $(a < b)$ y largo $L \gg b$ están cargados con cargas $-Q$ en el cilindro interior y $+Q$ en el exterior. ¿Cuál es la capacitancia del sistema?

a) $\dfrac{4\pi\varepsilon_0 L}{\ln(b/a)}$

b) $4\pi\varepsilon_0 L \ln(b/a)$

c) $2\pi\varepsilon_0 L \ln(b/a)$

d) $\dfrac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(b/a)}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Para obtener la capacidad, debemos primero obtener el campo eléctrico en cualquier parte en la región entre ambos conductores. Debido a la simetría cilíndrica del sistema, elegimos por superficie

gaussiana un cilindro coaxial con longitud $\ell < L$ y radio $a < r < b$. Usando la ley de Gauss, con un campo radial, tenemos

$$\Phi_e = E(r)2\pi\ell r = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{2\pi a\ell\sigma}{\varepsilon_0} \quad \longrightarrow \quad E(r) = \frac{a\sigma}{\varepsilon_0 r}$$

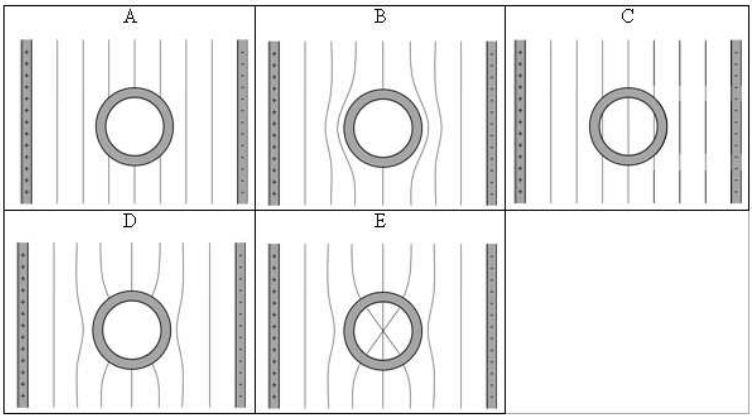
La diferencia de potencial está dada por:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \phi(b) - \phi(a) = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r} \\ &= -\int_a^b E(r)\, dr \\ &= -\frac{a\sigma}{\varepsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r} = -\frac{a\sigma}{\varepsilon_0}\ln(b/a) \end{aligned}$$

donde el camino de integración tiene la dirección radial del campo eléctrico. De esta forma, tenemos que:

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{\sigma 2\pi a L}{\frac{a\sigma}{\varepsilon_0}\ln(b/a)} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(b/a)}$$

Problema 1.42.
Un cilindro conductor hueco es colocado entre dos grandes placas paralelas de carga opuesta. ¿Qué figura representa mejor las líneas equipotenciales ara esta situación?



a) Figura A

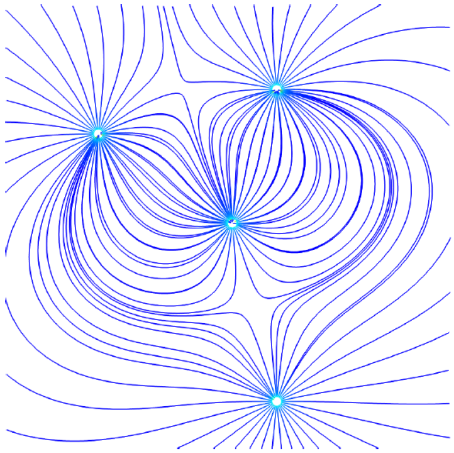
b) Figura B

c) Figura C

d) Figura D

e) Figura E

Problema 1.43.
La figura muestra las líneas de campo producidas por 4 cargas puntuales. Determine si:



a) 2 cargas son positivas y 2 son negativas

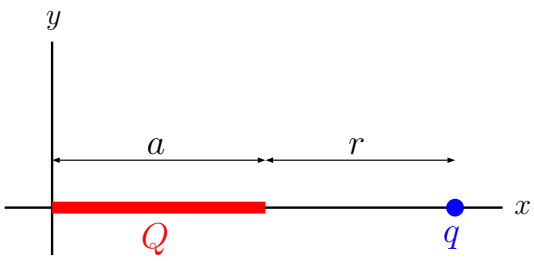
b) 3 cargas son positivas y 1 es negativa

c) 1 carga es positiva y 3 son negativas

d) Todas las cargas son del mismo signo

e) No hay suficiente información para saber

Problema 1.44.
Se tiene una barra de longitud a en la posición que se muestra en la figura abajo. La barra tiene una carga positiva Q uniformemente distribuida sobre ella. Una carga puntual positiva q se encuentra a una distancia $a + r$ del origen sobre el eje X, como muestra la figura. La fuerza que siente la carga q es:



a) $\vec{F} = \dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{(r+a/2)^2}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$

b) $\vec{F} = -\dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{(r+a/2)^2}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$

c) $\vec{F} = -\dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{(r-a/2)^2}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$

d) $\vec{F} = \dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r(a+r)}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$

e) $\vec{F} = \dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r(a-r)}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$

Solución:

Sean:

$$\vec{r} = (a+r)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} \qquad \vec{R} = x\,\hat{\boldsymbol{\imath}},\ x \in [0,a] \qquad dq = \frac{Q}{a}\,dx$$

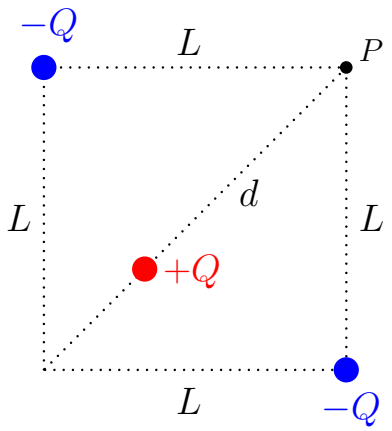
El campo eléctrico generado por la barra en el punto en que se ubica la carga puntual es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a \frac{dq\ (\vec{r}-\vec{R})}{\|\vec{r}-\vec{R}\|^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_0^a \frac{dx}{(a+r-x)^2}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{a}{(a+r)r}\right)\hat{\boldsymbol{\imath}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(a+r)r}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

Finalmente,

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(a+r)r}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

Problema 1.45.
Se tienen dos cargas negativas $-Q$ fijas en dos vértices de un cuadrado de lado L, como se muestra en la figura. También se tiene una carga positiva $+Q$ que se puede mover sobre la diagonal del cuadrado, a una distancia d del punto P. Determine el valor de d para que el campo eléctrico en el punto P sea cero:



a) $d = L(2)^{1/4}$

b) $d = L\sqrt{2}$

c) $d = \dfrac{L}{\sqrt{2}}$

d) $d = L\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1/4}$

e) $d = L\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Solución:

Sea P el origen del sistema de coordenadas. El campo eléctrico producido por la carga $-Q$ ubicada en $(-L, 0)$ es:

$$\vec{E}_1(P) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L^2}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

Por otra parte, el campo eléctrico producido por la carga $-Q$ ubicada en $(0, -L)$ es:

$$\vec{E}_2(P) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L^2}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

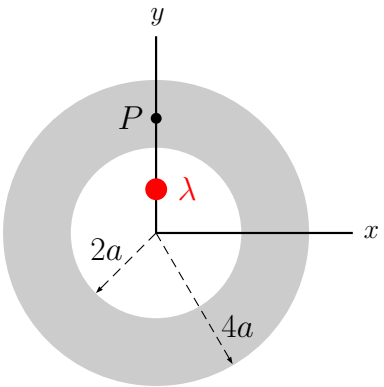
Finalmente, el campo eléctrico producido por la carga $+Q$ es:

$$\vec{E}_3(P) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\Big(\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}\Big)$$

donde $\theta = \pi/4$. Es fácil ver que, para un campo eléctrico total nulo en P, se debe cumplir la siguiente relación:

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d^2} \qquad \longrightarrow \qquad d = L\left(\frac{1}{2}\right)^{1/4}$$

Problema 1.46.
Un cascarón cilíndrico de largo infinito, con densidad volumétrica de carga homogénea ρ, radio interior $2a$ y radio exterior $4a$ es ubicado en el origen del plano XY con su eje a lo largo del eje Z. Además, por el punto $(0, a, 0)$ pasa un alambre infinito perpendicular al plano XY (paralelo al eje Z) con densidad de carga lineal λ como es mostrado en la figura. ¿Cuál debiese ser la relación entre λ y ρ para que el campo eléctrico en el punto $P = (0, 3a, 0)$ sea cero?



a) $\dfrac{\lambda}{\rho} = -\dfrac{5}{4}\pi a^2$

b) $\dfrac{\lambda}{\rho} = -\dfrac{4}{3}\pi a^2$

c) $\dfrac{\lambda}{\rho} = \pi a^2$

d) $\dfrac{\lambda}{\rho} = 10\pi a^2$

e) $\dfrac{\lambda}{\rho} = -\dfrac{10}{3}\pi a^2$

Solución:

Aplicando la ley de Gauss sobre un cilindro de radio $r = 3a$ (que corresponde al punto P) y largo L,

$$2\pi(3a)L\,E_c(P) = \frac{2\pi\rho L}{\varepsilon_0}\int_{2a}^{3a} r\;dr = \frac{5\rho\pi a^2 L}{\varepsilon_0} \qquad \longrightarrow \qquad \vec{E}_c(P) = \frac{5a\rho}{6\varepsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

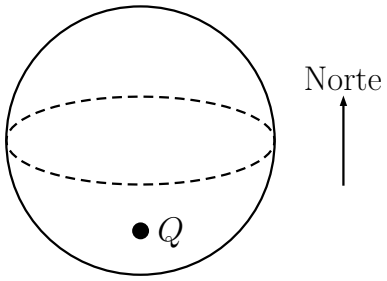
El campo eléctrico, debido al alambre infinito, en el punto P es:

$$\vec{E}_a(P) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(2a)}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

puesto que la distancia entre el punto y el alambre es $3a - a = 2a$. La magnitud total del campo debe ser nulo en P, por lo que se debe cumplir la siguiente relación:

$$\frac{5a\rho}{6\varepsilon_0} + \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \frac{\lambda}{\rho} = -\frac{10}{3}\pi a^2$$

Problema 1.47.
Una carga Q positiva se encuentra dentro de una esfera como en la figura. ¿Qué se puede decir acerca del flujo del campo eléctrico en los hemisferios norte y sur? No considere las tapas de los hemisferios.



a) El flujo es mayor en el hemisferio norte que en el hemisferio sur

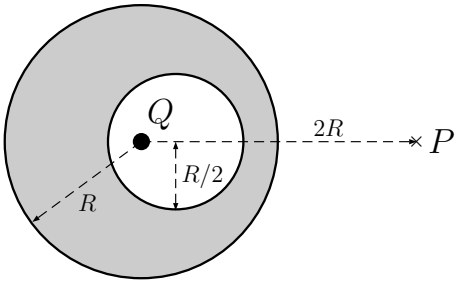
b) El flujo es mayor en el hemisferio sur que en el hemisferio norte

c) El flujo es el mismo en ambos hemisferios

d) El flujo en el hemisferio norte es $\dfrac{Q}{2\varepsilon_0}$

e) El flujo en el hemisferio sur es $\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

Problema 1.48.
Un conductor esférico relleno y neutral de radio R tiene una cavidad vacía esférica de radio $R/2$. El centro de la cavidad está desplazado del centro del conductor por $R/4$ en dirección positiva del eje X. Se coloca una carga Q en el centro del conductor, como muestra la figura. ¿Cuanto vale la magnitud del campo eléctrico a una distancia $2R$ en dirección positiva del eje X (punto P)?



a) $\|\vec{E}(P)\| = \dfrac{Q}{\pi\varepsilon_0 R^2}$

b) $\|\vec{E}(P)\| = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}$

c) $\|\vec{E}(P)\| = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$

d) $\|\vec{E}(P)\| = \dfrac{Q}{16\pi\varepsilon_0 R^2}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Recordemos que cualquier carga al interior de una cavidad vacía en un conductor será vista desde fuera como una carga puntual localizada en el origen. Así, el campo eléctrico fuera de la esfera conductora será, simplemente,

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Así, el campo en el punto solicitado viene dado por:

$$\vec{E}(2R) = \frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 R^2}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

Problema 1.49.
Un cascarón esférico tiene un radio interior $R_1 = 1\,\text{m}$ y un radio exterior $R_2 = 3\,\text{m}$. El cascaron es un aislante con una densidad de carga neta positiva $\rho = 108{\times}10^{-10}\,\text{C/m}^3$. Aproximando $\varepsilon_0 = 9{\times}10^{-12}\,\text{C/V}$, calcule la magnitud del campo eléctrico en el punto $R_b = 2\,\text{m}$.

a) $\|\vec{E}(R_b)\| = 0\,\text{V/m}$

b) $\|\vec{E}(R_b)\| = 700\,\mathrm{V/m}$

c) $\|\vec{E}(R_b)\| = 10\,\mathrm{V/m}$

d) $\|\vec{E}(R_b)\| = 900\,\mathrm{V/m}$

e) $\|\vec{E}(R_b)\| = 50\,\mathrm{V/m}$

Solución:

Por la ley de Gauss, y dada la simetría del problema,

$$\Phi_E = 4\pi r^2\, E(r) = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \qquad \longrightarrow \qquad E(R_b) = \frac{q_{enc}}{4\pi\varepsilon_0 {R_b}^2}$$

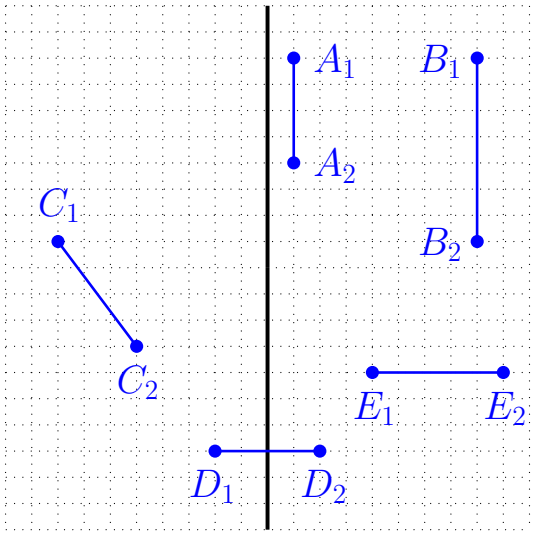
En este caso,

$$q_{enc} = \iint d\Omega \int_{R_1}^{R_b} \rho\, r^2\, dr = \frac{4\pi\rho}{3}\left({R_b}^3 - {R_1}^3\right) = 4 \cdot 36 \cdot 7\pi \times 10^{-10}\,\mathrm{C}$$

Reemplazando,

$$E(R_b) = \frac{4 \cdot 36 \cdot 7\pi \times 10^{-10}}{(4\pi)(9 \times 10^{-12})(4)}\,\mathrm{V/m} = 700\,\mathrm{V/m}$$

Problema 1.50.
Un plano infinito y aislante está cargado con densidad de carga $\sigma > 0$. ¿Entre cuáles puntos el valor absoluto del voltaje (diferencia de potencial) es máximo?



a) Entre A_1 y A_2

b) Entre B_1 y B_2

c) Entre C_1 y C_2

d) Entre D_1 y D_2

e) Entre E_1 y E_2

Solución:

Supongamos que el plano yace en el eje Y, y que el eje X se extiende de derecha a izquierda. En ese caso, $\vec{E} = E_0\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$ para $x > 0$ y $\vec{E} = -E_0\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$ para $x < 0$, con $E_0 = \sigma/2\varepsilon_0$. Entonces,

$$\frac{dV}{dx} = \begin{cases} -E_0 & (x > 0) \\ \\ E_0 & (x < 0) \end{cases} \qquad \longrightarrow \qquad V = \begin{cases} -E_0\,x & (x > 0) \\ \\ E_0\,x & (x < 0) \end{cases} = -E_0\,|x|$$

y el potencial solo depende de la componente X. Por tanto, la diferencia de potencial entre cada par de puntos es:

$$\begin{aligned} \Delta V_A &= 0 \\ \Delta V_B &= 0 \\ \Delta V_C &= 3E_0 \\ \Delta V_D &= 0 \\ \Delta V_E &= 5E_0 \end{aligned}$$

Problema 1.51.
Una esfera maciza conductora de radio R está cargada con una carga $q > 0\,\mathrm{C}$. Calcule el potencial eléctrico ϕ a una distancia de $R/2$ del centro de esta esfera asumiendo que el potencial eléctrico es V_0 en el infinito.

a) $\phi = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 R}$

b) $\phi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

c) $\phi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + V_0$

d) $\phi = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 R} + V_0$

e) $\phi = 0$

Solución:

El campo eléctrico fuera de la esfera conductora es:

$$\vec{E}(r > R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Por otra parte,

$$\phi(R) - \phi(\infty) = -\int_{\infty}^{R} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad \longrightarrow \qquad \phi(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + V_0$$

Finalmente, dado que se trata de un conductor,

$$\phi(R/2) = \phi_{interior} = \phi_{superficie} = \phi(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + V_0$$

Problema 1.52.
Una carga $q_0 = 100\,\mu\text{C}$ se encuentra fija en el centro del sistema de coordenadas cartesianas, mientras que una segunda carga $q = -1\,\mu\text{C}$ pasa volando. En el tiempo t_1 la carga q tiene la posición $\vec{r}_1 = (-45, 0, 0)\,\text{cm}$ y rapidez v_1. Un tiempo t_2 más tarde ($t_2 > t_1$) se ubica en $\vec{r}_2 = (0, 20, 0)\,\text{cm}$ con rapidez v_2. ¿Cuánta energía cinética gano la carga q? Usar $(4\pi\varepsilon_0)^{-1} \approx 9 \times 10^9\,\text{V m/C}$.

a) $\Delta E_{cin} = 2.5\,\text{J}$

b) $\Delta E_{cin} = 2.0\,\text{J}$

c) $\Delta E_{cin} = 1.5\,\text{J}$

d) $\Delta E_{cin} = 1.0\,\text{J}$

e) $\Delta E_{cin} = 0.5\,\text{J}$

Solución:

Por conservación de energía,

$$\begin{aligned}
E_1 &= E_2 \\
\frac{m{v_1}^2}{2} + \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r_1} &= \frac{m{v_2}^2}{2} + \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \\
\therefore\ \Delta E_{cin} &= \frac{m{v_2}^2}{2} - \frac{m{v_1}^2}{2} \\
&= \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \\
&= \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_2 - r_1}{r_2 r_1}\right) \\
&= (-10^{-6}\,\text{C})(100 \times 10^{-6}\,\text{C})(9 \times 10^9\,\text{V m/C})\left(\frac{0.2\,\text{m} - 0.45\,\text{m}}{(0.2\,\text{m})(0.45\,\text{m})}\right) \\
&= \frac{(9 \times 10^{-1})(0.25)}{0.09}\,\text{J} \\
&= 2.5\,\text{J}
\end{aligned}$$

Problema 1.53.
Dos cargas $q_1 = q$ y $q_2 = 2q$ están ubicados en las posiciones $\vec{r}_1 = (-d, 0, 0)$ y $\vec{r}_2 = (d, 0, 0)$, respectivamente, en un sistema de coordenadas cartesianas. Una superficie equipotencial con potencial eléctrico ϕ_0 pasa por el punto $(0, y, 0)$. ¿Cuáles son los valores correctos para la coordenada y, suponiendo que $\phi(\infty) = 0\,\text{V}$?

a) $y = \pm\left(\dfrac{3q}{4\pi\varepsilon_0\phi_0}^{\,2} - d\right)$

b) $y = \pm\sqrt{\left(\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0\phi_0}\right)^2 - d^2}$

c) $y = \pm\sqrt{\left(\dfrac{3q}{4\pi\varepsilon_0\phi_0}\right)^2 + d^2}$

d) $y = \pm\sqrt{\left(\dfrac{3q}{4\pi\varepsilon_0\phi_0}\right)^2 - d^2}$

e) $y = \dfrac{3q}{4\pi\varepsilon_0\phi_0}^{\,2} \pm d$

Solución:

Por el principio de superposición,

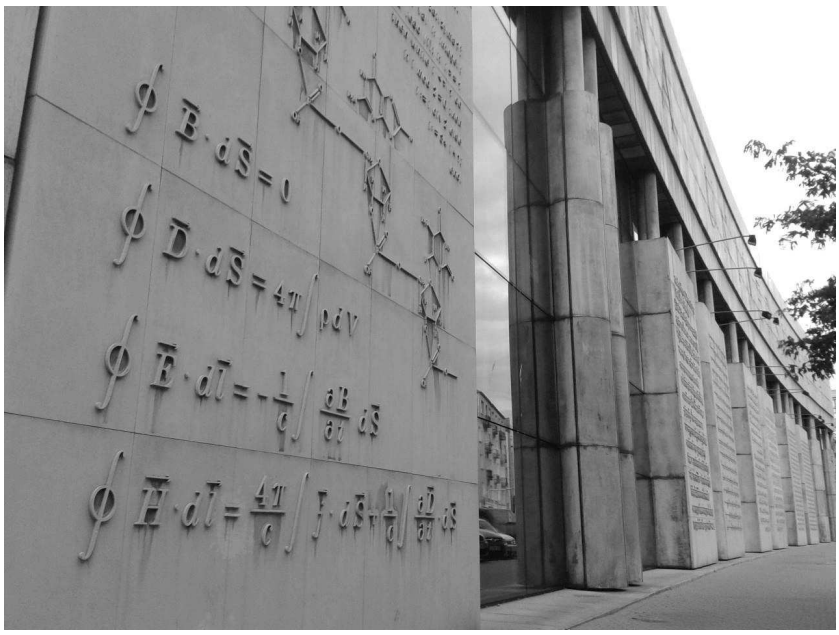
$$\phi(x, y, z) = \phi_{q_1} + \phi_{q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2}} + \frac{2q}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}}\right)$$

De la condición de superficie equipotencial,

$$\begin{aligned}
\phi_0 &= \phi(0, y, 0) \\
&= \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{d^2 + y^2}} \\
\sqrt{d^2 + y^2} &= \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0\phi_0} \\
y^2 &= \left(\frac{3q}{4\pi\varepsilon_0\phi_0}\right)^2 - d^2 \\
y &= \pm\sqrt{\left(\frac{3q}{4\pi\varepsilon_0\phi_0}\right)^2 - d^2}
\end{aligned}$$

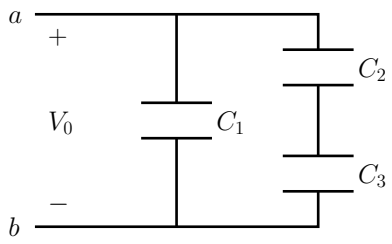
2

Condensadores, dieléctricos y corriente eléctrica



Ecuaciones de Maxwell en uno de los muros exteriores de la Universidad de Varsovia

Problema 2.1.
Considere el sistema de condensadores (C_1, C_2 y C_3) conectados por conductores perfectos, tal como se muestra en la figura. Los extremos a y b están a una diferencia de potencial $V_0 = V_a - V_b > 0$. Si asumimos que $C_1 = C$, $C_2 = 2C$ y $C_3 = 3C$, tenemos que la suma de la magnitud de la carga que tienen los condensadores C_1 y C_2 ($Q = Q_1 + Q_2$) está dada por:



a) $Q = \frac{11}{6}CV_0$

b) $Q = \frac{11}{5}CV_0$

c) $Q = \frac{6}{5}CV_0$

d) $Q = \frac{5}{6}CV_0$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Sea V_i la diferencia de voltaje en el condensador $i-$ésimo. Es claro que:

$$V_1 = V_0 \qquad \wedge \qquad V_2 + V_3 = V_0$$

De la relación entre el voltaje y la carga de un condensador,

$$Q_1 = C_1 V_1 = CV_0$$

Al estar en serie, los condensadores C_2 y C_3 poseen la misma carga Q_2. Entonces,

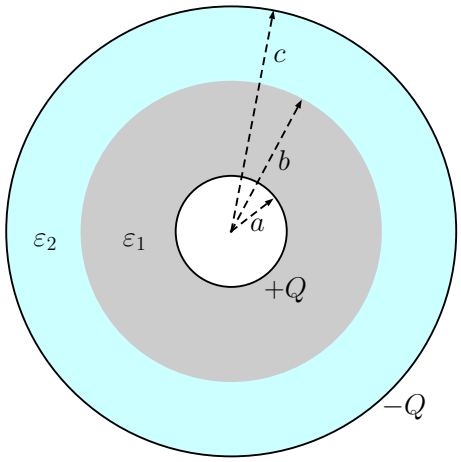
$$V_0 = V_2 + V_3 = \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_2}{C_3} = \frac{5Q_2}{6C} \qquad \longrightarrow \qquad Q_2 = \frac{6}{5}CV_0$$

Finalmente,

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{11}{5}CV_0$$

Problema 2.2.
En la figura se muestra un condensador de dos cilindros conductores coaxiales de radios a y c cargados

con cargas $Q > 0$ y $-Q$, respectivamente. Los cilindros tienen un largo $L >\!\!> c$. En el espacio entre los cilindros hay dos materiales dieléctricos. Uno de ellos es de permitividad $\varepsilon_1 = (3/2)\varepsilon_0$ y está en el espacio $r \in (a, b)$, siendo r la distancia al eje de simetría. El segundo se encuentra en el espacio $r \in (b, c)$ y tiene permitividad $\varepsilon_0 = (5/4)\varepsilon_0$. ¿Cuál de las siguientes expresiones es correcta para la magnitud del campo eléctrico $E(r)$ en la región $r \in (b, c)$?



a) $E(r) = \dfrac{3Q}{5\pi\varepsilon_0 r L}$

b) $E(r) = \dfrac{2Q}{5\pi\varepsilon_0 r L}$

c) $E(r) = \dfrac{Q}{3\pi\varepsilon_0 r L}$

d) $E(r) = \dfrac{2Q}{3\pi\varepsilon_0 r L}$

e) $E(r) = \dfrac{Q}{5\pi\varepsilon_0 r L}$

Solución:

Usando la ley de Gauss para el desplazamiento eléctrico, tenemos que:

$$2\pi r L\, D(r) = q_{libre} \qquad \longrightarrow \qquad D(r) = \frac{q_{libre}}{2\pi r L}$$

Así,

$$\vec{D}(r) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si} \quad 0 < r < a \\ \dfrac{Q}{2\pi r L}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} & \text{si} \quad a < r < c \\ \vec{0} & \text{si} \quad c < r \end{cases}$$

De acuerdo a la relación entre los vectores $\vec{D}$ y $\vec{E}$, se tiene que:

$$\vec{E}(r) = \frac{\vec{D}(r)}{\varepsilon} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si} \quad 0 < r < a \\ \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_1 r L}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} & \text{si} \quad a < r < b \\ \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_2 r L}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} & \text{si} \quad b < r < c \\ \vec{0} & \text{si} \quad c < r \end{cases}$$

Finalmente,

$$\vec{E}(b < r < c) = \frac{2Q}{5\pi\varepsilon_0 r L}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Problema 2.3.
Considere el sistema del Problema 2.2. La carga inducida (o de polarización) en la superficie interior del dieléctrico ε_1 (i.e. $r = a$) es:

a) $-Q/4$

b) $-Q/2$

c) $-Q/3$

d) $-2Q/3$

e) $-Q$

Solución:

El vector de polarización satisface la siguiente relación:

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}$$

Reemplazando en el espacio $r \in (a, b)$,

$$\vec{P}(a < r < b) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\vec{E}(a < r < b) = \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)\frac{Q}{3\pi\varepsilon_0 r L}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{Q}{6\pi r L}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

La densidad superficial de carga inducida es:

$$\sigma_a = \vec{P}\cdot\hat{n}\Big|_{r=a} = \left(\frac{Q}{6\pi a L}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\right)\cdot(-\,\hat{\boldsymbol{\rho}}) = -\frac{Q}{6\pi a L}$$

Por tanto, la carga inducida es:

$$Q_a = \sigma_a A_a = -\frac{Q}{3}$$

Problema 2.4.
Considere el sistema del Problema 2.2. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **incorrecta**?

a) La diferencia de potencial entre los puntos $r = a$ y $r = c$ es menor con los dieléctricos que en ausencia de ellos, i.e. cuando hay vacío en la región $r \in (a, c)$

b) El campo eléctrico en la región $r \in (b, c)$ disminuye si ε_2 aumenta

c) La magnitud del campo eléctrico $E(r)$ es discontinuo en $r = b$

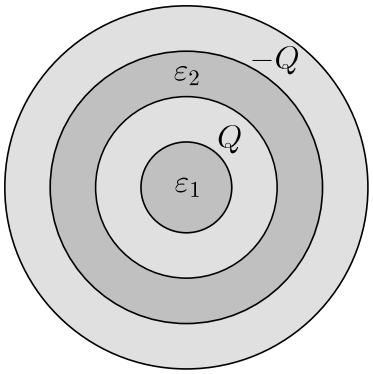
d) La magnitud de la carga inducida (o de polarización) en la superficie exterior del dieléctrico ε_2 (i.e. $r = c$) es igual a Q

e) El vector de polarización $\vec{P}(r)$ es discontinuo en $r = b$

Solución:

Al adicionar un dieléctrico, el campo eléctrico disminuye respecto a su valor en vacío, por lo que la diferencia de potencial también lo hace. Esta disminución depende de la magnitud de la permitividad del dieléctrico. Por tanto, las alternativas (a) y (b) son correctas. Del cálculo realizado en los problemas anteriores, notamos que el campo eléctrico no es continuo, debido a que existe una carga superficial inducida. De la misma forma, notamos que el vector polarización también es discontinuo. Con ello, las alternativas (c) y (e) son correctas. Finalmente, ya sea por cálculo directo o debido a que no hay más opciones, descubrimos que la carga inducida en $r = c$ no es igual a Q, por lo que la alternativa (d) es **incorrecta**.

Problema 2.5.
Se tiene una esfera de material dieléctrico de permitividad $\varepsilon_1 = 5\varepsilon_0$. La esfera está rodeada de un conductor ideal cargado con carga Q, que a su vez está rodeado por un segundo material dieléctrico de permitividad $\varepsilon_2 = 10\varepsilon_0$. Finalmente, en la última capa, hay segundo un conductor con carga $-Q$ (como indica la figura). Los radios de cada una de las capas esféricas son $R_1 = R$, $R_2 = 2R$, $R_3 = 3R$ y $R_4 = 4R$, respectivamente.



La magnitud de los campos eléctricos, E_1 y E_2 en los dieléctricos ε_1 y ε_2 son, respectivamente,

a) $E_1 = \dfrac{Q}{20\pi\varepsilon_0 r^2}$ y $E_2 = 0$

b) $E_1 = \dfrac{Q}{20\pi\varepsilon_0 r^2}$ y $E_2 = \dfrac{Q}{40\pi\varepsilon_0 r^2}$

c) $E_1 = 0$ y $E_2 = \dfrac{Q}{40\pi\varepsilon_0 r^2}$

d) $E_1 = \dfrac{Q}{40\pi\varepsilon_0 r^2}$ y $E_2 = \dfrac{Q}{20\pi\varepsilon_0 r^2}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Usando la ley de Gauss para el desplazamiento eléctrico, tenemos que:

$$\vec{D}(r) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si} \quad 0 < r < 2R \\ \dfrac{Q}{4\pi r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} & \text{si} \quad 2R < r < 3R \\ \vec{0} & \text{si} \quad 3R < r \end{cases}$$

Por tanto, la magnitud de los campos es:

$$E_1 = 0\ , \qquad E_2 = \frac{Q}{40\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Problema 2.6.
Considere el sistema del Problema 2.5. La capacitancia del sistema es:

a) $480\varepsilon_0\pi R$

b) $120\varepsilon_0\pi R$

c) $140\varepsilon_0\pi R$

d) $240\varepsilon_0\pi R$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

La diferencia de potencial entre $R_3 = 3R$ y $R_2 = 2R$ es

$$|\Delta V| = \frac{Q}{40\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q}{240\pi\varepsilon_0 R}$$

por lo que la capacidad es, simplemente,

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = 240\varepsilon_0\pi R$$

Problema 2.7.
Considere el sistema del Problema 2.5. ¿Cuál es la carga inducida en la superficie del dieléctrico interno ε_1?

a) $-\frac{9}{20}Q$

b) $0\,\mathrm{C}$

c) $-\frac{4}{5}Q$

d) $-\frac{2}{5}Q$

e) $-\frac{9}{10}Q$

Solución:

Como $\vec{D} = \vec{0}$ en esa región, $\vec{E} = \vec{0}$ y por lo tanto $\vec{P} = \vec{0}$. Así, la carga inducida es:

$$Q_{ind,\varepsilon_1} = 0\,\mathrm{C}$$

Problema 2.8.
Considere el sistema del Problema 2.5. ¿Cuál es la carga inducida en la superficie externa del dieléctrico ε_2?

a) $\frac{9}{20}Q$

b) $0\,\mathrm{C}$

c) $\frac{4}{5}Q$

d) $\frac{2}{5}Q$

e) $\frac{9}{10}Q$

Solución:

El campo eléctrico en el dieléctrico es:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2 r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

y la polarización es:

$$\vec{P} = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\vec{E}$$

La densidad de carga superficial en $r = R_3$ es:

$$\sigma = \vec{P}(R_3) \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)Q}{4\pi\varepsilon_2 {R_3}^2}$$

y la carga total de polarización es:

$$Q_{ind,\varepsilon_2} = 4\pi {R_3}^2 \sigma = \frac{9}{10}Q$$

Problema 2.9.
Se tiene un alambre de un material desconocido de 2 m de largo y con una sección transversal de 1 mm^2. Los extremos del alambre se someten a una diferencia de potencial de 3 V y se mide una corriente circulante de 2 A. Entonces, la conductividad σ del material es:

a) $\frac{3}{2} \times 10^{-6}\,\Omega^{-1}\,\text{m}^{-1}$

b) $\frac{3}{4} \times 10^{-6}\,\Omega^{-1}\,\text{m}^{-1}$

c) $\frac{2}{3} \times 10^{6}\,\Omega^{-1}\,\text{m}^{-1}$

d) $\frac{4}{3} \times 10^{6}\,\Omega^{-1}\,\text{m}^{-1}$

e) $\frac{1}{3} \times 10^{6}\,\Omega^{-1}\,\text{m}^{-1}$

Solución:

Si llamamos L al largo, A al área, y σ a la conductividad, la resistencia de este alambre es:

$$R = \frac{L}{\sigma A}$$

Por otra parte, de la ley de Ohm,

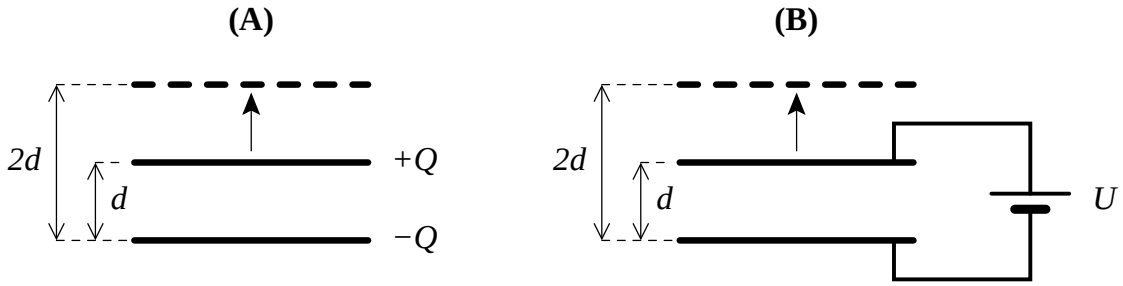
$$I = \frac{\Delta V}{R}$$

Juntando ambas ecuaciones, podemos despejar:

$$\sigma = \frac{IL}{A\Delta V} = \frac{4}{3} \times 10^{6}\,\Omega^{-1}\,\text{m}^{-1}$$

donde se tuvo cuidado de usar solamente unidades en el SI.

Problema 2.10.
Se tienen dos placas planas conductoras con áreas A y distancia entre ellas igual a d, como en la figura. En caso (A), las placas están cargadas con cargas $\pm Q$; en el caso (B), las placas están conectadas con una pila de voltaje U.



Si un agente externo duplica la distancia entre las placas de d a $2d$, las energías almacenadas en los condensadores:

a) Se duplica en ambos casos

b) Disminuye a la mitad en ambos casos

c) Se duplica en caso (A) y disminuye a la mitad en caso (B)

d) Disminuye a la mitad en caso (A) y se duplica en caso (B)

e) No cambia en ningún caso

Solución:

En el caso (A), la carga es constante y la dependencia de la energía con la separación entre placas es:

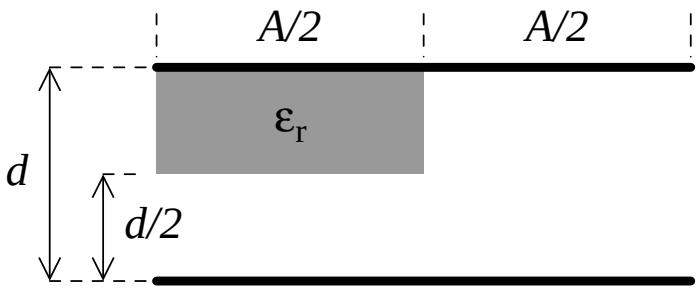
$$U_A = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A}$$

Para el caso (B), la diferencia de potencial es constante y vale $U = cte$, por lo que la dependencia de la energía con d es:

$$U_B = \frac{CV^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 A U^2}{2d}$$

Por lo tanto, al duplicar la distancia en el caso (A) la energía se duplica y en el caso (B), disminuye a la mitad.

Problema 2.11.
Entre dos placas planas conductoras con áreas A y distancia d se inserta un dieléctrico con permitividad $\varepsilon = \varepsilon_r\, \varepsilon_0$ como se indica en la figura.



Si la capacidad del sistema sin dieléctrico es C_0, ¿cuál es la capacidad del sistema con el dieléctrico?

a) $C = \left(\dfrac{\varepsilon_r + 4}{4}\right) C_0$

b) $C = \left(\dfrac{\varepsilon_r}{4}\right) C_0$

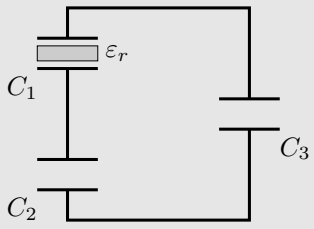
c) $C = \left(\dfrac{3}{\varepsilon_r}\right) C_0$

d) $C = \left(\dfrac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1} + \dfrac{1}{2}\right) C_0$

e) $C = \left(\dfrac{\varepsilon_r + 1}{\varepsilon_r} + \dfrac{1}{2}\right) C_0$

Solución:

La forma más simple de abordar el problema es considerar la configuración del enunciado como tres condensadores, dos en serie en paralelo con el tercero:



Recordando que la capacitancia total sin dieléctrico es $C_0 = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 (A/2)}{(d/2)} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{d} \\ C_2 &= \frac{\varepsilon_0 (A/2)}{(d/2)} = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \\ C_3 &= \frac{\varepsilon_0 (A/2)}{d} = \frac{\varepsilon_0 A}{2d} \end{aligned}$$

ya que todos tienen área $A/2$, C_1 y C_2 poseen separación $d/2$ y C_3 tiene separación d. La capacidad equivalente de esta combinación es:

$$\begin{aligned} C_{serie} &= \left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)^{-1} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r+1}\right) \\ &= \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r+1}\right)C_0 \\ \therefore\ C &= C_3 + C_{serie} \\ &= \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r+1}+\frac{1}{2}\right)C_0 \end{aligned}$$

Problema 2.12.
Para la configuración del problema 2.11, suponiendo cargas iniciales $\pm Q$ en las placas y una energía potencial inicial E_0, ¿cuál es el trabajo que un agente externo hace para insertar el dieléctrico?

a) $W = -\frac{\varepsilon_r}{4}E_0$

b) $W = -\frac{\varepsilon_r - 1}{3\varepsilon_r + 1}E_0$

c) $W = -\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1}E_0$

d) $W = -\frac{\varepsilon_r + 1}{\varepsilon_r}E_0$

e) $W = -E_0$

Solución:

Para un sistema aislado y con carga conservada, sabemos que la variación de energía del sistema más el trabajo que hace el sistema tiene que ser cero, es decir:

$$dU_{sis} + dW_{sis} = 0$$

y el trabajo que hace el sistema es $dW_{sist} = -dW_{ext}$, de modo que:

$$dW_{ext} = dU_{sis}$$

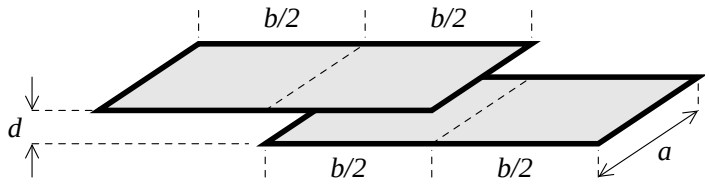
Entonces, el trabajo total que hace el agente externo es:

$$W_{ext} = U_{final} - U_{inicial} = \frac{Q^2}{2C_f} - \frac{Q^2}{2C_i} = E_0\left(\frac{C_i - C_f}{C_f}\right)$$

Usando el resultado del problema anterior para C_f, tenemos que:

$$W = -\frac{\varepsilon_r - 1}{3\varepsilon_r + 1}E_0$$

Problema 2.13.
Dos placas planas conductores con áreas $A = ab$ y con cargas $\pm Q$ están ubicadas como indica la figura. La placa de abajo puede moverse horizontalmente.



¿Cuál es la magnitud de la fuerza horizontal que ejerce la place de arriba sobre la placa de abajo?

a) $F = \dfrac{2Q^2}{\varepsilon_0 b^2}$

b) $F = \dfrac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$

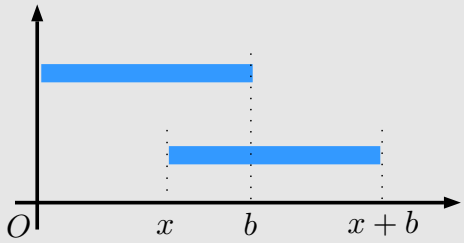
c) $F = \dfrac{Q^2 b}{\varepsilon_0 d a^2}$

d) $F = \dfrac{2Q^2 d}{\varepsilon_0 a b^2}$

e) $F = 0\,\mathrm{N}$

Solución:

Consideremos el siguiente sistema coordenado:



Como es un sistema aislado (no conectado a una batería) sabemos que $F_{sis} = -\nabla U$. La capacidad es:

$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 a(b-x)}{d}$$

y la energía es:

$$U(x) = \frac{Q^2}{2C(x)} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 a(b-x)}$$

La fuerza que hace el sistema (la placa fija sobre la que se desplaza) es, entonces,

$$\vec{F} = -\nabla U\Big|_{x=b/2} = -\frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 a(b-x)^2}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}\Big|_{x=b/2} = -\frac{2Q^2 d}{\varepsilon_0 a b^2}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

Es decir, la atrae con una fuerza de módulo:

$$F = \frac{2Q^2 d}{\varepsilon_0 a b^2}$$

Problema 2.14.
Sobre la capacidad eléctrica, es correcto afirmar que:

a) Depende de la geometría de los conductores

b) Depende del voltaje aplicado

c) Depende de las cargas en las placas

d) Es diferente de cero solamente con dieléctrico

e) Depende de donde se conectan eléctricamente los dos conductores

Problema 2.15.
Un Farad equivale a:

a) $1\,\mathrm{F} = 1\,\mathrm{V\,A}$

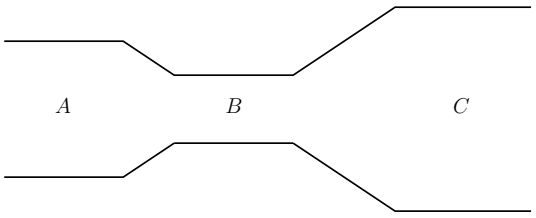
b) $1\,\mathrm{F} = 1\,\mathrm{A\,V^{-1}}$

c) $1\,\mathrm{F} = 1\,\mathrm{J\,A^{-1}}$

d) $1\,\mathrm{F} = 1\,\mathrm{W\,C^{-1}}$

e) $1\,\mathrm{F} = 1\,\mathrm{C\,V^{-1}}$

Problema 2.16.
Una pieza de cobre (con simetría cilíndrica) tiene la forma de que se muestra en la figura. Los extremos están conectados a una batería de modo que en la pieza fluye corriente. ¿En qué región A, B o C es mayor la densidad de corriente?



a) Región A

b) Región B

c) Región C

d) Es igual en todas las regiones

e) Depende de la diferencia de potencial que se aplique

Solución:

Si circula una corriente constante, a menor superficie se obtiene una mayor densidad de corriente.

Problema 2.17.
En el Problema 2.16, ¿en qué región es mayor el campo eléctrico?

a) Región A

b) Región B

c) Región C

d) Es igual en todas las regiones

e) Depende de la diferencia de potencial que se aplique

Solución:

A conductividad constante, mayor densidad de corriente implica mayor campo, de acuerdo a la ley de Ohm microscópica.

Problema 2.18.
En el Problema 2.16, la razón entre los diámetros es $A : B : C = 3 : 1 : 5$. Entonces, la velocidad de deriva de los electrones:

a) Tiene la misma magnitud en la región B que en la región C

b) Es cinco veces mayor en la región B que en la región C

c) Es veinticinco veces mayor en la región B que en la región C

d) Es cinco veces menor en la región B que en la región C

e) No tenemos suficientes datos para decidir

Solución:

La densidad de corriente en este caso es $J = I/A$, en donde A es el área de cada segmento conductor. Por otra parte, por tratarse del mismo material, la densidad de portadores de corriente ρ es constante. Por tanto, la velocidad de deriva es $v_d = J/\rho \approx 1/A$. El área es proporcional al diámetro al cuadrado, por lo que para las razones entre diámetros dadas se encuentra el resultado indicado.

Problema 2.19.
Considere un conductor cuya forma geométrica es semejante a la del Problema 2.16 pero hecho de materiales de distinta conductividad. La conductividades σ de los tramos A, B y C están en la razón $\sigma_A : \sigma_B : \sigma_C = 2 : 1 : 5$, y la razón entre los diámetros es $A : B : C = 2 : 1 : 3$. Entonces, una vez establecido el régimen estacionario ($\nabla \cdot \vec{J} = 0$), podemos afirmar que la densidad de corriente es menor en:

a) Región A

b) Región B

c) Región C

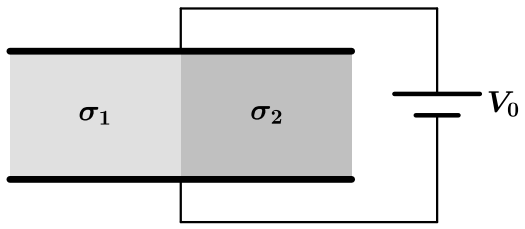
d) Es igual en todas las regiones

e) Depende de la diferencia de potencial que se aplique

Solución:

Es menor en la región C independientemente de las conductividades, puesto que una vez establecido el régimen estacionario la corriente es constante.

Problema 2.20.
El espacio entre dos placas conductoras de áreas A, separadas una distancia d, está lleno en partes iguales con materiales de distintas conductividades: $\sigma_1 = 2\sigma_0$ y $\sigma_2 = \sigma_0$ (ver figura). Las placas están conectadas a una batería que provee una diferencia de potencial constante V_0. Entonces, la carga que pasa por un área $A/4$ en la región con σ_1, en un intervalo de 8 segundos, es:



a) $Q = \dfrac{8\sigma_0 V_0 A}{d}\,\mathrm{C}$

b) $Q = \dfrac{2\sigma_0 V_0 A}{d}\,\mathrm{C}$

c) $Q = \dfrac{4\sigma_0 V_0 A}{d}\,\mathrm{C}$

d) $Q = \dfrac{\sigma_0 V_0 A}{d}\,\mathrm{C}$

e) $Q = \dfrac{\sigma_0 V_0 A}{2d}\,\mathrm{C}$

Solución:

Como la diferencia de potencial V_0 es constante, el campo eléctrico es $E = V_0/d$. En l región de conductividad σ_1, la densidad de corriente es:

$$J_1 = \sigma_1 E = \frac{\sigma_1 V_0}{d}$$

Por el área $A/4$ pasa una corriente $I = J_1 \cdot (A/4)$, y la carga total que atraviesa dicha área en un intervalo Δt es $Q = I\Delta t$. Reemplazando los valores dados de σ_1 y $\Delta t = 8\,\text{s}$ resulta:

$$Q = \frac{4\sigma_0 V_0 A}{d}\,\text{C}$$

Problema 2.21.
Un cilindro de radio a y largo L tiene una conductividad variable $\sigma(z) = \sigma_0(z - 2L)^2$, donde el eje Z está dirigido a lo largo del eje de simetría del cilindro. Entonces, si suponemos que la corriente circula en la dirección $\hat{\boldsymbol{k}}$, la resistencia del cilindro es:

a) $R = \dfrac{1}{\pi a^2 L \sigma_0}$

b) $R = \dfrac{L}{2\pi a^2 \sigma_0}$

c) $R = \dfrac{1}{2\pi a^2 L \sigma_0}$

d) $R = \dfrac{2L}{\pi a^2 \sigma_0}$

e) $R = \dfrac{2}{\pi a^2 L \sigma_0}$

Solución:

Como el cilindro tiene área uniforme y la corriente circula perpendicular a las secciones transversales (eje Z), entonces podemos tomar un elemento infinitesimal de volumen y calcular su resistencia:

$$dR = \frac{dz}{\sigma(z)\,A}$$

Considerando que cada uno de ellos está en serie, la resistencia total corresponde a la *suma* de cada

una de las contribuciones individuales:

$$\begin{aligned} R &= \int_0^L dR \\ &= \frac{1}{\sigma_0 A}\int_0^L \frac{dz}{(z-2L)^2} \\ &= \frac{1}{2L\sigma_0 A} \\ &= \frac{1}{2\pi a^2 L\sigma_0} \end{aligned}$$

Problema 2.22.
Se carga un condensador de $4\,\mu\text{F}$ con una fuente de $200\,\text{V}$. Después de cargarlo completamente, se desconecta el condensador y se conecta en paralelo a otro condensador, de $2\,\mu\text{F}$ inicialmente descargado. ¿Cuanta energía electrostática se libera al ambiente en el proceso?

a) $8.00 \times 10^{-2}\,\text{J}$

b) $5.33 \times 10^{-2}\,\text{J}$

c) $2.67 \times 10^{-2}\,\text{J}$

d) $1.00 \times 10^{-4}\,\text{J}$

e) $6.25 \times 10^{-4}\,\text{J}$

Solución:

Como inicialmente el sistema se encuentra conectado a una batería, la energía potencial electrostática inicial viene dada por:

$$U_i = \frac{C_i V^2}{2} = \frac{4\times 10^{-6}\cdot 4\times 10^{4}}{2}\,\text{J} = 8\times 10^{-2}\,\text{J}$$

Al cargarse completamente, el primer condensador almacena una carga igual al:

$$Q = 4\,\mu\text{F}\cdot 200\,\text{V} = 8\times 10^{-4}\,\text{C}$$

Posteriormente, el sistema se modifica hasta tener dos condensadores en paralelo, con una capacitancia equivalente $C_f = 4\,\mu\text{F} + 2\,\mu\text{F} = 6\,\mu\text{F}$. En este caso, la carga se ha repartido, pero la magnitud total Q permanece intacta pues el sistema está aislado. Por tanto, la energía final del sistema es:

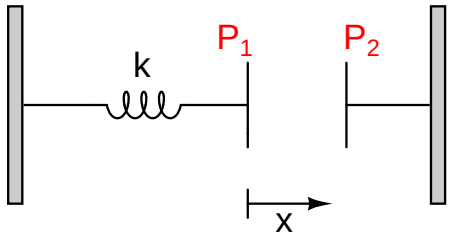
$$U_f = \frac{Q^2}{2C_f} = \frac{64\times 10^{-8}}{2\cdot 6\times 10^{-6}}\,\text{J} = \frac{16}{3}\times 10^{-2}\,\text{J}$$

Así, la variación de energía es simplemente la resta:

$$\Delta U = U_f - U_i = -\frac{8}{3} \times 10^{-2}\,\mathrm{J} = -2.67 \times 10^{-2}\,\mathrm{J}$$

donde el signo menos indica que dicha energía fue liberada al ambiente.

Problema 2.23.
La placa P_1 de un condensador de placas planas y paralelas, lleno de aire y de área A, está conectada a un resorte que tiene constante elástica k, mientras que la segunda placa P_2 está fija. El aparato está sobre una mesa sin fricción, como se muestra en la figura. Si una carga $+q$ se coloca en la placa P_1 y una carga $-q$ en la placa P_2, ¿cuánto es la máxima expansión del resorte?



a) $\frac{q^2}{2\varepsilon_0 A k}$

b) $\frac{q^2}{4\varepsilon_0 A k}$

c) $\frac{q^2 k}{4\varepsilon_0 A}$

d) $\frac{q^2 k}{2\varepsilon_0 A}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Sea x la distancia que se mueve la placa P_1, respecto de su posición inicial. Esta cantidad coincide con lo que se alarga el resorte, medido positivamente desde el la placa P_1 hacia la placa P_2. Si el resorte se alarga x unidades de largo, el condensador se acerca x unidades respecto de lo separación original, d. Sobre la placa P_1 actúan dos fuerzas: la fuerza elástica $\vec{F}_{elast} = -kx\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$ y la fuerza electrostática $\vec{F}_{elect}$. Esta última, dado que el sistema se encuentra aislado, la calculamos como $\vec{F}_{elect} = -\nabla U$:

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{\varepsilon_0 A}{d-x} \\ U(x) &= \frac{q^2}{2C(x)} = \frac{q^2(d-x)}{2\varepsilon_0 A} \\ \vec{F}_{elect} &= -\nabla U(x) = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 A}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} \end{aligned}$$

Aplicando la segunda ley de Newton, siendo m la masa de la placa, en el eje X:

$$m\ddot{x} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 A} - kx \ , \quad x(0) = x'(0) = 0$$

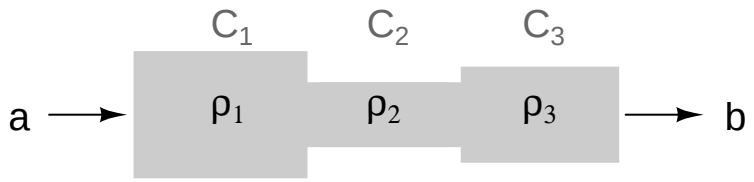
La ecuación diferencial anterior tiene por solución:

$$x(t) = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 Ak}\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)\right]$$

Por tanto, el máximo desplazamiento corresponde a:

$$x_{max} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 Ak}$$

Problema 2.24.
Se tienen tres cilindros C_1, C_2 y C_3 óhmicos con resistividades ρ_j, largos L_j y áreas transversales A_j, con $j = 1, 2, 3$ respectivamente. Suponga que $\rho_1 = \rho_3 = \rho$ y $\rho_2 = 2\rho$, $L_1 = L_3 = L$ y $L_2 = L/2$ y las áreas son $A_1 = A_3 = A$ y $A_2 = A/2$. Entonces, la resistencia del sistema entre las tapas a y b es:



a) $\dfrac{2\rho L}{A}$

b) $\dfrac{4\rho L}{A}$

c) $\dfrac{\rho L}{2A}$

d) $\dfrac{\rho L}{4A}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Entre a y b, los tres cilindros están en serie, por lo que la resistencia total es:

$$R = \frac{\rho_1 L_1}{A_1} + \frac{\rho_2 L_2}{A_2} + \frac{\rho_3 L_3}{A_3}$$

Reemplazando,

$$R = \frac{\rho L}{A} + \frac{2\rho(L/2)}{A/2} + \frac{\rho L}{A} = \frac{4\rho L}{A}$$

Problema 2.25.
Se tienen dos esferas conductoras, S_a y S_b, concéntricas de radios a y b con $a < b$. Entre las esferas hay un material óhmico que tiene una resistividad $\rho = \rho(r)$, dependiente de la distancia al centro de ambas esferas, que se puede controlar a voluntad. Asuma que fluye una corriente estacionaria I, radial, desde a hasta b. ¿Con cuál de las siguientes resistividades resulta un campo eléctrico E independiente de r?

a) $\rho(r) = \rho_0 \dfrac{r^2}{a^2}$

b) $\rho(r) = \rho_0 \dfrac{r}{a}$

c) $\rho(r) = \rho_0 \dfrac{r}{b}$

d) $\rho(r) = \rho_0 \Big(\ln(a/r) - \ln(b/r) \Big)$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Tomemos un cascarón esférico de espesor dr, el cual posee una resistencia igual a:

$$dR = \frac{\rho(r)\, dr}{A} = \frac{\rho(r)\, dr}{4\pi r^2}$$

De la ley de Ohm, se sabe que $dV = I\, dR$. Por otra parte, se sabe que $dV = E\, dr$. Igualando,

$$I\, dR = E\, dr \quad \longrightarrow \quad dR = \frac{E}{I}\, dr$$

Así, se debe cumplir que:

$$\frac{\rho(r)}{4\pi r^2} = \frac{E}{I}$$

Por tanto, como la corriente I es estacionaria y se quiere que E sea independiente de r, la resistividad debe ser proporcional a r^2.

Problema 2.26.
Se tiene un cilindro MUY largo de material dieléctrico con permitividad relativa $\epsilon_r = 10$. En el eje del cilindro se encuentra un cable con una densidad de carga lineal de carga λ constante. Suponga que r es la distancia al eje del cilindro. Entonces, el módulo del campo eléctrico, $E(r)$, dentro del material dieléctrico es:

a) $E(r) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

b) $E(r) = \dfrac{\lambda}{10\pi\varepsilon_0 r}$

c) $E(r) = \dfrac{\lambda}{20\pi\varepsilon_0 r}$

d) $E(r) = \dfrac{\lambda}{\pi\varepsilon_0 r}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Por la simetría del problema, proponemos que el desplazamiento eléctrico posee la forma $\vec{D} = D(r)\,er$. Por lo tanto, de la ley de Gauss para el desplazamiento eléctrico aplicada a un cilindro de altura h y radio r,

$$\iint \vec{D}\cdot\hat{n}\;dS = \iint D(r)\;dS = 2\pi r h\, D(r) = q_{libre} = \lambda\, h \quad \longrightarrow \quad D(r) = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

Así, en el dieléctrico,

$$E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon_r\,\varepsilon_0} = \frac{\lambda}{20\pi\varepsilon_0 r}$$

Problema 2.27.
Un alambre uniforme de largo ℓ y sección transversal A tiene una resistencia de $16\,\Omega$. Se corta el alambre en cuatro pedazos iguales de sección transversal A. Luego, cada uno de los cuatro alambres se estira, manteniendo su densidad volumétrica, hasta alcanzar un largo ℓ cada uno. Si los cuatro alambres se conectan en paralelo, ¿cuál es la resistencia equivalente de esta combinación?

a) $64\,\Omega$

b) $4\,\Omega$

c) $16\,\Omega$

d) $1\,\Omega$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Sea R la resistencia original y R' la resistencia de cada uno de los cuatro segmentos. Si la resistividad del material es ρ, entonces:

$$R' = \frac{\rho\ell}{A'}$$

Notar que utilizamos el mismo largo inicial, pero debemos determinar la nueva sección transversal puesto que el material se estiró. Si m es la masa inicial del alambre, y la densidad se mantiene, entonces:

$$\frac{m}{A\ell} = \frac{m'}{A'\ell'} = \frac{m/4}{A'\ell} \quad \longrightarrow \quad A' = \frac{A}{4}$$

Es decir, el área se reduce a la cuarta parte de la original. Por lo tanto, la resistencia de cada uno de los segmentos es:

$$R' = \frac{\rho\ell}{A/4} = 4\,\frac{\rho\ell}{A} = 4\,R$$

Finalmente, la resistencia equivalente viene dada por:

$$R_{equiv} = \left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R'} + \frac{1}{R'} + \frac{1}{R'}\right)^{-1} = \frac{R'}{4} = R = 16\,\Omega$$

Problema 2.28.
Un condensador de dos placas planas y paralelas se carga a una diferencia de potencial de 20 V. Una vez cargado, se desconecta de la fuente de voltaje y se dobla la distancia entre las dos placas. Es correcto afirmar que la diferencia de potencial o la carga cambian en la siguiente manera:

a) La carga y el voltaje se mantienen

b) El voltaje aumenta a 40 V

c) El voltaje disminuye a 5 V

d) La carga se duplica

e) La carga se reduce a la mitad

Solución:

Una vez que el condensador está cargado, su carga inicial es:

$$Q_i = C_i V_i$$

Al separarse las placas, la nueva capacidad del sistema es:

$$C_f = \frac{\varepsilon_0 A}{2d} = \frac{C_i}{2}$$

Como el sistema (luego de retirar la fuente de voltaje) está aislado, la carga se conserva y $Q_i = Q_f$. Con ello, la nueva diferencia de potencial es:

$$V_f = \frac{Q_f}{C_f} = \frac{Q_i}{C_i/2} = 2\,\frac{C_i V_i}{C_i} = 2\,V_i = 40\,\text{V}$$

Problema 2.29.
Considere dos cascarones esféricos metálicos concéntricos de radios a y b, ambos con un espesor despreciable. El espacio entre los dos cascarones ($a < r < b$) se llena con agua de mar de conductividad $\sigma = 4.8\,\Omega^{-1}\,\mathrm{m}^{-1}$ y permitividad dieléctrica $\varepsilon = 8.5 \times 10^{-10}\,\mathrm{A\,s\,V}^{-1}\,\mathrm{m}^{-1}$. Con una fuente de poder se mantiene una carga constante $Q = 10^9\,\mathrm{C}$ en el cascaron interno y $-Q$ en el cascaron externo. Entonces, la corriente eléctrica que circula entre los cascarones es:

a) $I = 11.2\,\mathrm{A}$

b) $I = 4.8\,\mathrm{A}$

c) $I = 56\,\mathrm{A}$

d) $I = 0.48\,\mathrm{A}$

e) $I = 5.6\,\mathrm{A}$

Solución:

Al aplicar la ley de Gauss para el vector desplazamiento, tenemos que:

$$4\pi r^2\,D(r) = Q \quad \longrightarrow \quad D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad \longrightarrow \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

Por la ley de Ohm microscópica, la densidad de corriente es:

$$J = \sigma\,E = \frac{\sigma Q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

La corriente que circula cada sección esférica (cascarón esférico de radio r) es, entonces,

$$I = 4\pi r^2\,J = \frac{\sigma Q}{\varepsilon} = \frac{4.8}{8.5} \times 10\,\mathrm{A} = 5.6\,\mathrm{A}$$

Problema 2.30.
Considere dos placas paralelas de área A y separadas por una distancia $d \ll \sqrt{A}$. El espacio entre las placas está lleno con un material de conductividad σ. Calcule la resistencia del sistema, ignorando los efectos de borde.

a) $R = \dfrac{2d}{\sigma A}$

b) $R = \dfrac{d}{\sigma A}$

c) $R = \dfrac{d}{4\sigma A}$

d) $R = \dfrac{d}{2\sigma A}$

e) $R = \dfrac{d}{6\sigma A}$

Solución:

Supongamos que sometemos las dos placas a una diferencia de potencial V. Dado que la separación entre las placas es mucho más pequeña que las dimensiones de las mismas, podemos aproximar la situación a dos planos infinitos. Así, el campo eléctrico tendrá una magnitud $E = V/d$. De la ley de Ohm microscópica, $J = \sigma E = \sigma V/d$. Como la densidad de corriente es constante, $I = JA = \sigma VA/d$. De la ley de Ohm macroscópica,

$$R = \frac{V}{I} = \frac{V}{\sigma VA/d} = \frac{d}{\sigma A}$$

Problema 2.31.
Considere una esfera conductora perfecta de radio $R = 0.2\,\mathrm{m}$, inicialmente con carga $Q_0 = 10\,\mathrm{C}$ y completamente rodeada por un medio uniforme de conductividad $\sigma = 2 \times 10^{-11}\,\Omega^{-1}\,\mathrm{m}^{-1}$ y constante dieléctrica $\kappa = \varepsilon/\varepsilon_0 = 50$ (el valor de la permitividad del vacío es $\varepsilon_0 \simeq 9 \times 10^{-12}\,\mathrm{C}^2\,\mathrm{N}^{-1}\,\mathrm{m}^{-2}$). Para que la carga inicial se reduzca por un factor de $e^{-1} \simeq 0.37$, es necesario esperar un tiempo de:

a) 222.5 s

b) 0.1 s

c) 22.5 s

d) 112.4 s

e) 11.2 s

Solución:

Sea $Q = Q(t)$ la carga sobre la superficie de la esfera conductora. El campo eléctrico a una distancia r mayor que el radio de la esfera es:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\kappa\varepsilon_0 r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Por la ley de Ohm, la densidad de corriente está dada por:

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} = \frac{\sigma Q}{4\pi\kappa\varepsilon_0 r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Así, la corriente que circula desde la esfera a través de una superficie esférica de radio r es:

$$I = \iint_{\mathcal{S}} \vec{J}\cdot\hat{n}\; dS = \frac{\sigma Q}{\kappa\varepsilon_0} = \frac{Q}{\tau} \qquad (*)$$

con $\tau = \kappa\varepsilon_0/\sigma$. Dado que se trata de un proceso de descarga, $I = -dQ/dt$, por lo que la ecuación $(*)$ corresponde a una ecuación diferencial con solución:

$$Q(t) = Q_0\,\exp(-t/\tau)$$

Sea t^* el tiempo pedido en el enunciado, i.e. $Q(t^*) = Q_0\, e^{-1}$. Con ello,

$$t^* = \tau = \frac{\kappa\varepsilon_0}{\sigma} = \frac{50 \cdot 9 \times 10^{-12}}{2 \times 10^{-11}}\,\mathrm{s} = 22.5\,\mathrm{s}$$

Problema 2.32.
Una esfera de radio $R = 0.2\,\mathrm{m}$ con carga libre $Q_{lib} = -20\,\mathrm{C}$ está sumergida en un medio dieléctrico lineal homogéneo de constante dieléctrica $\kappa = 3.5$ y de extensión infinita. El valor absoluto de la densidad superficial de carga de polarización en la esfera se aproxima mejor a:

a) $95\,\mathrm{Cm}^{-2}$

b) $142\,\mathrm{Cm}^{-2}$

c) $178\,\mathrm{Cm}^{-2}$

d) $0\,\mathrm{Cm}^{-2}$

e) $28\,\mathrm{Cm}^{-2}$

Solución:

El campo eléctrico fuera de la esfera es el de una carga puntual en el origen en presencia de un dieléctrico:

$$\vec{E} = \frac{Q_{lib}}{4\pi\kappa\varepsilon_0 r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

El vector polarización viene dado por:

$$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E} = \frac{(\kappa - 1)Q_{lib}}{4\pi\kappa r^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Finalmente,

$$\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \hat{n}\Big|_{r=R} = -\frac{(\kappa - 1)Q_{lib}}{4\pi\kappa R^2} \approx \frac{2.5 \cdot 20}{4 \cdot 3.14 \cdot 3.5 \cdot 0.04}\,\mathrm{C\,m}^{-2} \approx 28\,\mathrm{C\,m}^{-2}$$

Problema 2.33.
Se tiene una esfera maciza sin carga libre de radio R hecha de un material dieléctrico no lineal. La esfera está polarizada, y el campo eléctrico en su interior es $\vec{E} = -\dfrac{kr}{\varepsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$. La carga total de polarización en la superficie de la esfera es:

a) $Q_p = -\dfrac{kR^2}{2}$

b) $Q_p = \dfrac{kR^2}{2}$

c) $Q_p = -4\pi R^3 k$

d) $Q_p = 4\pi R^3 k$

e) $Q_p = 0$

Solución:

Como la carga libre es cero, $\vec{D} = \vec{0}$. Por tanto, el vector polarización dentro de la esfera viene dado por:

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} = kr\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Por tanto, la densidad superficial de carga de polarización es:

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}\Big|_{r=R} = kR$$

pues la normal apunta hacia afuera. Finalmente,

$$Q_p = 4\pi R^2 \sigma_p = 4\pi R^3 k$$

Problema 2.34.
Se tiene un cascarón esférico metálico de radio R con carga positiva Q, rodeado por un material dielétrico con permitividad relativa κ hasta $r = 3R/2$. Todo lo anterior se rodea con otro cascarón esférico metálico de radio $r = 2R$ y carga $-Q$, quedando el espacio $3R/2 < r < 2R$ vacío. La capacitancia entre los dos conductores de este sistema es:

a) $C = 4\pi\varepsilon_0 R(\kappa + 1)$

b) $C = \dfrac{2}{3}\pi\varepsilon_0 R(\kappa + 1)$

c) $C = 2\pi\varepsilon_0 R(\kappa + 1)$

d) $C = 4\pi\varepsilon_0 R\left(\dfrac{6\kappa}{2+\kappa}\right)$

e) $C = 4\pi\varepsilon_0 R\left(\dfrac{6+\kappa}{3\kappa}\right)$

Solución:

Recordemos que la capacitancia de un condensador formado por dos esferas metálicas de radios $0 < a < b$ es:

$$C_{esf} = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$$

Se puede considerar que el sistema se trata de un conjunto de condensadores C_i en serie, donde:

- C_1 corresponde al condensador que se extiende entre $R < r < 3R/2$ y un dieléctrico con permitividad relativa κ:
$$C_1 = \frac{4\pi\kappa\varepsilon_0(3R^2/2)}{R/2} = 12\pi\kappa\varepsilon_0 R$$
- C_2 corresponde al condensador que se extiende entre $3R/2 < r < 2R$ sin dieléctrico en su interior:
$$C_2 = \frac{4\pi\varepsilon_0(3R^2)}{R/2} = 24\pi\varepsilon_0 R$$

Por tanto,

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{24\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{2}{\kappa}+1\right) = \frac{1}{24\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{2+\kappa}{\kappa}\right) \qquad \longrightarrow \qquad C = 24\pi\varepsilon_0 R\left(\frac{\kappa}{2+\kappa}\right)$$

Problema 2.35.
Se tiene un capacitor de placas paralelas con separación entre las placas muy pequeña comparada a sus dimensiones. Este capacitor se carga con una batería hasta que su carga y voltaje iniciales son Q_0 y V_0, respectivamente. Luego, se desconecta el capacitor de la batería, mientras que la distancia entre las placas se incrementa un factor de 4. Al mismo tiempo, se introduce un dieléctrico con permitividad relativa $\kappa = 3$ en todo el espacio entre las placas. Los nuevos valores de la carga y el voltaje en el capacitor son:

a) $Q_0,\ \frac{3}{4}V_0$

b) $3Q_0,\ \frac{3}{4}V_0$

c) $\frac{4}{3}Q_0,\ 3V_0$

d) $\frac{3}{4}Q_0,\ \frac{4}{3}V_0$

e) $Q_0,\ \frac{4}{3}V_0$

Solución:

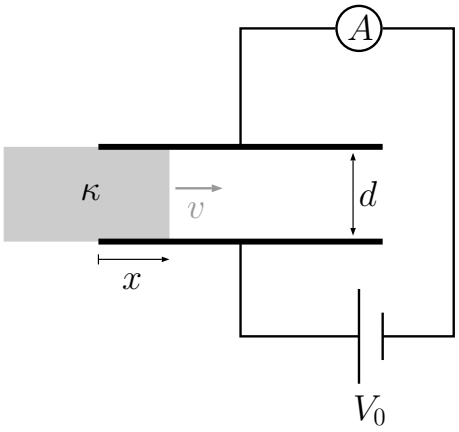
Notemos que, luego de retirar la batería, el proceso se realiza a carga constante, pues las placas no pueden intercambiar carga entre ellas ni con el medio externo. Así, $Q_f = Q_0$. Por otra parte, siguiendo la misma nomenclatura para la capacitancia, se sabe que:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \qquad \longrightarrow \qquad C_f = \frac{\kappa\varepsilon_0 A}{4d} = \frac{3}{4}C_0$$

Así,

$$V_f = \frac{Q_f}{C_f} = \frac{Q_0}{3C_0/4} = \frac{4}{3}V_0$$

Problema 2.36.
Un capacitor de placas cuadradas planas y paralelas tiene lado L y separación entre las placas d. El espacio entre las placas está inicialmente vacío. El capacitor esta conectado a una fuente de voltaje ideal con voltaje V_0 y un amperímetro que puede medir corriente, como indica la figura. Al introducir un dieléctrico de permitividad relativa κ en el capacitor, se puede generar una corriente. ¿Con qué velocidad v hay que introducir el dieléctrico para que la corriente generada tenga magnitud I?



a) $v = \dfrac{Id}{V_0 L(\kappa - 1)\varepsilon_0}$

b) $v = \dfrac{Id^2}{V_0 L^2(\kappa - 1)\varepsilon_0}$

c) $v = \dfrac{Id}{2V_0 L(\kappa - 1)\varepsilon_0}$

d) $v = \dfrac{2Id}{V_0 L(\kappa - 1)\varepsilon_0}$

e) $v = \dfrac{2Id^2}{V_0 L^2(\kappa - 1)\varepsilon_0}$

Solución:

Sea x la distancia, medida desde el borde de la placa, de dieléctrico que se ha introducido en el condensador. Así, la capacitancia equivalente vendrá dada por:

$$C(x) = \frac{\kappa\varepsilon_0 Lx}{d} + \frac{\varepsilon_0 L(L-x)}{d} = \frac{\varepsilon_0 L}{d}\Big((\kappa - 1)x + L\Big)$$

Por tanto,

$$Q(x) = C(x)V_0 = \frac{V_0\varepsilon_0 L}{d}\Big((\kappa-1)x + L\Big) \qquad \longrightarrow \qquad I = \frac{dQ}{dt} = \frac{V_0\varepsilon_0 L(\kappa-1)}{d}\frac{dx}{dt}$$

Finalmente,

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{Id}{V_0 L\varepsilon_0(\kappa-1)}$$

Problema 2.37.
Tres cascarones conductores cilíndricos concéntricos de largo L, con cargas $(-Q, +Q, 0)$ y radios $(R, 2R, 3R)$ forman tres espacios separados, identificados con las letras (a, b, c). En cada espacio se puede poner un dieléctrico lineal y homogéneo con constantes dieléctricas relativas (permitividades relativas) $(\kappa_a, \kappa_b, \kappa_c)$. ¿Cuál de las siguientes configuraciones tiene la mayor cantidad de energía almacenada?

a) $\kappa_a = 1,\ \kappa_b = 1,\ \kappa_c = 4$

b) $\kappa_a = 1,\ \kappa_b = 4,\ \kappa_c = 1$

c) $\kappa_a = 2,\ \kappa_b = 2,\ \kappa_c = 1$

d) $\kappa_a = 1,\ \kappa_b = 2,\ \kappa_c = 2$

e) $\kappa_a = 3,\ \kappa_b = 3,\ \kappa_c = 3$

Solución:

Recordemos que la energía almacenada en cierta configuración viene dada por:

$$U = \frac{\kappa\varepsilon_0}{2}\iiint_{\mathbb{R}} \|\vec{E}\|^2\, dV$$

Aplicando ley de Gauss, notaremos que el vector desplazamiento es no nulo únicamente en el espacio b, con magnitud $D_b \propto Q$. De esta forma, dado que $D_b = \kappa_b\varepsilon_0 E_b$, entonces $E_b \propto Q/\kappa_b$ y $U \propto Q^2/\kappa_b$. Así, la energía será máxima en aquella configuración en que κ_b sea mínima, que corresponde al caso $\kappa_b = 1$.

Problema 2.38.
El Cobre tiene una conductividad $\sigma \approx 6 \times 10^7\,\Omega^{-1}\,\mathrm{m}^{-1}$ a temperatura ambiente. En los metales, los portadores de carga son los electrones ($e \approx 1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$, $m_e \approx 9\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$) que se mueven a temperatura ambiente con una velocidad de deriva $v \approx 10^6\,\mathrm{m/s}$. El Cobre tiene una densidad de electrones libres $n = 9 \times 10^{28}\,\mathrm{m}^{-3}$. ¿Cuál es el tiempo promedio τ entre dos colisiones consecutivas de electrones en el Cobre?

a) $\tau \approx 24\,\mathrm{ps}$

b) $\tau \approx 18\,\text{ns}$

c) $\tau \approx 24\,\text{fs}$

d) $\tau \approx 1.8\,\text{ps}$

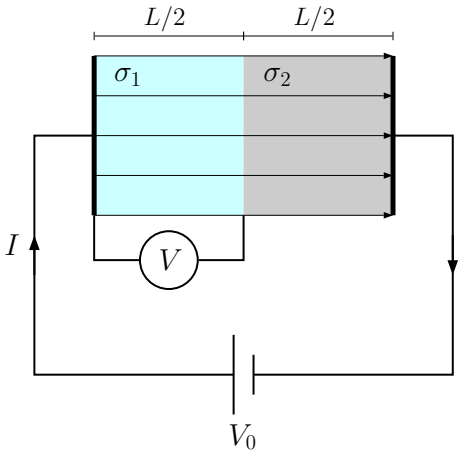
e) $\tau \approx 0.24\,\text{ps}$

Solución:

El modelo de Drude para la conductividad en los metales nos permite relacionar la conductividad con el tiempo medio entre colisiones:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{nq^2\tau}{m_e} \\
\tau &= \frac{\sigma m_e}{nq^2} \\
&\approx \frac{(6\times 10^{7})(9\times 10^{-31})}{(9\times 10^{28})(2.56\times 10^{-38})}\,\text{s} \\
&\approx \frac{6}{2.56}\times 10^{-14}\,\text{s} \\
&\approx 2.4\times 10^{-14}\,\text{s} \;=\; 24\,\text{fs}
\end{aligned}$$

Problema 2.39.
Dos conductores con conductividades σ_1 y $\sigma_2 = 2\sigma_1$ están conectados. A través de ellos circula una corriente I producto de una diferencia de potencial V_0, como muestra la figura. ¿Qué voltaje V_1 marca el voltímetro V?



a) $V_1 = \frac{1}{3}V_0$

b) $V_1 = \frac{2}{3}V_0$

c) $V_1 = \frac{1}{2}V_0$

d) $V_1 = \dfrac{3}{4}V_0$

e) $V_1 = \dfrac{1}{4}V_0$

Solución:

Supongamos que los conductores poseen una sección transversal constante A. Entonces, la resistencia de cada uno de ellos es:

$$R_1 = \frac{A}{\sigma_1 L/2} \qquad \wedge \qquad R_2 = \frac{A}{\sigma_2 L/2} = \frac{R_1}{2}$$

Con ello, la resistencia equivalente es $R = R_1 + R_2 = 3R_1/2$. Dicha corriente se relaciona, a través de la ley de Ohm, con la corriente de la siguiente forma:

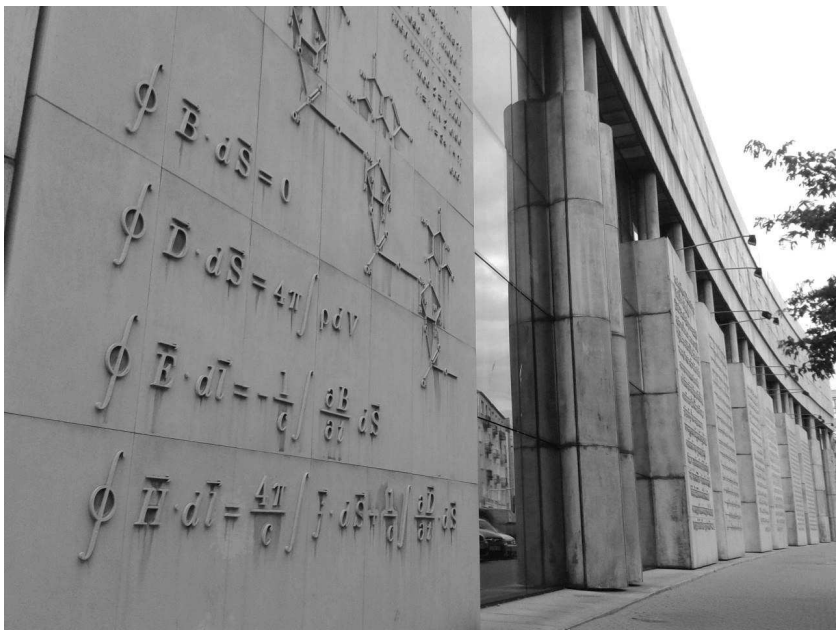
$$R = \frac{V_0}{I} \qquad \longrightarrow \qquad R_1 = \frac{2V_0}{3I}$$

Así, la diferencia de potencial entre los extremos del conductor 1 es:

$$V_1 = R_1 I = \frac{2}{3}V_0$$

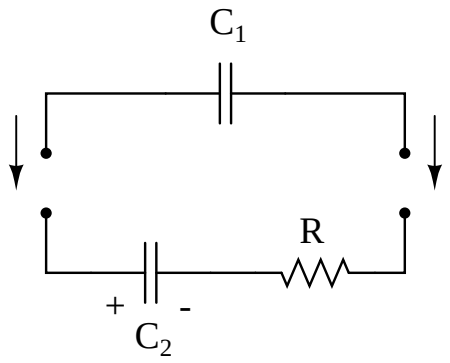
3

Circuitos eléctricos



Ecuaciones de Maxwell en uno de los muros exteriores de la Universidad de Varsovia

Problema 3.1.
Se tienen dos condensadores C_1 y C_2 con cargas iniciales $Q_1(0) = 0$ y $Q_2(0) = Q_0$ respectivamente. El condensador C_2 está inicialmente conectado a una resistencia R. En el instante $t = 0$ se conecta el condensador C_1 al arreglo formado por la resistencia y el segundo condensador, como se aprecia en la figura. La intensidad de la corriente eléctrica para la situación $t > 0$ es proporcional a:



a) $\exp\left(-\left[\dfrac{1/C_1 + 1/C_2}{2R}\right]t\right)$

b) $\exp\left(-\left[\dfrac{1/C_1 + 1/C_2}{R}\right]t\right)$

c) $\exp\left(-\left[\dfrac{1/C_1 - 1/C_2}{R}\right]t\right)$

d) $\exp\left(-\dfrac{t}{RC_1}\right)$

e) $\exp\left(-\dfrac{t}{R(C_1 + C_2)}\right)$

Solución:

Sabemos que la corriente durante el proceso de descarga es:

$$I(t) = I_0 \exp(-t/\tau)$$

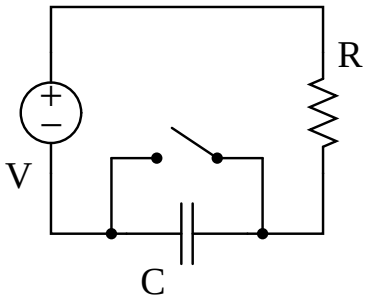
con τ la constante de tiempo del circuito, que corresponde a $\tau = R_{eq}C_{eq}$. En este caso,

$$R_{eq} = R \qquad \wedge \qquad C_{eq} = (1/C_1 + 1/C_2)^{-1}$$

puesto que los condensadores están en serie. Así,

$$\tau = \frac{R}{1/C_1 + 1/C_2} \qquad \longrightarrow \qquad I(t) = I_0 \exp\left(-\left[\frac{1/C_1 + 1/C_2}{R}\right]t\right)$$

Problema 3.2.
En el siguiente circuito, el interruptor ha estado cerrado por un largo tiempo. En $t = 0$, este se abre. ¿Cuál debiese ser el valor de la resistencia R, en términos de C y T para que en $t = T$ la caída de voltaje en la resistencia sea $V/2$?



a) $R = \dfrac{T}{2C}$

b) $R = \dfrac{2T}{C}$

c) $R = \dfrac{T}{C\ln(2)}$

d) $R = \dfrac{T\ln(2)}{2C}$

e) No se puede determinar

Solución:

En $t < 0$ el condensador se encuentra inicialmente descargado, puesto que no hay diferencia de voltaje entre sus extremos ya que están unidos por un conductor ideal. Una vez abierto el interruptor, nos encontramos con un típico circuito RC en carga, donde la corriente está dada por:

$$I(t) = \frac{V}{R}\, e^{-t/RC}$$

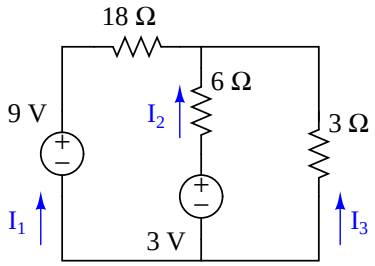
Por la ley de Ohm,

$$V_R(t) = I(t)R = V\, e^{-t/RC} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{V}{2} = V\, e^{-T/RC}$$

Despejando,

$$R = \frac{T}{C\ln(2)}$$

Problema 3.3.
Considere el circuito de la figura. La corriente I_1 está dada por:



a) $I_1 = 0.2\,\text{A}$

b) $I_1 = 0.3\,\text{A}$

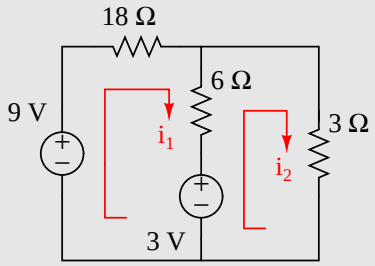
c) $I_1 = 0.5\,\text{A}$

d) $I_1 = 0.6\,\text{A}$

e) $I_1 = 0.4\,\text{A}$

Solución:

Sean i_1 e i_2 las corrientes que circulan por las mallas, según muestra la siguiente figura:



Aplicando el método de mallas,

$$-9 + 18i_1 + 6(i_1 - i_2) + 3 = 0 \qquad \wedge \qquad 6(i_2 - i_1) + 3i_2 - 3 = 0$$

Resolviendo,

$$i_1 = 0.4\,\text{A} \qquad \wedge \qquad i_2 = 0.6\,\text{A}$$

Notemos que I_1 corresponde a la misma corriente i_1. Así,

$$I_1 = 0.4\,\text{A}$$

Problema 3.4.
Considere el sistema del Problema 3.3. La corriente I_2 está dada por:

a) $I_2 = 0.2\,\text{A}$

b) $I_2 = 0.3\,\text{A}$

c) $I_2 = 0.5\,\text{A}$

d) $I_2 = 0.6\,\text{A}$

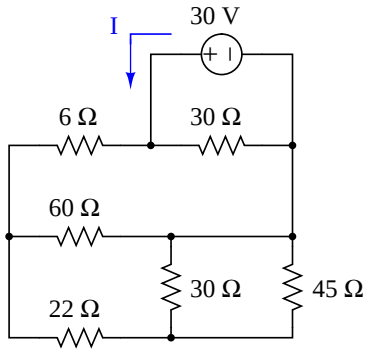
e) $I_2 = 0.4\,\text{A}$

Solución:

Notemos que la corriente I_2 se relaciona con nuestras corrientes i_1 e i_2 mediante la relación:

$$I_2 = i_2 - i_1 = 0.2\,\text{A}$$

Problema 3.5.
Determine el valor de la corriente I del circuito de la figura:



a) $I = 4\,\text{A}$

b) $I = -3\,\text{A}$

c) $I = 2\,\text{A}$

d) $I = 1\,\text{A}$

e) $I = 0.5\,\text{A}$

Solución:

Notemos que las resistencias verticales están en paralelo, puesto que se encuentran a la misma diferencia de potencial. Así, si llamamos R_1 a la resistencia equivalente, tendremos que:

$$R_1 = \left(\frac{1}{30\,\Omega} + \frac{1}{45\,\Omega}\right)^{-1} = 18\,\Omega$$

Por otra parte, R_1 está en serie con la resistencia de $22\,\Omega$. Si R_2 es la resistencia equivalente, entonces:

$$R_2 = R_1 + 22\,\Omega = 40\,\Omega$$

A su vez, R_2 está en paralelo con la resistencia de $60\,\Omega$. Si R_3 es la resistencia equivalente,

$$R_3 = \left(\frac{1}{60\,\Omega} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} = 24\,\Omega$$

Ahora bien, R_3 está en serie con la resistencia de $6\,\Omega$. Llamando R_4 a la resistencia equivalente,

$$R_4 = 6\,\Omega + R_3 = 30\,\Omega$$

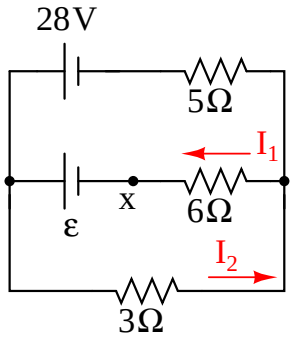
Finalmente, R_4 está en paralelo con la resistencia de $30\,\Omega$. Llamando R_{eq} a la resistencia equivalente, que corresponde a la resistencia equivalente de todo el circuito,

$$R_{eq} = \left(\frac{1}{30\,\Omega} + \frac{1}{R_4}\right)^{-1} = 15\,\Omega$$

Por tanto, por la ley de Ohm,

$$I = \frac{V}{R_{eq}} = 2\,\mathrm{A}$$

Problema 3.6.
En el circuito de la figura, $I_1 = 4\,\mathrm{A}$. Entonces:



a) La corriente que circula por la resistencia de $5\,\Omega$ es de $2\,\mathrm{A}$ hacia la derecha

b) La corriente I_2 es $5\,\mathrm{A}$

c) ε vale $42\,\mathrm{V}$

d) Si el circuito se interrumpe (abre) en el punto x, la corriente que circula por la resistencia de $5\,\Omega$ es $6\,\mathrm{A}$ hacia la derecha

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Sean i_1 e i_2 las corrientes que circulan por las malla superior e inferior, en el sentido anti-horario, respectivamente. La relación con I_1 e I_2 viene dada por:

$$I_1 = i_2 - i_1 \qquad \wedge \qquad I_2 = i_2$$

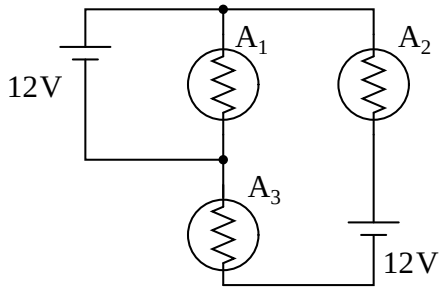
Aplicando las reglas de Kirchhoff, se cumple que:

$$\begin{aligned} 3i_2 + 6(i_2 - i_1) - \varepsilon &= 0 \\ 5i_1 - 28 + \varepsilon + 6(i_1 - i_2) &= 0 \\ i_2 - i_1 &= 4 \end{aligned}$$

Resolviendo,

$$i_1 = 2\,\mathrm{A} \qquad \wedge \qquad i_2 = 6\,\mathrm{A} \qquad \wedge \qquad \varepsilon = 42\,\mathrm{V}$$

Problema 3.7.
Tres ampolletas iguales de 36 W y 12 V, se encuentran conectadas a dos baterías de 12 V según muestra la figura. La potencia total disipada por las TRES ampolletas es:



a) 36 W

b) 54 W

c) 108 W

d) 12 W

e) 24 W

Solución:

Como las ampolletas son de 36 W y 12 V, significa que poseen una resistencia interna igual a:

$$P = \frac{V^2}{R} \quad \longrightarrow \quad R = \frac{V^2}{P} = \frac{144}{36}\,\Omega = 4\,\Omega$$

Sean i_1 e i_2 las corrientes que circulan por la malla con una y dos ampolletas, respectivamente, en sentido anti-horario. Así, aplicando las leyes circuitales:

$$\begin{aligned} 12 + 4(i_1 - i_2) &= 0 \\ 4i_2 + 4(i_2 - i_1) + 4i_2 - 12 &= 0 \end{aligned}$$

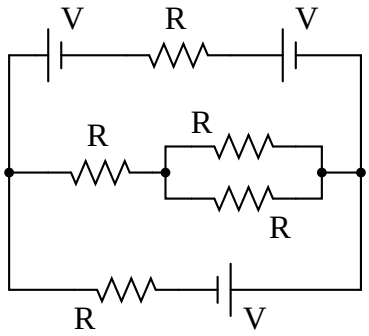
Resolviendo,

$$i_1 = -3\,\text{A} \qquad \wedge \qquad i_2 = 0\,\text{A}$$

Como la corriente i_2 es igual a cero, significa que no circula corriente por esa rama, *i.e.* dichas ampolletas no están encendidas. Como hay una única ampolleta encendida, la potencia disipada es:

$$P_{total} = I^2 R = (-3)^2 \cdot 4\,\text{W} = 36\,\text{W}$$

Problema 3.8.
En el circuito de la figura, la corriente I que circula por la rama del medio está dada por:



a) $I = \dfrac{V}{2R}$

b) $I = \dfrac{V}{4R}$

c) $I = \dfrac{3V}{2R}$

d) $I = \dfrac{2V}{3R}$

e) $I = \dfrac{V}{R}$

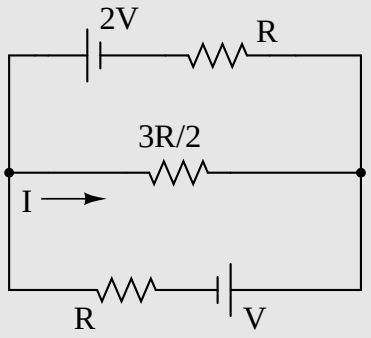
Solución:

Podemos encontrar el circuito equivalente notando que:

- Las resistencias en paralelo, en serie con una tercera resistencia, equivalen a $R_{eq} = \dfrac{3R}{2}$

- Dos fuentes de voltaje en serie generan un voltaje igual a la suma de ellos, $V_{eq} = 2V$

Con ello,



Sea i_1 e i_2 las corrientes que circulan por las mallas superior e inferior, en sentido anti-horario, respectivamente. Así,

$$\begin{aligned} R\,i_1 - 2V + \frac{3R}{2}(i_1 - i_2) &= 0 \\ \frac{3R}{2}(i_2 - i_1) + R\,i_2 - V &= 0 \end{aligned}$$

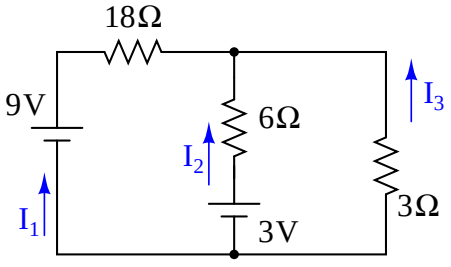
Resolviendo,

$$i_1 = \frac{13V}{8R} \qquad \wedge \qquad i_2 = \frac{11V}{8R}$$

Como $I = i_1 - i_2$, finalmente:

$$I = i_1 - i_2 = \frac{13V}{8R} - \frac{11V}{8R} = \frac{V}{4R}$$

Problema 3.9.
Considere el circuito de la figura,



La corriente I_1 está dada por:

a) $I_1 = 0.2\,\mathrm{A}$

b) $I_1 = 0.6\,\text{A}$

c) $I_1 = 0.4\,\text{A}$

d) $I_1 = 0.3\,\text{A}$

e) $I_1 = 0.5\,\text{A}$

Solución:

Sean i_1 e i_2 las corrientes que circulan, en sentido anti-horario, por las mallas izquierda y derecha respectivamente. Aplicando la ley de mallas,

$$\begin{aligned} 6(i_1 - i_2) + 18i_1 + 9 - 3 &= 0 \\ 3i_2 + 6(i_2 - i_1) + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo,

$$i_1 = -0.4\,\text{A} \qquad \wedge \qquad \text{i}_2 = -0.6\,\text{A}$$

Como $I_1 = -i_1$, entonces:

$$I_1 = 0.4\,\text{A}$$

Problema 3.10.
Para el circuito del Problema 3.9, el valor de I_2 es:

a) $I_2 = 0.2\,\text{A}$

b) $I_2 = 0.6\,\text{A}$

c) $I_2 = 0.4\,\text{A}$

d) $I_2 = 0.3\,\text{A}$

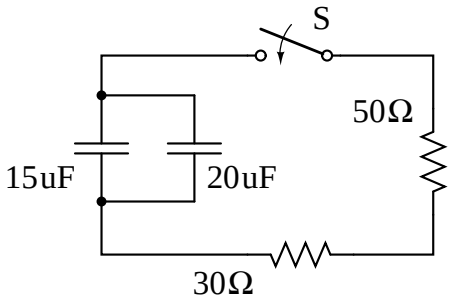
e) $I_2 = 0.5\,\text{A}$

Solución:

Como $I_2 = i_1 - i_2$, entonces:

$$I_2 = 0.2\,\text{A}$$

Problema 3.11.
En el circuito de la figura, los dos condensadores se cargan inicialmente con 45 V. Después de cerrar el interruptor S, el tiempo que tarda en reducirse el potencial en ambos condensadores a 10 V es:



a) 5.3 ms

b) 4.2 ms

c) 7.1 ms

d) 2.3 ms

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

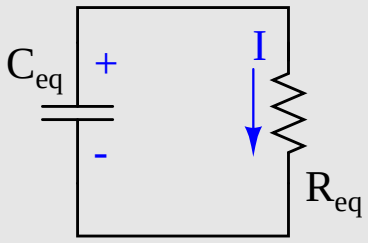
La capacitancia equivalente entre los condensadores en paralelo es:

$$C_{eq} = 15\,\mu\text{F} + 20\,\mu\text{F} = 35\,\mu\text{F}$$

Por otra parte, la resistencia equivalente entre las resistencias en serie es:

$$R_{eq} = 30\,\Omega + 50\,\Omega = 80\,\Omega$$

Consideremos la siguiente situación:



Aplicando ley de mallas,

$$\begin{aligned} IR_{eq} - V_C &= 0 \\ IR_{eq} - \frac{Q}{C_{eq}} &= 0 \quad \Big/ \frac{d}{dt} \\ \dot{I}R_{eq} - \frac{\dot{Q}}{C_{eq}} &= 0 \end{aligned}$$

Como el condensador se está descargando, $-\dot{Q} = I$, por lo que la ecuación diferencial que debemos resolver es:

$$\dot{I} + \frac{I}{R_{eq}C_{eq}} = 0$$

cuya solución es:

$$I(t) = I_0\, e^{-t/\tau}\ , \quad \tau = R_{eq}C_{eq} = 2.8\,\text{ms}$$

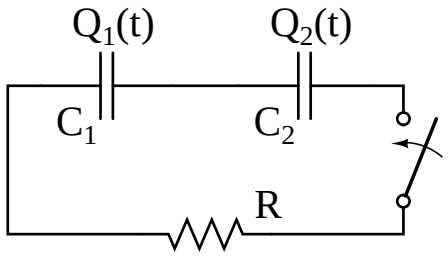
El voltaje en la resistencia equivalente es, por tanto,

$$V_R(t) = R_{eq}I(t) = R_{eq}I_0\, e^{-t/\tau} = V_0\, e^{-t/\tau}$$

con $V_0 = R_{eq}I_0 = 45\,\text{V}$, pues el voltaje inicial del condensador corresponde al voltaje en ambas resistencias. Cuando el voltaje en los condensadores sea de 10 V, el mismo valor se tendrá en la resistencia equivalente, por lo que:

$$10 = 45\, e^{-t/\tau} \quad \longrightarrow \quad t = \tau \ln\left(\frac{45}{10}\right) = 4.2\,\text{ms}$$

Problema 3.12.
Se tienen dos condensadores C_1 y C_2 con cargas iniciales $Q_1(0) = Q$ y $Q_2(0) = 0$. Los condensadores están conectados a una resistencia R como indica la figura. En el instante $t = 0$ se cierra el circuito. Suponga que $C_1 = C_2 = C$. La carga de C_2, $Q_2(t)$, satisface la ecuación diferencial:



a) $\dfrac{dQ_2}{dt} = \dfrac{Q - Q_2}{RC}$

b) $\dfrac{dQ_2}{dt} = \dfrac{Q + 2Q_2}{RC}$

c) $\dfrac{dQ_2}{dt} = \dfrac{Q + Q_2}{RC}$

d) $\dfrac{dQ_2}{dt} = \dfrac{Q - 2Q_2}{RC}$

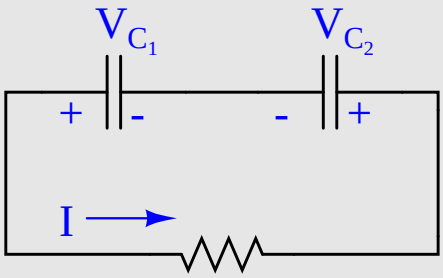
e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Antes que todo, por conservación de la carga eléctrica, se cumple que:

$$Q_1(t) + Q_2(t) = Q \ , \quad \forall t$$

Consideremos el siguiente esquema, donde hemos dado un sentido a la corriente:



Aplicando la ley de mallas,

$$IR + V_{C_2} - V_{C_1} = 0$$

donde los signos $\pm$ en los voltajes de los condensadores dependen del sentido de la corriente, dado que esta siempre circula de un potencial positivo a otro negativo. Reemplazando,

$$\begin{aligned} IR + \frac{Q_2}{C} - \frac{Q_1}{C} &= 0 \\ IR + \frac{Q_2 - Q_1}{C} &= 0 \\ IR + \frac{2Q_2 - Q}{C} &= 0 \\ I &= \frac{Q - 2Q_2}{RC} \end{aligned}$$

Ahora, como el condensador C_2 se está cargando (puesto que la corriente está entrando), entonces $I = \dot{Q}_2$, por lo que:

$$\frac{dQ_2}{dt} = \frac{Q - 2Q_2}{RC}$$

Problema 3.13.
Para la configuración del Problema 3.12, la carga $Q_2(t)$ en función del tiempo es:

a) $Q_2(t) = Q\left(1 - e^{-t/RC}\right)$

b) $Q_2(t) = Q\left(1 - e^{-2t/RC}\right)$

c) $Q_2(t) = \frac{Q}{2}\left(1 - e^{-2t/RC}\right)$

d) $Q_2(t) = \dfrac{Q}{2}\left(1 - e^{-t/RC}\right)$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Del resultado del problema anterior,

$$\begin{aligned} \frac{dQ_2}{dt} &= \frac{Q - 2Q_2}{RC} \\ \frac{dQ_2}{Q - 2Q_2} &= \frac{dt}{RC} \quad \Big/ \int \\ -\frac{1}{2}\ln\left(Q - 2Q_2\right) &= \frac{t}{RC} + \alpha \\ Q - 2Q_2 &= \beta\, e^{-2t/RC} \end{aligned}$$

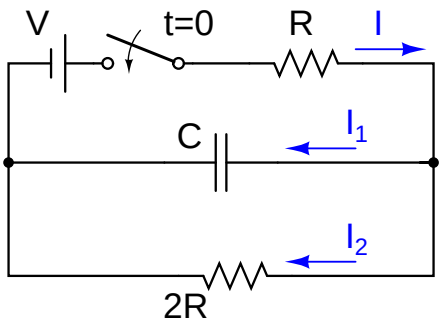
Como inicialmente $Q_2(0) = 0$,

$$Q - 2Q_2(0) = \beta \quad \longrightarrow \quad \beta = Q$$

Luego,

$$Q_2(t) = \frac{Q}{2}\left(1 - e^{-2t/RC}\right)$$

Problema 3.14.
Considere el circuito de la figura, el cual cuenta con dos resistencias (R y $2R$) y un condensador de capacitancia C inicialmente descargado.



La corriente a través de la batería inmediatamente después de cerrar el interruptor, I_0, es:

a) $I_0 = \dfrac{V}{R}$

b) $I_0 = \dfrac{V}{3R}$

c) $I_0 = \dfrac{3V}{2R}$

d) $I_0 = \dfrac{2V}{3R}$

e) Ninguna de las otras alternativas

Solución:

Como el condensador estaba inicialmente descargado, el condensador se comporta como un corto-circuito (cable sin resistencia), así que toda la corriente circula por dicha ruta, y nada por la rama inferior. Así, la corriente es:

$$I_0 = \frac{V}{R}$$

Problema 3.15.
Considere el circuito del Problema 3.14. La corriente a través de la batería después de un tiempo MUY largo, I_∞, es:

a) $I_\infty = \dfrac{V}{R}$

b) $I_\infty = \dfrac{3V}{2R}$

c) $I_\infty = \dfrac{3V}{R}$

d) $I_\infty = \dfrac{2V}{3R}$

e) Ninguna de las otras alternativas

Solución:

Después de un tiempo MUY largo, el condensador está totalmente cargado y ya no circula corriente por esa rama. Así, la corriente sería

$$I_\infty = \frac{V}{3R}$$

Problema 3.16.
Considere el circuito del Problema 3.14. La corriente en función del tiempo que pasa por el condensador, $I_C(t)$, es:

a) $I_C(t) = \dfrac{V}{2R}\, e^{-3t/(4RC)}$

b) $I_C(t) = \dfrac{V}{R}\, e^{-3t/(4RC)}$

c) $I_C(t) = \dfrac{V}{R}\, e^{-3t/(2RC)}$

d) $I_C(t) = \dfrac{2V}{3R}\, e^{-2t/(3RC)}$

e) $I_C(t) = \dfrac{V}{2R}\, e^{-4t/(3RC)}$

Solución:

Las ecuaciones del circuito son:

$$\begin{aligned} IR + V_C - V &= 0 \\ 2I_2R - V_C &= 0 \\ I_1 + I_2 &= I \end{aligned}$$

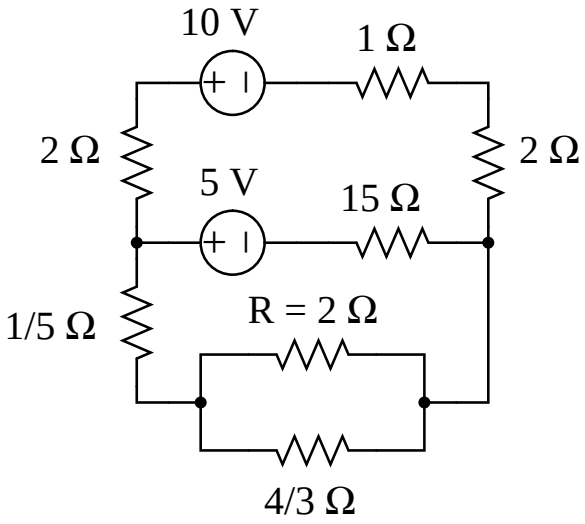
Como el condensador se está cargando (la corriente I_1 entra en el condensador), entonces $I_1 = \dfrac{dQ}{dt}$ y con ello:

$$\begin{aligned} -V + R(I_1 + I_2) + \frac{Q}{C} &= 0 \\ -V + RI_1 + \frac{Q}{2C} + \frac{Q}{C} &= 0 \\ -V + RI_1 + \frac{3Q}{2C} &= 0 \qquad \Big/ \frac{d}{dt} \\ \dot{I}_1 + \frac{3}{2RC} I_1 &= 0 \end{aligned}$$

con $I_1(0) = \dfrac{V}{R}$ como condición inicial. Resolviendo,

$$I_1(t) = I_C(t) = \frac{V}{R}\, e^{-t/\tau}\ , \quad \tau = \frac{2RC}{3}$$

Problema 3.17.
Para el siguiente circuito, calcule la potencia disipada en la resistencia R:



a) $P = 0.957\,\mathrm{W}$

b) $P = 1.500\,\mathrm{W}$

c) $P = 2.000\,\mathrm{W}$

d) $P = 1.086\,\mathrm{W}$

e) $P = 0.840\,\mathrm{W}$

Solución:

Definimos R_{eq} como la resistencia equivalente entre R y $4/3\,\Omega$:

$$R_{eq} = \left(\frac{1}{2\,\Omega} + \frac{3}{4\,\Omega}\right)^{-1} = \frac{4}{5}\,\Omega$$

Sean I_u e I_d las corrientes de las mallas superior e inferior (considerando la resistencia equivalente), respectivamente, circulando a favor de las agujas del reloj. Así,

$$\begin{aligned} 2I_u + 10 + I_u + 2I_u + 15(I_u - I_d) - 5 &= 0 \\ \therefore\ 4I_u - 3I_d &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{5}I_d + \frac{1}{5}I_d + 5 + 15(I_d - I_u) &= 0 \\ \therefore\ 16I_d - 15I_u &= -5 \end{aligned}$$

Escribiendo el sistema anterior de forma matricial,

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -15 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_u \\ I_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Por tanto, y dado que solo nos interesa I_d, utilizamos la regla de Cramer:

$$I_d = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -15 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -15 & 16 \end{vmatrix}} = -\frac{35}{19}\,\mathrm{A}$$

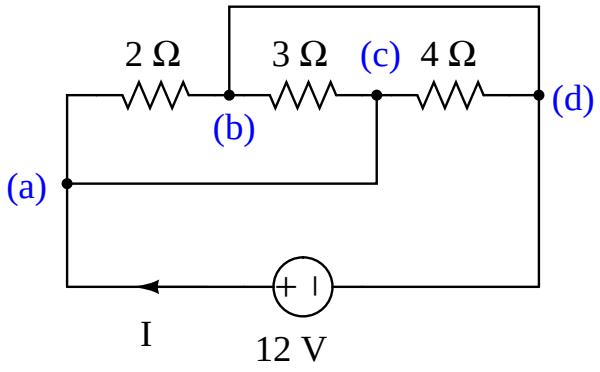
y la corriente I_d circula, en realidad, en contra de las agujas del reloj. La diferencia de potencial V_R en la resistencia R es la misma que la diferencia de potencial en la resistencia equivalente R_{eq}:

$$V_R = \left(\frac{35}{19}\,\text{A}\right)\left(\frac{4}{5}\,\Omega\right) = \frac{28}{19}\,\text{V}$$

Finalmente,

$$P_R = \frac{{V_R}^2}{R} = \frac{(28/19)^2}{2}\,\text{W} = \frac{392}{361}\,\text{W} \approx 1.086\,\text{W}$$

Problema 3.18.
Determine la corriente I del siguiente circuito:



a) $I = 0.9\,\text{A}$

b) $I = 12\,\text{A}$

c) $I = 13\,\text{A}$

d) $I = 1.1\,\text{A}$

e) $I = 1.0\,\text{A}$

Solución:

Notemos que $V_a = V_c$ y $V_b = V_d$. Así, la diferencia de voltaje en cada resistencia es:

$$\begin{aligned} V_{2\,\Omega} &= |V_b - V_a| = |V_b - V_c| = V_{3\,\Omega} \\ &= |V_d - V_c| = V_{4\,\Omega} \end{aligned}$$

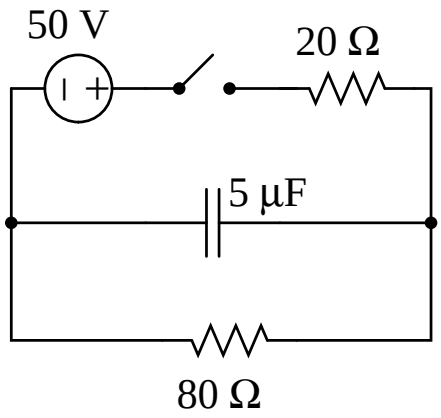
por lo que las tres resistencias están en paralelo. Sea R la resistencia equivalente entre las tres. Por tanto,

$$R = \left(\frac{1}{2\,\Omega} + \frac{1}{3\,\Omega} + \frac{1}{4\,\Omega}\right)^{-1} = \frac{12}{13}\,\Omega$$

Finalmente, por la ley de Ohm,

$$I = \frac{V}{R} = \frac{12}{12/13}\,\text{A} = 13\,\text{A}$$

Problema 3.19.
El siguiente circuito tiene el capacitor inicialmente descargado. En $t = 0$, el interruptor se cierra. ¿Cuál es la corriente que atraviesa la batería inmediatamente después de cerrar el interruptor (I_0) y después de que el interruptor ha estado cerrado un largo tiempo (I_∞)?



a) $I_0 = 2.5\,\text{A}$, $I_\infty = 0.5\,\text{A}$

b) $I_0 = 0.5\,\text{A}$, $I_\infty = 0.625\,\text{A}$

c) $I_0 = 0\,\text{A}$, $I_\infty = 0.5\,\text{A}$

d) $I_0 = 0.5\,\text{A}$, $I_\infty = 2.5\,\text{A}$

e) $I_0 = 2.5\,\text{A}$, $I_\infty = 0\,\text{A}$

Solución:

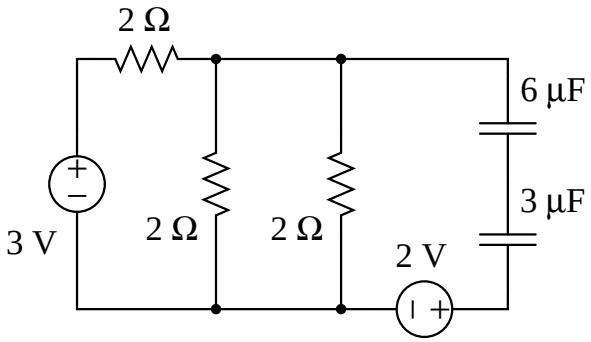
Inicialmente el capacitor está descargado, por lo que no hay caída de potencial en él, y la corriente a través de la resistencia de $80\,\Omega$ es cero. Por tanto,

$$I_0 = \frac{50\,\text{V}}{20\,\Omega} = 2.5\,\text{A}$$

Después de un tiempo muy largo, el capacitor está totalmente cargado y no hay corriente a través de él. En este caso,

$$I_\infty = \frac{50\,\text{V}}{20\,\Omega + 80\,\Omega} = 0.5\,\text{A}$$

Problema 3.20.
Considere el siguiente circuito, donde los capacitores están totalmente cargados. ¿Cuál es la energía almacenada en el capacitor de 3 µF?



a) $0.52 \times 10^{-6}\,\mathrm{J}$

b) $0.67 \times 10^{-6}\,\mathrm{J}$

c) $0.55 \times 10^{-3}\,\mathrm{J}$

d) $0.65 \times 10^{-3}\,\mathrm{J}$

e) $0.61 \times 10^{-3}\,\mathrm{J}$

Solución:

Como los condensadores están totalmente cargados, no circula corriente por ellos. Así, es fácil ver que la corriente que circula por la fuente de voltaje es:

$$I = \frac{3\,\mathrm{V}}{2\,\Omega + (2\,\Omega \parallel 2\,\Omega)} = 1\,\mathrm{A}$$

Así, la diferencia de potencial entre las resistencias de $2\,\Omega$ es:

$$V_{2\,\Omega} = IR_{paralelo} = (1\,\mathrm{A})(1\,\Omega) = 1\,\mathrm{V}$$

Aplicando ley de mallas a la malla con los condensadores,

$$V_{2\,\Omega} = 1\,\mathrm{V} = 2\,\mathrm{V} - V_{6\,\mu\mathrm{F}} - V_{3\,\mu\mathrm{F}}$$

donde hemos colocado un signo menos a los voltajes en los condensadores pues el voltaje resultante (1 V) es menor que el voltaje suministrado por la fuente (2 V). Ahora, como los condensadores están en serie,

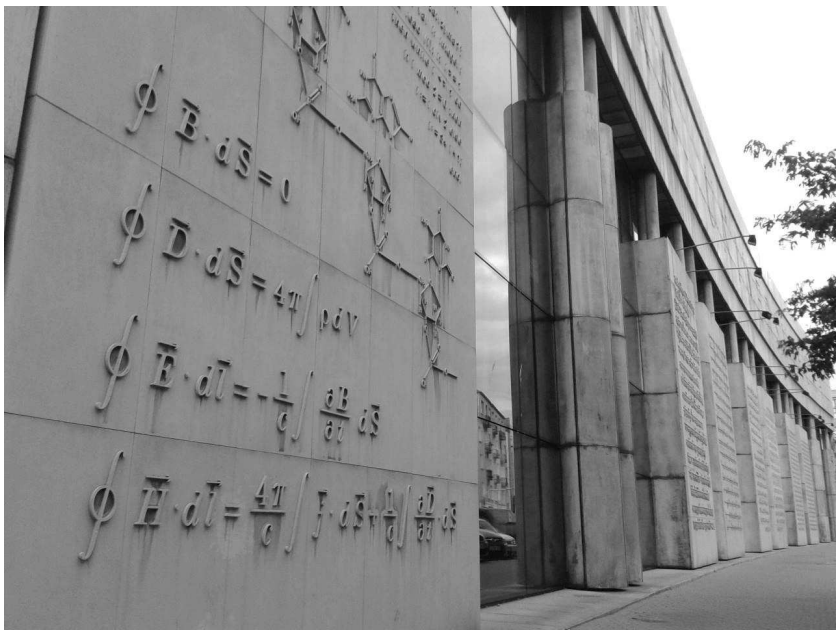
$$V_{6\,\mu\mathrm{F}} = \frac{Q}{6\,\mu\mathrm{F}} \qquad \wedge \qquad V_{3\,\mu\mathrm{F}} = \frac{Q}{3\,\mu\mathrm{F}}$$

Despejando, obtenemos que $Q = 2\,\mu\mathrm{C}$. Así, la energía almacenada en el condensador solicitado es:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(2 \times 10^{-6})^2}{2(3 \times 10^{-6})}\,\mathrm{J} = \frac{2}{3} \times 10^{-6}\,\mathrm{J} \approx 0.67 \times 10^{-6}\,\mathrm{J}$$

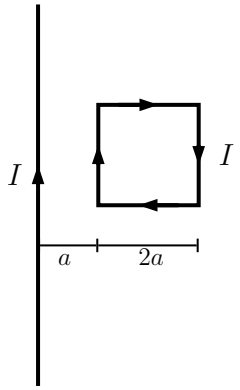
4

Magnetostática



Ecuaciones de Maxwell en uno de los muros exteriores de la Universidad de Varsovia

Problema 4.1.
Se tiene una espira cuadrada, de lado $2a$, por la cual fluye una corriente I. A una distancia a de la espira se encuentra un alambre MUY largo por el que fluye también una corriente I (ver figura). Entonces, la magnitud de la fuerza que la espira ejerce sobre el alambre es:



a) $\dfrac{\mu_0 I^2}{3\pi}$

b) $\dfrac{2\mu_0 I^2}{3\pi}$

c) $\dfrac{\mu_0 I^2}{2\pi}$

d) $\dfrac{3\mu_0 I^2}{2\pi}$

e) Ninguna de las otras alternativas

Solución:

Es más fácil calcular la fuerza que el alambre ejerce sobre la espira, que es igual en módulo (pero de dirección opuesta) a la fuerza pedida. Por la ley de Ampère, el campo magnético generado por un cable infinitamente largo es:

$$\vec{B}_{alambre} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Para fijar un sistema de coordenadas, supongamos que el alambre yace en el eje Y, la espira cuadrada pertenece al plano XY, y el origen O como la proyección del lado de la espira más bajo sobre el alambre. Ahora bien, la fuerza que el alambre ejerce sobre los lados perpendiculares de la espira (superior e inferior) se anulan entre sí, ya que la distancia es igual y las corrientes que circulan por ellos de sentido opuesto. La fuerza sobre el lado más cercano al cable es:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= I\int_0^{2a} d\vec{\ell}\times\vec{B} \\
&= I\int_0^{2a} dy\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}\times -\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\,\hat{\boldsymbol{k}} \\
&= -\frac{\mu_0 I^2}{\pi}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}
\end{aligned}$$

y la fuerza es atractiva. La fuerza sobre el lado más lejano viene dada por:

$$\begin{aligned}\vec{F}_2 &= I\int_0^{2a} d\vec{\ell}\times\vec{B}\\ &= I\int_0^{2a} -dy\,\hat{\boldsymbol{j}}\times-\frac{\mu_0 I}{6\pi a}\,\hat{\boldsymbol{k}}\\ &= \frac{\mu_0 I^2}{3\pi}\,\hat{\boldsymbol{i}}\end{aligned}$$

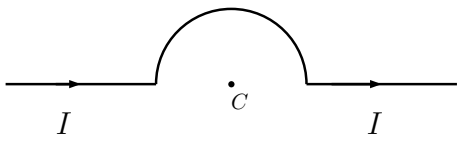
y resulta ser repulsiva. Así, la fuerza total es:

$$\vec{F}_{total} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\frac{2\mu_0 I^2}{3\pi}\,\hat{\boldsymbol{i}}$$

con módulo

$$F = \|\vec{F}\| = \frac{2\mu_0 I^2}{3\pi}$$

Problema 4.2.
En el alambre de la figura, el radio de la semi circunferencia es r, y las dos ramas rectas se extienden hasta el infinito. Por el alambre circula una corriente I. En tal caso, el módulo y dirección del campo magnético en el centro C es:



a) $\frac{\mu_0 I}{4r}$ entrando en el papel

b) $\frac{\mu_0 I}{4\pi r}$ entrando en el papel

c) $\frac{\mu_0 I}{2r}$ entrando en el papel

d) $\frac{\mu_0 I}{4\pi r}$ saliendo del papel

e) $\frac{\mu_0 I}{2r}$ saliendo del papel

Solución:

Recordemos la fórmula de Biot-Savart para el cálculo de campo magnético:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I\; d\vec{R}\times(\vec{r}-\vec{R})}{\|\vec{r}-\vec{R}\|^3}$$

En este caso, $\vec{r} = \vec{0}$ tomando un sistema de coordenadas conveniente en el que el origen está en C y el eje Z sale del papel. En el caso de las porciones rectas, los vectores $d\vec{R}$ y $\vec{R}$ son paralelos, pues es una recta, y por tanto el producto cruz se anula. Así, dichas porciones no crean campo magnético en C. Por otra parte, para el caso del segmento semicircular,

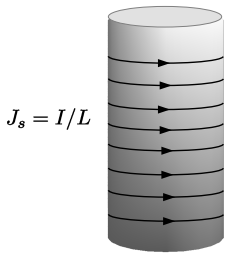
$$\vec{R} = r\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\ , \quad d\vec{R} = r\ d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\ , \quad \|\vec{r} - \vec{R}\|^3 = r^3$$

Reemplazando,

$$\vec{B}(C) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{\pi} \frac{-Ir\ d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \times (-r\,\hat{\boldsymbol{\rho}})}{r^3} = -\frac{\mu_0 I}{4r}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

y el campo entra al papel.

Problema 4.3.
Por la superficie de un cascarón cilíndrico de largo L y radio $R \ll L$ circula una corriente de densidad lineal J_s, como se muestra en la figura. El campo magnético en el eje del cilindro es:



a) $\mu_0 J_s/L$

b) $\mu_0 J_s/2$

c) $\mu_0 J_s L$

d) $\mu_0 J_s$

e) $\pi R^2 \mu_0 J_s/L$

Solución:

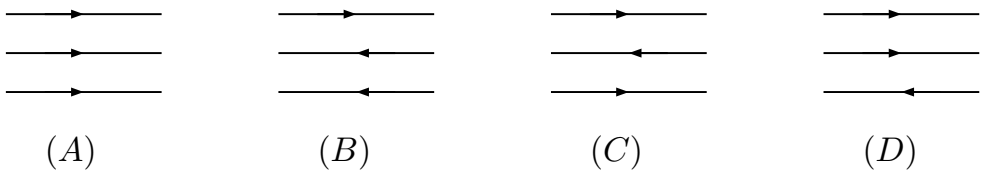
Como $R \ll L$, el campo afuera se puede considerar nulo. Aplicamos la ley de Ampère sobre un circuito rectangular, con un lado adentro (en el eje, donde queremos calcular el campo) y el otro lado afuera (en un punto $r > R$) donde el campo es cero. El alto del circuito rectangular es h. Así,

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{r} = B(0)h - B(r)h = \mu_0 I_{encerrado} = \mu_0 J_s h$$

Por tanto, la respuesta correcta es:

$$B(0) = \mu_0 J_s$$

Problema 4.4.
Tres alambres rectos están dispuestos en forma paralela como se muestra en la figura. Los alambres están separados una distancia d uno de otro, y por los tres circula la misma corriente I. Los alambres están limitados a moverse en el plano. El del centro se encuentra en equilibrio estable si las corrientes tienen el siguiente sentido:



(A) (B) (C) (D)

a) Caso (A)

b) Caso (B)

c) Caso (C)

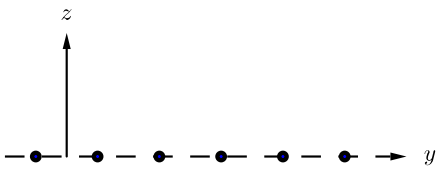
d) Caso (D)

e) Nunca se encuentra en equilibrio

Solución:

Si se permite movimiento en tres dimensiones, los cables nunca están en equilibrio estable. Si se encuentran obligados a moverse en el plano, hay una posición de equilibrio estable para el alambre del medio. Se encuentra en equilibrio si al desplazarse hacia un lado la fuerza neta lo hace volver a su posición original. La situación de equilibrio estable es el Caso (C), puesto que ambos alambres repelen al del medio; si se acerca a un cable, este lo repele con más intensidad que el que está más lejos y lo devuelve a su posición.

Problema 4.5.
Considere un conductor plano, de espesor despreciable, ubicado en el plano XY. Por este plano circula una densidad de corriente lineal $J_0\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$ como se muestra en la figura. El campo magnético en la región $z > 0$ es:



Eje X sale del plano

a) $-(\mu_0 J_0/2)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$

b) $+(\mu_0 J_0/2)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$

c) $-\mu_0 J_0\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$

d) $+\mu_0 J_0\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$

e) $-2\mu_0 J_0\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$

Solución:

Elegimos aplicar la ley de Ampère al circuito rectangular con un borde fuera, el otro adentro y dimensiones L, h recorrido anti-horario. Por simetría, el campo es igual en módulo en los dos lados paralelos que se encuentran equidistantes del plano. Entonces, como el campo magnético apunta en la misma dirección que ambos segmentos paralelos, nos queda:

$$2BL = \mu_0 J_0 L$$

y, por tanto, la alternativa correcta es:

$$\vec{B} = -(\mu_0 J_0/2)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

donde el signo y la dirección provienen de la regla de la mano derecha.

Problema 4.6.
Considere un cilindro sólido, de radio a y MUY largo, por el cual circula una densidad de corriente con simetría cilíndrica $\vec{J}(r) = (1 - r^2/a^2)J_0\,\hat{\boldsymbol{k}}$ paralela al eje Z. El módulo del campo magnético en $r > a$ es:

a) $\dfrac{\mu_0 a^2 J_0}{2r}$

b) $\dfrac{\mu_0 a^2 J_0}{4r}$

c) $0\,\mathrm{T}$

d) $\dfrac{\mu_0 a^2 J_0}{2}$

e) $\dfrac{\mu_0 r^2 J_0}{4a}$

Solución:

Por simetría, el campo es de la forma $\vec{B}(\vec{r}) = B(r)\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Usando la ley de Ampère, para un circuito

en forma de circunferencia de radio $r > a$ en el exterior, encontramos:

$$\begin{aligned}
\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} &= \mu_0 I_{enc} \\
2\pi r B(r) &= \mu_0 \iint \vec{J} \cdot \hat{n}\, dS \\
&= \mu_0 J_0 \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r\, dr\, d\theta \\
&= \frac{\mu_0 J_0 \pi a^2}{2}
\end{aligned}$$

Con ello, el campo tiene magnitud:

$$B(r > a) = \frac{\mu_0 a^2 J_0}{4r}$$

Problema 4.7.
En la misma situación del Problema 4.6, el campo magnético en $r < a$ tiene magnitud:

a) $\frac{\mu_0 J_0 r}{2}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$

b) $\frac{\mu_0 J_0 r}{2}$

c) $\frac{\mu_0 J_0 r}{2}\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)$

d) $\frac{\mu_0 J_0 r}{2}\left(1 + \frac{r^2}{2a^2}\right)$

e) $\frac{\mu_0 J_0 r}{2}\left(1 - \frac{r^2}{2a^2}\right)$

Solución:

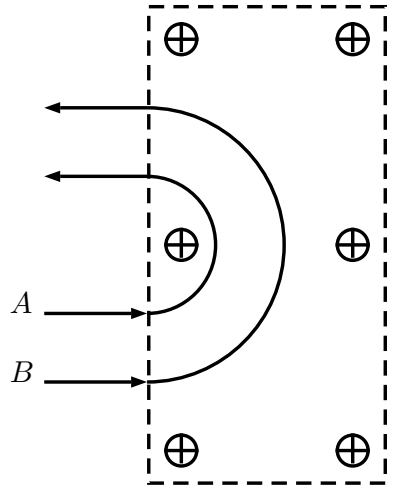
De la misma forma que en el Problema 4.6,

$$2\pi r B(r) = \mu_0 J_0 \int_0^{2\pi} \int_0^r \left(1 - \frac{r'^2}{a^2}\right) r'\, dr'\, d\theta = \pi \mu_0 J_0 r^2 \left(1 - \frac{r^2}{2a^2}\right)$$

Así,

$$B(r < a) = \frac{\mu_0 J_0 r}{2}\left(1 - \frac{r^2}{2a^2}\right)$$

Problema 4.8.
Dos protones entran con velocidades de distinta magnitud a una zona con campo magnético uniforme, como muestra la figura.



¿Qué protón es el más veloz?

a) A es más veloz que B

b) B es más veloz que A

c) A y B son igualmente veloces

d) No se puede decidir porque A y B cambian su rapidez en el campo magnético

e) No se puede decidir porque lo observado no tiene que ver con rapidez

Solución:

Como la fuerza es radial, podemos afirmar que:

$$|q|vB = \frac{mv^2}{r} \quad \longrightarrow \quad v = \frac{|q|rB}{m}$$

y, a igual masa y carga eléctrica, la partícula con mayor radio de giro es la que va más rápido, que en este caso corresponde al protón B.

Problema 4.9.
En el experimento de Problema 4.8, si ambos protones entran a la zona con campo magnético al mismo tiempo, ¿cuál va a salir de esta zona primero?

a) A sale primero

b) B sale primero

c) Ni A ni B salen porque hacen vueltas circulares

d) A y B salen al mismo tiempo

e) No se puede decidir

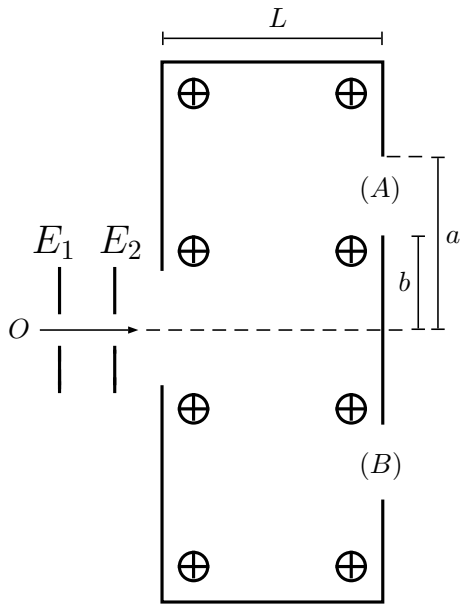
Solución:

Como la rapidez angular satisface $v = \omega r$, entonces:

$$\omega = \frac{|q|B}{m}$$

Así, ambos protones poseen la misma rapidez angular. Como el periodo T (tiempo que le toma dar una vuelta) es igual a $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, ambos protones poseen el mismo periodo. Finalmente, y dado que la trayectoria involucra medio ciclo, ambos protones demoran $T/2$ en salir de la zona, y lo hacen al mismo tiempo.

Problema 4.10.
Un portador de carga está siendo acelerado desde el reposo, en la posición O, por dos electrodos E_1 y E_2 con un voltaje (diferencia de potencial) U. Después, entra a una zona con campo magnético uniforme $\vec{B}$ (ver figura). Hay dos aperturas simétricas A y B.



Si el portador de carga es un electrón, ¿qué polaridad deben tener los electrodos? ¿por cuál apertura puede salir el electrón?

a) E_1 negativo, E_2 positivo, salida por apertura B

b) E_1 positivo, E_2 negativo, salida por apertura B

c) E_1 positivo, E_2 negativo, salida por apertura A

d) E_1 negativo, E_2 positivo, salida por apertura A

e) No puede salir

Solución:

Elijamos el sistema de coordenadas de modo que el plano del papel coincida con el plano XY, con el eje Z saliendo del papel. La velocidad inicial es $v_0\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$ y el campo magnético es $-B\,\hat{\boldsymbol{k}}$. Por lo tanto, un carga negativa siente una fuerza dirigida en dirección $-\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ y se curva hacia abajo, saliendo por B. Por otro lado los electrodos E_1 y E_2 tienen que acelerar la carga. Como se trata de una carga negativa, que se mueve de potencial bajo hacia potencial alto, E_2 tiene que ser el electrodo positivo.

Problema 4.11.
Considerando la configuración del Problema 4.10, si el portador de carga es un protón, ¿en qué rango de voltaje U el protón pasa por una de las aperturas, A o B?

a) $\dfrac{B^2qb^2}{8m} < U < \dfrac{B^2qa^2}{8m}$

b) $\dfrac{B^2q}{2m}\left(\dfrac{L^2}{2a}\right)^2 < U < \dfrac{B^2q}{2m}\left(\dfrac{L^2}{2b}\right)^2$

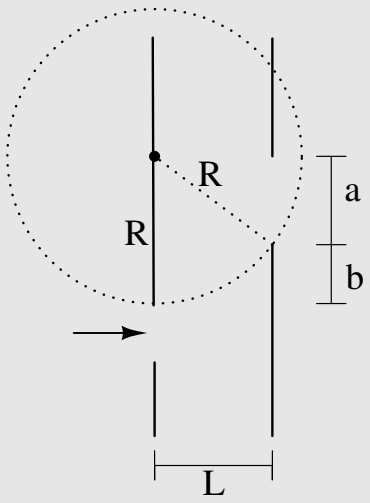
c) $\dfrac{B^2q}{2m}\left(\dfrac{b^2+L^2}{2L}\right)^2 < U < \dfrac{B^2q}{2m}\left(\dfrac{a^2+L^2}{2L}\right)^2$

d) $\dfrac{B^2q}{2m}\left(\dfrac{a^2+L^2}{2a}\right)^2 < U < \dfrac{B^2q}{2m}\left(\dfrac{b^2+L^2}{2b}\right)^2$

e) $\dfrac{B^2q}{2m}\left(\dfrac{ab+L^2}{2a}\right)^2 < U < \dfrac{B^2q}{2m}\left(\dfrac{ab+L^2}{2b}\right)^2$

Solución:

En la siguiente figura dibujamos la trayectoria circular de una carga que sale por la parte inferior de la apertura A. Esta es la trayectoria más veloz que sale por A, ya que si va más rápido, se curva menos y choca con la pared:



Como sabemos, la carga describe un círculo que satisface:

$$\frac{mv^2}{R} = qvB$$

y su energía cinética es producto de la aceleración que le da el voltaje U, es decir:

$$\frac{mv^2}{2} = qU$$

Si eliminamos v de estas dos ecuaciones, tenemos:

$$U = \left(\frac{qB^2}{2m}\right) R^2$$

De la figura se ve que:

$$R^2 = L^2 + (R-b)^2 \quad \longrightarrow \quad R = \frac{L^2+b^2}{2b}$$

Reemplazando este radio en la fórmula anterior, se obtiene que:

$$U = \frac{qB^2}{2m}\left(\frac{L^2+b^2}{2b}\right)^2$$

Esta es la trayectoria de máxima velocidad, y por lo tanto corresponde al voltaje máximo. La trayectoria que sale por el extremo superior de la apertura A es la que sale a menor velocidad, y el desarrollo algebraico es idéntico, intercambiando $a \leftrightarrow b$. Así, la alternativa correcta es:

$$\frac{B^2q}{2m}\left(\frac{a^2+L^2}{2a}\right)^2 < U < \frac{B^2q}{2m}\left(\frac{b^2+L^2}{2b}\right)^2$$

Problema 4.12.
Un electrón (carga $q = -e$) pasa dentro de una zona con campo magnético uniforme $\vec{B}$, describiendo una trayectoria en forma de arco y con distancia recorrida L. ¿Cuánto aumenta su energía cinética?

a) 0 J

b) $+eBL$

c) $-eBL$

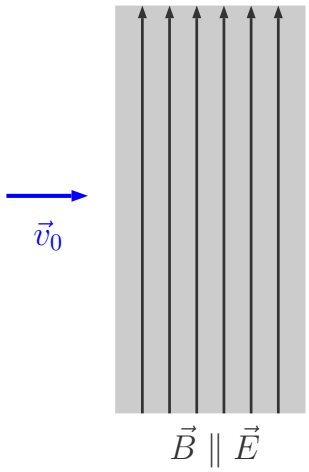
d) $+eBL/2$

e) $-\dfrac{eBL}{\sqrt{2}}$

Solución:

El movimiento en un campo magnético no cambia la energía cinética de una carga, solo la dirección de su movimiento.

Problema 4.13.
Un portador de carga q y masa m entra a una zona con campo magnético B y campo eléctrico E paralelos e uniformes, y después sale de ella (ver figura). La velocidad inicial es ortogonal a los campos. ¿Cuánto cambia la energía cinética del electrón en este recorrido?



a) 0 J

b) $-\dfrac{m}{2}\left(\pi\dfrac{E}{B}\right)^2$

c) $+\dfrac{m}{2}\left(\pi\dfrac{E}{B}\right)^2$

d) $+2m\left(\pi\dfrac{E}{B}\right)^2$

e) $-2m\left(\pi\dfrac{E}{B}\right)^2$

Solución:

Elijamos el sistema de coordenadas de modo que el plano del papel sea el plano XY con el eje Z saliendo del papel. Al entrar a la región con campos no nulos, la partícula va a girar en el plano XZ y acelerar en la dirección $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$. La componente vertical de la velocidad será, entonces,

$$v_y(t) = \frac{qE}{m}\,t$$

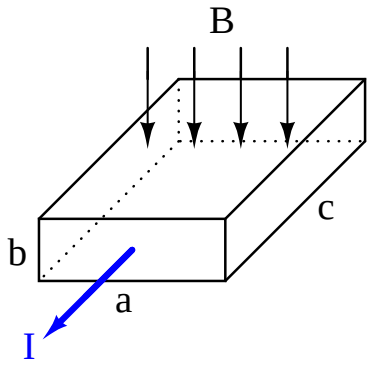
ya que inicialmente no tiene velocidad según $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$. El vector que agrupa las componentes $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ y $\hat{\boldsymbol{k}}$ de la velocidad, (v_x, v_z), no cambia de módulo porque el campo magnético no hace trabajo. Sale de la región una vez que ha realizado un semicírculo en el plano XZ. El tiempo que demora es $T/2$, donde T es el periodo del movimiento circular. Como $T = 2\pi/\omega$, y $\omega = qB/m$, la velocidad vertical al momento de salir es:

$$v_y(T/2) = \frac{qE}{m}\frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi E}{B}$$

La energí a cinética aumenta $\dfrac{m{v_y}^2}{2}$, por lo que la respuesta correcta es:

$$+\frac{m}{2}\left(\pi\frac{E}{B}\right)^2$$

Problema 4.14.
El Sodio, en particular, es un conductor donde la teoría clásica del efecto Hall nos da resultados aproximadamente correctos. Considere un segmento conductor de sodio de espesor $b = 1\,\text{mm}$ y anchura $a = 2\,\text{mm}$, como se muestra en la figura. El conductor porta una corriente constante de $I = -1\,\text{A}$ y está colocado en un campo magnético uniforme de $B = 1\,\text{T}$ perpendicular al plano $a - c$. En consecuencia, se produce un voltaje Hall de $-0.25\,\mu\text{V}$. Determine la concentración de los electrones libres en el sodio, recordando que $e = -1.6 \times 10^{-19}\,\text{C}$.



a) $n = 2.00 \times 10^{28}\,\text{m}^{-3}$

b) $n = 2.00 \times 10^{-28}\,\mathrm{m}^{-3}$

c) $n = 1.25 \times 10^{28}\,\mathrm{m}^{-3}$

d) $n = 2.50 \times 10^{28}\,\mathrm{m}^{-3}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Igualando las fuerzas eléctrica y magnética que actúan sobre los portadores de carga, encontramos:

$$qE = qvB \quad \longrightarrow \quad E = vB$$

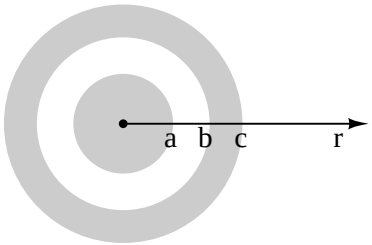
En este caso, el potencial de Hall está dado por $V = Ea$, por lo que:

$$V = avB$$

Finalmente, la corriente nos ayuda a determinar la velocidad de las cargas, puesto que $I = envab$. Así,

$$V = \frac{BI}{enb} \quad \longrightarrow \quad n = \frac{BI}{eVb} = \frac{1 \cdot 1}{1.6 \times 10^{-19} \cdot 0.25 \times 10^{-6} \cdot 1 \times 10^{-3}}\,\mathrm{m}^{-3} = 2.50 \times 10^{28}\,\mathrm{m}^{-3}$$

Problema 4.15.
Por un cable coaxial MUY largo circula una corriente I con densidad constante en cada conductor. La corriente entra por el conductor interno y regresa por el externo. Ambos cables están separados por un material aislante de permeabilidad μ_0. Determine el campo magnético en un punto $b < r < c$ del eje $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ según indica la figura.



a) $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(-1 + \dfrac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right)$

b) $0\,\mathrm{T}$

c) $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

d) $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(-1 + \dfrac{r^2 + b^2}{c^2 + b^2}\right)$

e) $\dfrac{\mu_0 I(b-a)}{2\pi r}$

Solución:

Elegimos un sistema coordenado en el que el plano del papel coincide con el plano XY, con el eje Z saliendo de la hoja. De la ley de Ampère, proponemos que $\vec{B} = B(r)\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$ y con ello:

$$2\pi r\, B(r) = \mu_0 I_{enc} \quad \longrightarrow \quad B(r) = \frac{\mu_0 I_{enc}}{2\pi r}$$

Como deseamos calcular el campo magnético en un punto $b < r < c$, notamos que en anillo amperiano encierra completamente a la corriente interior y solo parte de la corriente del conductor exterior. Por tanto,

$$I_{enc} = -I + J(\pi r^2 - \pi b^2)$$

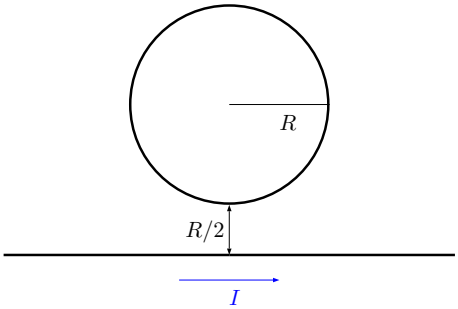
donde los signos de las corrientes están dados por la regla de la mano derecha y J es la densidad de corriente en el conductor externo, que al ser constante por enunciado, cumple que:

$$J = \frac{I}{\pi c^2 - \pi b^2}$$

Reemplazando,

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(-1 + \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right)$$

Problema 4.16.
Una espira circular de radio $R = 0.5\,\text{cm}$ es colocada cerca a un alambre recto y MUY largo, según indica la figura. Una corriente estacionaria $I = 2\,\text{A}$ va de izquierda a derecha por el alambre recto. Si en la espira circular también hay una corriente estacionaria I_{esp}, ¿cuál debe ser su magnitud para que el campo magnético neto sea cero en el centro de la espira?



a) 0.42 A

b) 0.15 A

c) 2.00 A

d) 2.54 A

e) 0.31 A

Solución:

Si tomamos un sistema coordenado tal que ambas figuras estén ubicadas en el plano XY, con el eje Z saliendo del papel y el alambre recto coincidiendo con el eje X. En este sistema de coordenadas, la el campo magnético que genera el alambre en el origen es:

$$\vec{B}_{alamb}(C) = \frac{\mu_0 I_{alamb}}{2\pi(R + R/2)}\,\hat{\boldsymbol{k}} = \frac{\mu_0 I_{alamb}}{3\pi R}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

El campo magnético de una espira de radio R en su eje de simetría se obtiene por la ley de Biot-Savart, con $\vec{R} = R\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$ y $\vec{r} = z\,\hat{\boldsymbol{k}}$:

$$\begin{aligned}
\vec{B}_{esp}(z) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I_{esp}\; d\vec{R} \times (\vec{r} - \vec{R})}{\|\vec{r} - \vec{R}\|^3} \\
&= \frac{\mu_0 I_{esp}}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R\; d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \times (z\,\hat{\boldsymbol{k}} - R\,\hat{\boldsymbol{\rho}})}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\,\hat{\boldsymbol{k}} \\
\therefore\ \vec{B}_{esp}(C) &= \frac{\mu_0 I_{esp}}{2R}\,\hat{\boldsymbol{k}}
\end{aligned}$$

Para que el campo sea nulo en el centro de la espira, la corriente I_{esp} debe circular en el mismo sentido de las agujas del reloj, y su magnitud debe ser:

$$I_{esp} = \frac{2I_{alamb}}{3\pi} = 0.42\,\text{A}$$

Problema 4.17.
Una esfera de radio R está cargada uniformemente con una densidad volumétrica de carga ρ constante. La esfera rota en torno a uno de sus diámetros con velocidad constante $\vec{\omega} = \omega\,\hat{\boldsymbol{k}}$. Encuentre el campo magnético en el centro de la esfera.

a) $\vec{B}(0) = -\dfrac{\mu_0 \rho R^2}{3}\vec{\omega}$

b) $\vec{B}(0) = -\dfrac{2\mu_0 \rho R^2}{3}\vec{\omega}$

c) $\vec{B}(0) = \dfrac{\mu_0 \rho R^2}{3}\vec{\omega}$

d) $\vec{B}(0) = \dfrac{2\mu_0 \rho R^2}{3}\vec{\omega}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Consideraremos que la esfera está compuesta por discos infinitesimales. A su vez, cada una de esos discos está compuesto por anillos infinitesimales. Cada anillo aporta con un diferencial de campo magnético:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0\, dI}{2} \frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}\, \hat{\boldsymbol{k}}$$

donde a es el radio del disco y z es la altura de cada anillo, respecto al plano XY. En coordenadas esféricas,

$$a = \sqrt{x^2+y^2} = r\sin\theta \qquad \wedge \qquad z = r\cos\theta$$

Por otra parte, el diferencial de corriente viene dado por:

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\rho dV}{2\pi/\omega} = \omega\rho\, r^2 \sin\theta\; d\theta\, dr$$

donde ya hemos integrado la componente ϕ por la simetría rotacional del problema. Juntando los términos,

$$\begin{aligned}
\vec{B}(C) &= \frac{\mu_0\omega\rho}{2}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \frac{r^2\sin^2\theta}{r^3} r^2\sin\theta\; dr\, d\theta\, \hat{\boldsymbol{k}} \\
&= \frac{\mu_0\omega\rho}{2}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r\sin^3\theta\; dr\, d\theta\, \hat{\boldsymbol{k}} \\
&= \frac{\mu_0\omega\rho R^2}{3}\, \hat{\boldsymbol{k}}
\end{aligned}$$

Problema 4.18.
Un cable recto MUY largo, colocado a lo largo del eje Z, lleva una corriente I en la dirección positiva de z. Se coloca un dipolo magnético $\vec{m} = m_0\, \hat{\boldsymbol{j}}$ en el eje X, a una distancia x_p del alambre. El torque sobre $\vec{m}$ es:

a) $\vec{\tau} = \vec{0}$

b) $\vec{\tau} = \dfrac{m_0 I}{2\pi x_p}\, \hat{\boldsymbol{k}}$

c) $\vec{\tau} = \dfrac{m_0 I}{2\pi x_p}\, \hat{\boldsymbol{i}}$

d) $\vec{\tau} = \dfrac{m_0 I}{2\pi x_p}\, \hat{\boldsymbol{j}}$

e) $\vec{\tau} = -\dfrac{m_0 I}{2\pi x_p}\, \hat{\boldsymbol{i}}$

Solución:

Recordemos que el campo magnético de un cable infinito es:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

En coordenadas cartesianas,

$$r = \sqrt{x^2+y^2}\,, \qquad \hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{x\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} - y\,\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

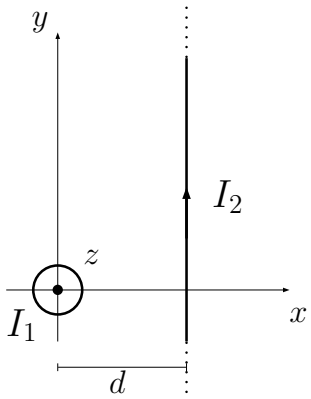
Como deseamos el campo magnético en el punto $(x_p, 0)$,

$$\vec{B}_{dipolo} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} x_p\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Así,

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_{dipolo} = \vec{0}$$

Problema 4.19.
Un alambre infinito con corriente I_1, en el sentido del eje Z, coincide con dicho eje. Otro alambre infinito, con corriente I_2, se encuentra en el plano XY a una distancia d constante del eje Y, como indica la figura. Entonces, la fuerza por unidad de largo de I_1 sobre I_2 es:



a) $\dfrac{d\vec{F}}{dy} = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\dfrac{y}{d^2+y^2}\,\hat{\boldsymbol{k}}$

b) $\dfrac{d\vec{F}}{dy} = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\dfrac{d}{d^2+y^2}\,\hat{\boldsymbol{k}}$

c) $\dfrac{d\vec{F}}{dy} = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\dfrac{d}{d^2+y^2}\,\hat{\boldsymbol{k}}$

d) $\dfrac{d\vec{F}}{dy} = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\dfrac{y}{d^2+y^2}\,\hat{\boldsymbol{k}}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

El campo magnético de la corriente I_1 es:

$$\vec{B}(x,y) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(x^2+y^2)}(-y\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + x\,\hat{\boldsymbol{\jmath}})$$

donde la última igualdad proviene de escribir el campo en coordenadas cartesianas. Ahora bien, el diferencial de fuerza sobre un segmento del conductor de largo dy es:

$$d\vec{F} = I_2\ dy\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} \times \vec{B}(d,y) = I_2\ dy\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d^2+y^2)}(-y\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + d\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}) = \frac{\mu_0 I_1 I_2 y\ dy}{2\pi(d^2+y^2)}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

Problema 4.20.
Se tiene un cascarón semi-esférico (sin tapa) de radio R a través del cual fluye un campo magnético $\vec{B} = B_0\left(\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{1}{2}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}\right)$. Entonces, el flujo magnético a través del cascarón es:

a) $\Phi_B = \dfrac{2\pi R^2}{3} B_0$

b) $\Phi_B = 2\pi R^2 B_0$

c) $\Phi_B = 0$

d) $\Phi_B = \dfrac{\pi R^2}{2} B_0$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Sea S la superficie descrita en el enunciado, y D la tapa de modo tal que $S + D$ es una superficie cerrada que encierra un volumen V. Así, por el teorema de la divergencia,

$$\iint_{S+D} \vec{B}\cdot\hat{n}\ dS = \iiint_V \nabla\cdot\vec{B}\ dV = 0$$

pues la divergencia del campo magnético siempre es nula. Con ello,

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B}\cdot\hat{n}\ dS = -\iint_D \vec{B}\cdot\hat{n}\ dS$$

con las normales apuntando hacia afuera. La tapa se puede parametrizar como:

$$T:\ (r,\theta) \mapsto (0, r\cos\theta, r\sin\theta)$$

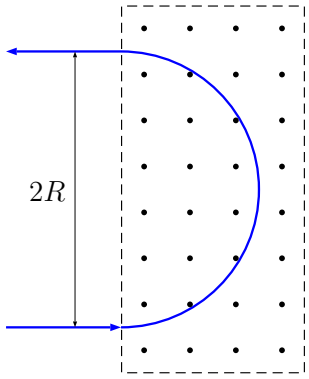
Calculando la integral de superficie,

$$\begin{aligned}\iint_D \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS &= \iint_D \vec{B}\cdot\vec{n}\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^R\int_0^{2\pi} B_0\left(1,\frac{1}{2},0\right)\cdot(-r,0,0)\,d\theta\,dr \\ &= -\pi R^2 B_0\end{aligned}$$

Así,

$$\Phi_B = \pi R^2 B_0$$

Problema 4.21.
Se realiza un experimento con rayos de partículas cargadas que inciden en un campo magnético uniforme de magnitud $B = 0.5\,\mathrm{T}$ (ver figura). Se sabe que las partículas inciden con una velocidad de $v = 0.5\times10^6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Suponga que, al entrar a la zona de campo magnético no nulo, las partículas describen una órbita semi-circular de radio $R = 1.5\,\mathrm{m}$. Despreciando efectos de la gravedad, podemos deducir que la razón carga/masa es:



a) $q/m = 2/3\times10^6\,\mathrm{C\,kg^{-1}}$

b) $q/m = 3/4\times10^6\,\mathrm{C\,kg^{-1}}$

c) $q/m = -2/3\times10^6\,\mathrm{C\,kg^{-1}}$

d) $q/m = -3/4\times10^6\,\mathrm{C\,kg^{-1}}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Primero que todo, notemos que la regla de la mano derecha nos indica que las partículas deben

tener carga negativa para que la trayectoria sea como la descrita en la figura. Ahora bien, respecto a la magnitud de la carga, tenemos que:

$$|q|vB = \frac{mv^2}{R} \quad \longrightarrow \quad \frac{|q|}{m} = \frac{v}{BR} = \frac{0.5 \times 10^6}{0.5 \cdot 1.5} = \frac{2}{3} \times 10^6 \,\mathrm{C\,kg^{-1}}$$

Problema 4.22.
Un anillo de radio R y carga Q está rotando con velocidad angular ω en torno al eje Z. La magnitud del campo magnético en el eje Z, en un punto MUY lejano del anillo ($z \ll R$), puede ser aproximado por:

a) $\frac{\mu_0 Q\omega R^2}{4\pi z^3}$

b) $\frac{\mu_0 Q\omega R}{4\pi z^2}$

c) $\frac{\mu_0 Q\omega R^2}{8\pi z^3}$

d) $\frac{\mu_0 Q\omega R}{8\pi z^2}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Si el anillo rota y está cargado, entonces su corriente viene dada por:

$$I = \frac{Q}{T} = \frac{Q\omega}{2\pi}$$

con T el periodo de rotación. Ahora bien, el campo magnético producido por una espira de radio R por la que circula una corriente I en su eje de simetría tiene magnitud:

$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

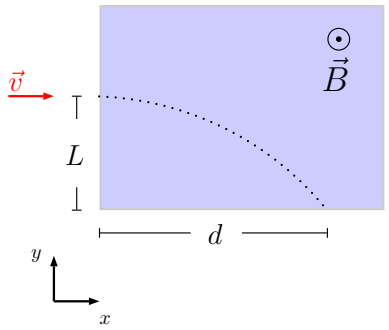
Si $z \gg R$, entonces podemos aproximar la expresión anterior hasta obtener:

$$B(z \gg R) \sim \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{z^3}$$

Reemplazando:

$$B(z \gg R) \sim \frac{\mu_0 Q\omega R^2}{4\pi z^3}$$

Problema 4.23.
Una partícula de carga $q > 0$ y masa m ingresa con velocidad $\vec{v} = v\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$ a una región con un campo magnético $\vec{B}$ constante, como indica la figura. ¿A qué distancia d, del plano de entrada, es detectada la partícula?



a) $d = \sqrt{\dfrac{mvL}{qB}}$

b) $d = \sqrt{\dfrac{mvL}{qB} - L^2}$

c) $d = \dfrac{mv}{qB}$

d) $d = \sqrt{\dfrac{2mvL}{qB} - L^2}$

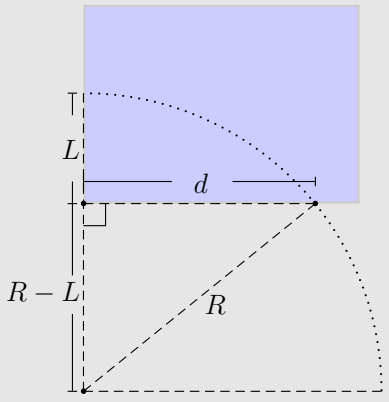
e) $d = L$

Solución:

Primero que todo, notamos que la fuerza magnética provoca un movimiento circular tal que:

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \quad \longrightarrow \quad R = \frac{mv}{qB}$$

Por otra parte, tenemos la siguiente situación:



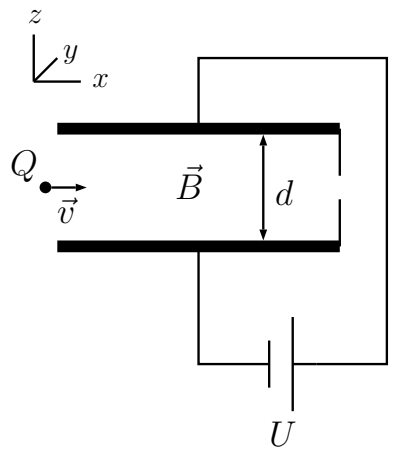
Por Pitágoras,

$$(R-L)^2 + d^2 = R^2 \quad \longrightarrow \quad d = \sqrt{2RL - L^2}$$

Reemplazando,

$$d = \sqrt{\frac{2mvL}{qB} - L^2}$$

Problema 4.24.
Una carga $Q > 0$ entra con posición inicial $\vec{r}(0) = \vec{0}$ y velocidad $\vec{v}(0) = v_0\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$ en un espacio entre dos placas paralelas (capacitor), que se encuentran a una distancia d, sometidas a una diferencia de potencial U. Además, en el espacio entre las placas hay un campo magnético $\vec{B} = B_x\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + B_y\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$. Asumiendo que el campo eléctrico en el capacitor es constante, ¿con qué velocidad v_0 tiene que entrar la partícula para que salga en línea recta por la abertura indicada en el lado derecho de la figura?



a) $v_0 = \dfrac{U}{B_x\,d}$

b) $v_0 = \dfrac{U}{\sqrt{{B_x}^2 + {B_y}^2}\,d}$

c) $v_0 = \dfrac{U}{B_y\,d}$

d) $v_0 = \dfrac{U}{\sqrt{{B_x}^2 - {B_y}^2}\,d}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Para que se mueva en línea recta, la suma de fuerzas en el eje Z debe ser igual a cero. Si calculamos la fuerza neta sobre la carga,

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

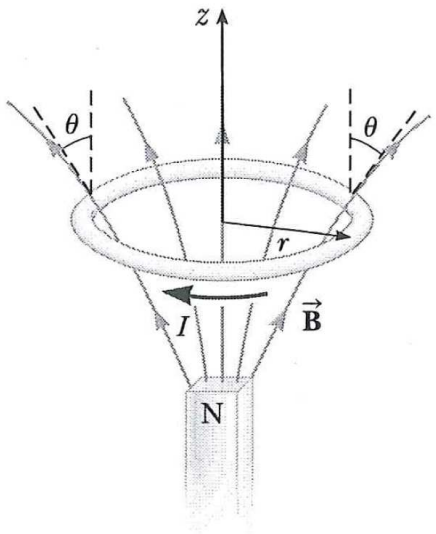
El campo eléctrico tiene magnitud $E = U/d$, con dirección $-\hat{\boldsymbol{k}}$ puesto que el potencial crece hacia arriba. Por otra parte, como la partícula se mueve en línea recta, $\vec{v} = v(t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$. Así, $\vec{v} \times \vec{B} = v(t)B_y\,\hat{\boldsymbol{k}}$ y por tanto:

$$\vec{F} = Q\left(-\frac{U}{d} + v(t)B_y\right)\hat{\boldsymbol{k}}$$

Como la fuerza solo apunta en el eje Z, al ser esta nula la velocidad de la partícula será constante, i.e. $v(t) = v_0$. Para que la fuerza sea nula, se debe cumplir que:

$$v_0 = \frac{U}{B_y\,d}$$

Problema 4.25.
La fuerza total sobre la espira de la figura es:



a) $\vec{F} = 2\pi r I B \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{k}}$

b) $\vec{F} = 2\pi r I B \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$

c) $\vec{F} = -2\pi r I B \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$

d) $\vec{F} = -2\pi r I B \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{k}}$

e) $\vec{F} = \pi r I B \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{k}}$

Solución:

La fuerza sobre la espira viene dada por:

$$\vec{F} = I \int d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

Para describir la situación, utilizaremos coordenadas cilíndricas (r, φ, z). Tomemos un segmento del anillo de largo $d\vec{\ell} = -r\, d\varphi\, \hat{\boldsymbol{\varphi}}$, donde el signo menos se debe a la dirección de la corriente (a favor de las agujas del reloj). Por otra parte, el campo magnético puede escribirse como:

$$\vec{B} = B \sin\theta\, \hat{\boldsymbol{\rho}} + B \cos\theta\, \hat{\boldsymbol{k}}$$

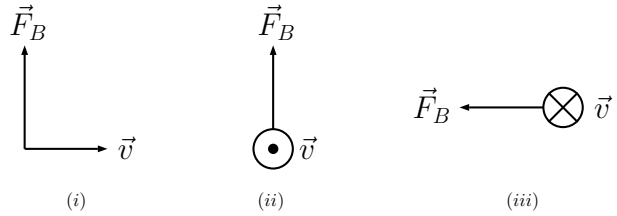
Por tanto,

$$d\vec{\ell} \times \vec{B} = rB\, d\varphi \Big(\sin\theta\, \hat{\boldsymbol{k}} + \cos\theta\, \hat{\boldsymbol{\varphi}} \Big)$$

Así, integrando entre 0 y 2π, la contribución angular se anulará puesto que $\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\sin\varphi\, \hat{\boldsymbol{\imath}} + \cos\varphi\, \hat{\boldsymbol{\jmath}}$. Por otra parte, la contribución en el eje Z nos dará un factor 2π. Finalmente,

$$\vec{F} = 2\pi r I B \sin\theta\, \hat{\boldsymbol{k}}$$

Problema 4.26.
La figura muestra la velocidad de una carga puntual **negativa** y la fuerza magnética que actúa sobre esta. La dirección del campo magnético en las distintas situaciones es:



a) (i) hacia abajo, (ii) entra en la página, (iii) sale de la página

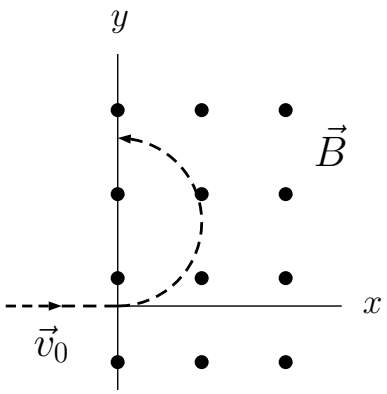
b) (i) hacia la derecha, (ii) hacia abajo, (iii) hacia arriba

c) (i) entra en la página, (ii) hacia la derecha, (iii) hacia abajo

d) (i) sale de la página, (ii) hacia la izquierda, (iii) hacia arriba

e) (i) entra en la página, (ii) hacia la izquierda, (iii) hacia abajo

Problema 4.27.
Una partícula de carga $q = 2\,\mathrm{C}$ y masa $M = 1\,\mathrm{kg}$ se mueve en el plano XY. En $t = 0$, la partícula se encuentra en el punto $\vec{r}_0 = (-1, 0, 0)\,\mathrm{m}$ y su velocidad es $\vec{v}_0 = (0.5, 0, 0)\,\mathrm{m/s}$. En la región $x > 0$ hay un campo magnético uniforme $\vec{B} = (0, 0, B)$, donde $B = 0.5\,(\mathrm{N\,s})/(\mathrm{C\,m})$, como se muestra la figura. ¿En qué instante, aproximadamente, la partícula sale de la región donde hay campo magnético?



a) 6.3 s

b) 1.0 s

c) 7.1 s

d) 8.3 s

e) 5.1 s

Solución:

El tiempo requerido corresponde a la suma del tiempo que la partícula demora en ingresar a la región con campo magnético (t_1) y el tiempo que demora en dar media vuelta para salir del campo (t_2). Dado que la partícula se mueve con velocidad constante en $x < 0$,

$$t_1 = \frac{d}{v_0} = \frac{1\,\text{m}}{0.5\,\text{m/s}} = 2\,\text{s}$$

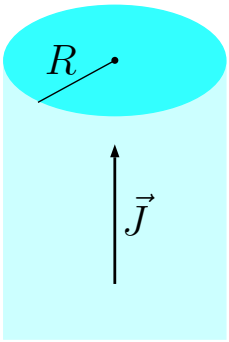
En el caso de t_2, este tiempo corresponde a la mitad del periodo de rotación de la partícula:

$$t_2 = \frac{T}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi m}{qB}\right) \approx \frac{3.14 \cdot 1}{2 \cdot 0.5}\,\text{s} \approx 3.14\,\text{s}$$

Por tanto,

$$\Delta t = t_1 + t_2 \approx 5.14\,\text{s}$$

Problema 4.28.
Calcule la magnitud del campo magnético creado por el cilindro infinito de la figura, si este porta una densidad de corriente $\vec{J} = J_0 \dfrac{R}{r}\,\hat{\boldsymbol{k}}$ en coordenadas cilíndricas.



a) $B(r<R)=\mu_0 J_0 R$ y $B(r>R)=\dfrac{\mu_0 J_0 R^2}{r}$

b) $B(r<R)=\mu_0 J_0 r$ y $B(r>R)=\dfrac{\mu_0 J_0 r^2}{R}$

c) $B(r<R)=\dfrac{\mu_0 J_0 R^2}{r}$ y $B(r>R)=\mu_0 J_0 R$

d) $B(r<R)=2\pi\mu_0 J_0 R$ y $B(r>R)=\dfrac{2\pi\mu_0 J_0 R^2}{r}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

De acuerdo a la simetría del problema, proponemos que $\vec{B}=B(r)\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Así, para un anillo amperiano de radio r, la ley de Ampère nos dice que:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{r}=2\pi r\,B(r)=\mu_0 I_{enc} \qquad \longrightarrow \qquad B(r)=\frac{\mu_0 I_{enc}}{2\pi r}$$

Para $r<R$,

$$I_{enc}=\iint_{\mathcal{S}} \vec{J}\cdot\hat{n}\;dS=2\pi J_0 R\int_0^r \frac{r'\;dr'}{r'}=2\pi J_0 R r$$

con lo que:

$$B(r<R)=\mu_0 J_0 R$$

Para $r>R$,

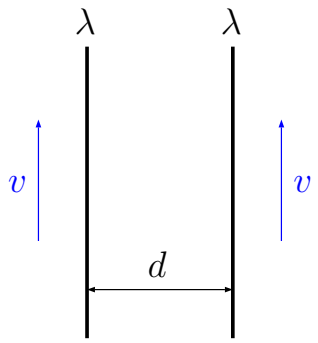
$$I_{enc}=2\pi J_0 R\int_0^R dr'=2\pi J_0 R^2$$

y, por tanto,

$$B(r>R)=\frac{\mu_0 J_0 R^2}{r}$$

Problema 4.29.
Considere un par de hilos no conductores paralelos, separados a una distancia d y MUY largos ($L\gg d$).

Ambos poseen una carga distribuida uniformemente con densidad λ. ¿Cuál debe ser la velocidad v (medida en un sistema inercial) de los hilos para que la fuerza magnética anule la fuerza eléctrica entre ellos? Recuerde que $c = (\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2} \approx 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$ es la velocidad de la luz.



a) $v = 10^8\,\mathrm{m/s}$

b) $v = 2 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$

c) $v = 4 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$

d) $v = 6 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$

e) $v = 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$

Solución:

Supongamos que uno de los alambres se ubica en el eje Z. Así, el campo eléctrico que genera es:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Con ello, la fuerza eléctrica sobre el segundo cable, ubicado a una distancia d del eje Z, es:

$$\vec{F}_E = \int_0^L \vec{E}\; dq = \frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0 d}\int_0^L dz\,\hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{\lambda^2 L}{2\pi\varepsilon_0 d}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Por otro lado, el campo magnético generado por el primer alambre será:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi r}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

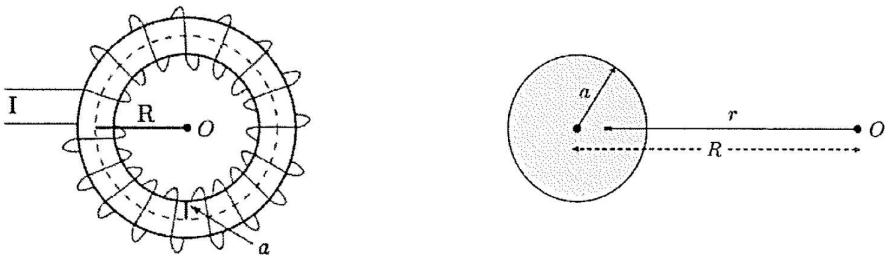
donde la corriente que circula, visto desde un sistema referencial en reposo, es $I = \lambda v$. La fuerza magnética sobre el segundo alambre será, entonces,

$$\vec{F}_B = I\int_0^L d\vec{\ell}\times\vec{B} = -\frac{\mu_0\lambda^2 v^2}{2\pi d}\int_0^L dz\,\hat{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{\mu_0\lambda^2 v^2 L}{2\pi d}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$$

Finalmente, para que $\vec{F}_B + \vec{F}_E = \vec{0}$, se debe cumplir:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2 L}{2\pi\varepsilon_0 d} &= \frac{\mu_0 \lambda^2 v^2 L}{2\pi d} \\ \frac{1}{\mu\varepsilon_0} &= v^2 \\ \therefore\ v &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \end{aligned}$$

Problema 4.30.
Un cable con N vueltas y corriente I enrolla un *donut* de radios R y $a < R$ como muestra la figura. ¿Cuánto vale el módulo del campo magnético en cualquier punto del plano del *donut* (punto r de la figura)?



a) $\|\vec{B}\| = 0$

b) $\|\vec{B}\| = \dfrac{\mu_0 N I}{\pi r}$

c) $\|\vec{B}\| = \dfrac{\mu_0 N I}{2\pi r}$

d) $\|\vec{B}\| = \dfrac{\mu_0 N I}{4\pi r}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

La simetría de la configuración nos permite proponer que $\vec{B} = B(r)\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Consideremos un anillo amperiano de radio r en el interior del *donut*, tal que $d\vec{r} = r\ d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Por ley de Ampère,

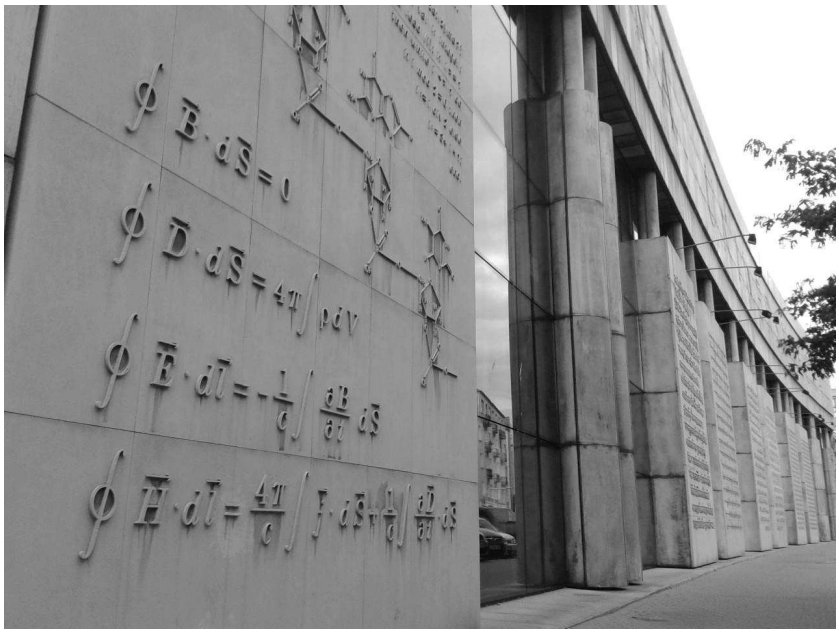
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = 2\pi r\, B(r) = \mu_0 I_{enc} = NI$$

Por tanto,

$$\|\vec{B}\| = B(r) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

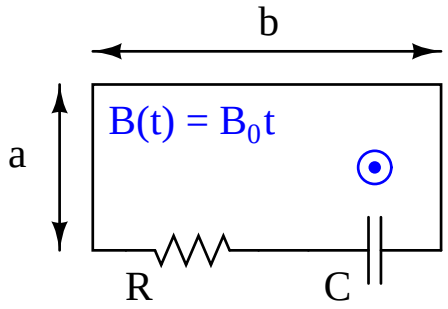
5

Inductancias y flujo magnético



Ecuaciones de Maxwell en uno de los muros exteriores de la Universidad de Varsovia

Problema 5.1.
Asumiendo que en un tiempo $t = 0$ el condensador se encuentra descargado y que $B_0 > 0$ (el campo sale de la página), la corriente que circula por el circuito de la figura es, como función del tiempo,



a) $I(t) = \dfrac{B_0 ab}{R}\left(1 - e^{-t/RC}\right)$ en sentido anti-horario

b) $I(t) = \dfrac{B_0 ab}{R} e^{-t/RC}$ en sentido horario

c) $I(t) = \dfrac{B_0 ab}{R} e^{-t/RC}$ en sentido anti-horario

d) $I(t) = \dfrac{B_0 ab}{R}\left(1 - e^{-t/RC}\right)$ en sentido horario

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Consideremos un sistema de coordenadas en que los ejes X e Y apuntan hacia la derecha y arriba, respectivamente. Con ello, el campo magnético tiene la forma $\vec{B} = B(t)\,\hat{\boldsymbol{k}}$. Consideraremos que la normal al plano es $\hat{n} = \hat{\boldsymbol{k}}$. Por tanto,

$$\Phi_B = \iint_{espira} \vec{B} \cdot \hat{n}\; dS = B_0 abt$$

Por la ley de Faraday,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -B_0 ab$$

Por tanto, el circuito posee una fuente de voltaje constante $|\mathcal{E}|$ y se trata de un circuito RC con el condensador inicialmente descargado, cuya ecuación diferencial ha sido tratada anteriormente. Así, la la corriente viene dada por:

$$I(t) = \frac{|\mathcal{E}|}{R} e^{-t/RC}$$

Para determinar el sentido de la corriente, notemos que el flujo magnético aumenta en el tiempo. De acuerdo a la ley de Lenz, se inducirá una corriente que se opone al cambio en el flujo. En ese sentido, se requiere una corriente tal que reduzca el flujo, lo que se traduce en un cambo que entre en la página. Para que esto ocurra, la corriente debe circular en forma horaria de acuerdo con la regla de la mano derecha.

Problema 5.2.
Considere una espira circular de radio $r = 0.2\,\mathrm{m}$, masa $M = 3\,\mathrm{kg}$ y resistencia $R = 4\pi\,\Omega$ que se mueve con velocidad $\vec{v} = -v(t)\,\hat{\boldsymbol{k}}$, $v(t) > 0$, en presencia de un campo magnético no uniforme dado por $B_z = 100z\,\mathrm{T}$. Suponga que el plano de la espira siempre es perpendicular a la dirección de movimiento. ¿Cuál es la magnitud de la corriente inducida en la espira en $t = t_0$ si la velocidad en dicho instante es $v(t_0) = 5\,\mathrm{m/s}$?

a) $I(t_0) = 1\,\mathrm{A}$

b) $I(t_0) = 5\,\mathrm{A}$

c) $I(t_0) = 2\,\mathrm{A}$

d) $I(t_0) = 15\,\mathrm{A}$

e) $I(t_0) = 20\,\mathrm{A}$

Solución:

Pensemos que la normal de la espira apunta en la dirección positiva del eje Z. El flujo magnético que atraviesa la espira es:

$$\Phi_B = \iint_{espira} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS = 100\pi r^2 z \qquad \longrightarrow \qquad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -100\pi r^2\frac{dz}{dt}$$

En este caso, dz/dt corresponde a la velocidad con la que cae la espira, $-v(t)$. Con ello, la corriente inducida viene dada por:

$$I(t_0) = \frac{|\mathcal{E}(t_0)|}{R} = \frac{100\pi r^2 v(t_0)}{R} = \frac{100\pi\cdot 0.04\cdot 5}{4\pi}\,\mathrm{A} = 5\,\mathrm{A}$$

Problema 5.3.
Considere dos espiras planas circulares concéntricas de radios a y b, respectivamente, con $a \ll b$. Suponga que la inductancia mutua entre ellas es M. ¿Cuál sería la inductancia mutua entre ellas si tuviesen radios $2a$ y $2b$ respectivamente?

a) $M/4$

b) $M/2$

c) M

d) $2M$

e) $4M$

Solución:

Sea M' la nueva inductancia mutua. El campo magnético en el centro de una espira de radio R por la que circula una corriente I es, en módulo,

$$B(0) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\bigg|_{z=0} = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Si la espira concéntrica de radio a es pequeña, con $a \ll b$, podemos aproximar el flujo del campo a través de ella por su valor en el origen:

$$\Phi_B = \pi a^2 B(0) = \frac{\mu_0 \pi I a^2}{2b}$$

De este modo, la inducatancia mutua original es:

$$M = \frac{\mu_0 \pi a^2}{2b}$$

Si se duplica el radio de ambas espiras se obtiene:

$$M' = \frac{\mu_0 \pi (2a)^2}{2(2b)} = \frac{\mu_0 \pi a^2}{b} = 2M$$

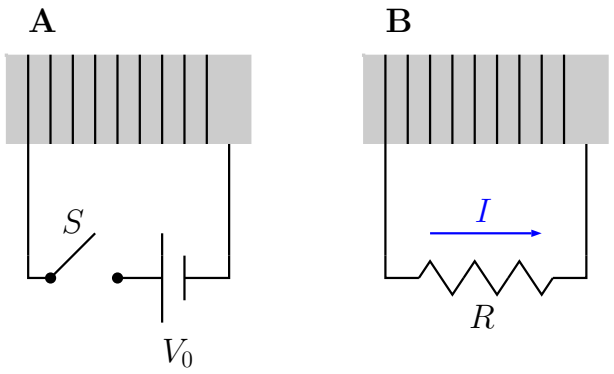
Problema 5.4.
Considere las dos bobinas de la figura. Suponga que con ellas se hacen los siguientes experimentos independientes entre sí:

I. *El interruptor S está cerrado y se abre*

II. *El interruptor S está abierto y se cierra*

III. *Con el interruptor cerrado, A se acerca a B*

IV. *Con el interruptor cerrado, A de aleja de B*



De los cuatro experimentos anteriores, la corriente I por la resistencia R circulará en el sentido dibujado:

a) Solamente en el experimento III

b) Solamente en el experimento II

c) Solamente en el experimento I

d) En los experimentos I y IV

e) En los experimentos II y III

Solución:

Con el interruptor cerrado, la espira A crea un campo dirigido a la izquierda ($\leftarrow$). Entonces, al realizar el experimento I inicialmente hay campo y luego este desaparece. Por lo tanto, la bobina B tiene que crear campo que compense este cambio induciendo un campo magnético hacia la izquierda ($\leftarrow$), por lo que la corriente I circula en contra de lo indicado. En el experimento II es justo al revés; la espira B tenía flujo cero y para tratar de mantenerlo crea un campo hacia la derecha ($\rightarrow$), por lo que circula una corriente en el sentido adecuado. En el experimento III, para mantener su flujo constante, crea un campo hacia la derecha ($\rightarrow$). En el experimento IV, por la misma razón, se crea un campo hacia la izquierda ($\leftarrow$).

Problema 5.5.
Con un alambre de largo $d = 2\pi a$ se forma una espira circular de radio a cuya autoinductancia resulta ser L_1. Con un alambre de largo $d = 4\pi a$ se forma un circuito que consiste en dos vueltas muy juntas para formar una espira, también de radio a. La autoinductancia L_2 de este circuito de dos vueltas es:

a) $L_2 = L_1/2$

b) $L_2 = L_1$

c) $L_2 = 2L_1$

d) $L_2 = 4L_1$

e) $L_2 = L_1/4$

Solución:

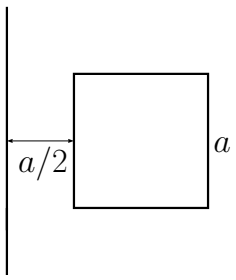
Recordemos que la autoinductancia L se determina mediante el cociente:

$$L = \frac{\Phi_B}{I}$$

donde Φ_B es el flujo magnético total. Si con una vuelta, una corriente I crea campo B, con dos vueltas idénticas se crea un campo $2B$. Ahora el flujo total corresponde al producto del número de vueltas con el flujo de una espira. En este caso, el flujo individual se duplica, pues el campo total es $2B$, y por tanto el flujo total se cuadruplica. La duplicación del campo más la duplicación del flujo significa que la autoinductancia se cuadruplica y el resultado es:

$$L_2 = 4L_1$$

Problema 5.6.
La inductancia mutua entre una espira cuadrada de lado a y un alambre recto MUY largo ubicado a distancia $a/2$ en el plano de la espira es:



a) $M = \dfrac{\mu_0 a}{2\pi} \ln(3)$

b) $M = \dfrac{\mu_0 a}{2\pi} \ln(2)$

c) $M = \dfrac{\mu_0 a}{2\pi} \ln(3/2)$

d) $M = \dfrac{\mu_0 a^2}{2\pi} \ln(3/2)$

e) $M = \dfrac{\mu_0 a^2}{2\pi} \ln(1/2)$

Solución:

Sea I la corriente que circula por el alambre, el cual consideraremos infinito. Utilizaremos un sistema coordenado en que ambas figuras se hallan en el plano XY, con el eje Z saliendo de la hoja, y el alambre coincidente con el eje Y. Así, el campo magnético producido por dicho alambre viene dado por:

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

El flujo magnético a través de la espira cuadrada, con normal $\hat{\boldsymbol{k}}$, es:

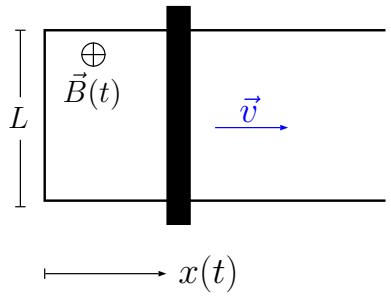
$$\Phi_B = \iint_S \vec{B}\cdot\hat{n}\; dS = \int_0^a \int_{a/2}^{3a/2} \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\; dx\, dy = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln(3)$$

Finalmente, la inductacia mutua corresponde a:

$$M = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln(3)$$

Problema 5.7.
Considere una barra conductora, de largo L, que se mueve con velocidad una $\vec{v} = v\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$ constante, como

indica la figura. El sistema se encuentra en presencia de un campo magnético $\vec{B}(t) = -B_0\, e^{-\lambda t}\, \hat{\boldsymbol{k}}$ apuntando hacia el papel. Si la barra inicialmente (en $t = 0$) se encontraba en la posición $x = 0$, el voltaje inducido es:



a) $B(t)Lv$

b) $B(t)Lv(\lambda t - 1)$

c) $\dfrac{B(t)Lv}{\lambda t - 1}$

d) $B(t)Lv\lambda t$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Sea $x = x(t)$ la posición de la barra en el instante t, la cual forma una espira de área $A = Lx$. Así, el flujo magnético a través de la espira es:

$$\Phi_B = BA = B_0 Lx\, e^{-\lambda t} \quad \longrightarrow \quad \frac{d\Phi_B}{dt} = B_0 L\Big(\dot{x}\, e^{-\lambda t} - x\lambda\, e^{-\lambda t}\Big) = B_0 L(\dot{x} - x\lambda)\, e^{-\lambda t}$$

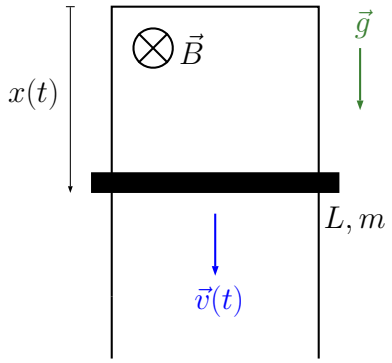
Como la rapidez es constante, $x(t) = x(0) + vt = vt$ y $\dot{x}(t) = v$. Por tanto,

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = B_0 L(v - vt\lambda)\, e^{-\lambda t} = B_0 Lv(1 - \lambda t)\, e^{-\lambda t} = B(t)Lv(1 - \lambda t)$$

y con ello:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = B(t)Lv(\lambda t - 1)$$

Problema 5.8.
Considere una barra conductora de largo L, masa m y resistencia R. Dicha barra cae, por acción de la gravedad, por dos rieles conductores de resistencia despreciable (ver figura) a un rapidez $v(t)$. El sistema se encuentra en presencia de un campo magnético uniforme $\vec{B}$ apuntando hacia el papel. Con estos datos, se puede afirmar que la magnitud de la corriente inducida en el circuito es:



a) BvL

b) $\dfrac{BvL}{2R}$

c) $2BvL$

d) $2\dfrac{BvL}{R}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Coloquemos un sistema coordenado en que el eje X está indicado con la flecha $x(t)$, el eje Z saliendo del papel y el eje Y paralelo a la barra, de acuerdo a la ley de la mano derecha. De esta forma, el flujo magnético es:

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dS = \iint_S -B\,\hat{\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{k}}\, dS = -BLx$$

donde hemos tomado la normal de la superficie hacia fuera del papel. Ahora bien, de acuerdo a la ley de Faraday–Lenz,

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = BLv$$

con lo que la corriente posee una magnitud:

$$I = \frac{|\varepsilon_{ind}|}{R} = \frac{BLv}{R}$$

Problema 5.9.
Considere la situación descrita en el Problema 5.8. La fuerza neta sobre la barra está dada por:

a) $\vec{F} = \left(mg - \dfrac{(BL)^2 v}{R}\right)\hat{\boldsymbol{\imath}}$

b) $\vec{F} = mg\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$

c) $\vec{F} = \left(mg - \dfrac{BLv}{R}\right)\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$

d) $\vec{F} = (mg - (BL)^2 v)\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Tomando el sistema de coordenadas descrito anteriormente, notamos que el peso de la barra corresponde a $\vec{W} = mg\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$. Por otra parte, al existir un campo magnético y una corriente circulante, la fuerza magnética viene dada por:

$$\vec{F}_m = I\vec{L} \times \vec{B} = -BIL\,\hat{\boldsymbol{\imath}} = -\frac{v(BL)^2}{R}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

donde $\vec{L}$ tiene magnitud L y su dirección coincide con la circulación de la corriente, $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$. Así, la fuerza neta corresponde a:

$$\vec{F} = \vec{W} + \vec{F}_m = \left(mg - \frac{v(BL)^2}{R}\right)\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

Problema 5.10.
Considere el sistema del Problema 5.8. Después de MUCHO tiempo, la barra alcanzará una velocidad terminal constante cuya magnitud está dada por:

a) $\dfrac{mg - BLR}{BL}$

b) $\dfrac{mgR}{BL}$

c) $\dfrac{mgR - BL/R}{BL}$

d) $\dfrac{mgR}{(BL)^2}$

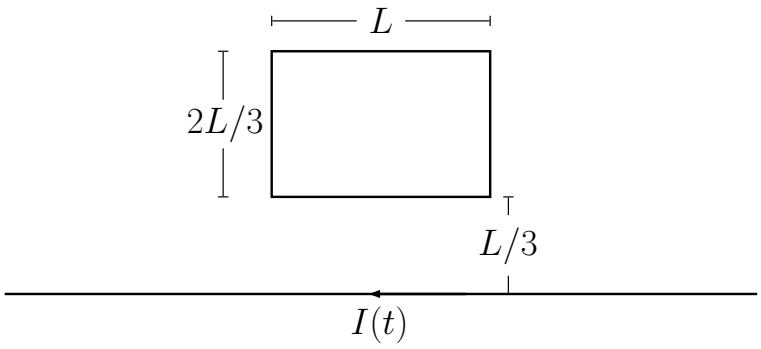
e) Ninguna de las anteriores

Solución:

La velocidad terminal corresponde a la velocidad que adquiere un móvil cuando la fuerza neta que actúa sobre él es cero. Por tanto,

$$v_{terminal} = \frac{mgR}{(BL)^2}$$

Problema 5.11.
Se tiene un alambre recto MUY largo, por el cual fluye una corriente $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$. Entonces, la magnitud del voltaje inducido en la espira (cuyas dimensiones se indican en la figura) es:



a) $\varepsilon_{ind} = \dfrac{\mu_0 I_0 \omega L}{2\pi} \sin(\omega t)$

b) $\varepsilon_{ind} = \dfrac{\mu_0 I_0 \omega L}{2\pi} \ln(2) \sin(\omega t)$

c) $\varepsilon_{ind} = \dfrac{\mu_0 I_0 \omega L}{4\pi} \ln(3) \sin(\omega t)$

d) $\varepsilon_{ind} = \dfrac{\mu_0 I_0 \omega L}{\pi} \ln(2) \sin(\omega t)$

e) $\varepsilon_{ind} = \dfrac{\mu_0 I_0 \omega L}{2\pi} \ln(3) \sin(\omega t)$

Solución:

Elegimos un sistema de referencia como el sugerido en la figura. Con ello, el campo magnético es

$$\vec{B} = -B(t)\,\hat{\boldsymbol{k}} = -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi y} \cos(\omega t)\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

Por tanto, el flujo magnético es:

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot \hat{n}\; dS = \int_0^L \int_{L/3}^L \frac{\mu_0 I_0}{2\pi y} \cos(\omega t)\; dy\, dx = \frac{\mu_0 I_0 L}{2\pi} \ln(3) \cos(\omega t)$$

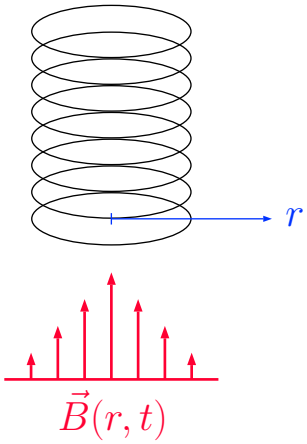
donde la normal de la espira se tomó saliendo del papel, i.e. $\hat{n} = -\hat{\boldsymbol{k}}$. Con ello, el voltaje inducido viene dado por:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\mu_0 I_0 \omega L}{2\pi} \ln(3) \sin(\omega t)$$

Problema 5.12.
Una bobina circular de N vueltas y radio R es ubicada sobre un campo magnético externo. El campo es oscilatorio, y su magnitud viene dada por:

$$B(r,t) = B_0 \left(1 - \frac{r}{2R}\right) \cos(\omega t)$$

donde r es la dirección radial medida desde es centro de la bobina. Si el campo es dirigido perpendicularmente al plano de la bobina, ¿cuál es el voltaje inducido en ella?



a) $\frac{2}{3}\pi\omega NR^2B_0\sin(\omega t)$

b) $\omega NR^2B_0\sin(\omega t)$

c) $NB_0\left(1-\frac{r}{2R}\right)\omega R^2\sin(\omega t)$

d) $NB_0\left(1-\frac{r}{2R}\right)\omega R^2\cos(\omega t)$

e) $\pi\omega NR^2B_0\sin(\omega t)$

Solución:

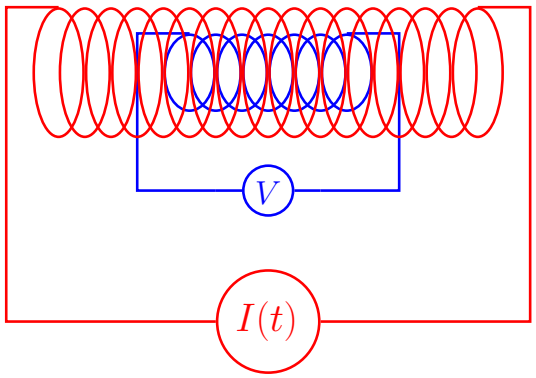
En este caso, el flujo magnético total está dado por:

$$\Phi_B = NB_0\cos(\omega t)\int_0^{2\pi}\int_0^R r\left(1-\frac{r}{2R}\right)\,dr\,d\theta = \frac{2}{3}\pi NR^2B_0\cos(\omega t)$$

Por tanto, el voltaje inducido es:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{2}{3}\pi\omega NR^2B_0\sin(\omega t)$$

Problema 5.13.
Se tienen dos bobinas largas, de largos L_1 y L_2 ($L_2 < L_1$) y áreas transversales A_1 y A_2 ($A_2 < A_1$), ubicadas como muestra la figura. Notar que ambas bobinas NO están conectadas directamente. La bobina 1 está conectada a una fuente de corriente $I(t) = I_0\cos(\omega t)$. La bobina 2, que está al interior de la bobina 1, se conecta a un voltímetro V. Si las bobinas tienen N_1 y N_2 vueltas, respectivamente, ¿cuál es el voltaje, en función del tiempo, medido por V?



a) $V = \dfrac{\mu_0 A_2 N_1 I_0 \omega}{L_1} \sin(\omega t)$

b) $V = \dfrac{\mu_0 A_2 N_1 N_2 I_0 \omega}{L_1} \sin(\omega t)$

c) $V = -\dfrac{\mu_0 A_2 N_1 N_2 I_0}{L_1} \cos(\omega t)$

d) $V = -\dfrac{\mu_0 A_2 N_1 I_0}{L_1} \cos(\omega t)$

e) $V = \dfrac{\mu_0 A_1 N_1 N_2 I_0 \omega}{L_1} \sin(\omega t)$

Solución:

El campo magnético al interior de la bobina 1 está dado por:

$$\vec{B}_1 = \frac{N_1 \mu_0}{L_1} I(t)\, \hat{\boldsymbol{\imath}}$$

Así, el flujo total a través de la bobina 2 es:

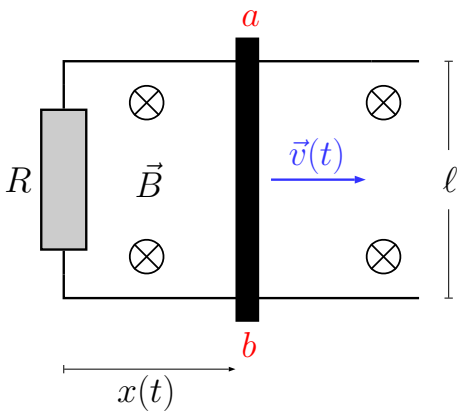
$$\Phi_2 = \frac{N_1 N_2 \mu_0 A_2}{L_1} I(t)$$

Con ello,

$$V = \frac{\mu_0 A_2 N_1 N_2 I_0 \omega}{L_1} \sin(\omega t)$$

Problema 5.14.

Dos rieles horizontales y paralelos, separados por una distancia ℓ, están conectados por una resistencia R como se muestra en la figura. Suponga que cada uno de los rieles tiene una resistencia λ por unidad de largo. Una barra metálica, $\overline{ab}$, de resistencia despreciable se puede deslizar sin fricción sobre los dos rieles. Existe, además, un campo magnético $\vec{B}$ uniforme, perpendicular al plano, que apunta hacia adentro. Suponga que la barra se mueve hacia la derecha con una velocidad $v(t)$ de tal forma que la corriente I en el circuito permanece constante en el tiempo.



¿Cuál es la magnitud y dirección de la corriente inducida en la barra?

a) $I = \dfrac{B\ell v}{2\lambda x}$ en dirección de b hacia a

b) $I = \dfrac{RB\ell v}{2\lambda x}$ en dirección de b hacia a

c) $I = \dfrac{B\ell v}{2\lambda x}$ en dirección de a hacia b

d) $I = \dfrac{B\ell v}{2\lambda x + R}$ en dirección de b hacia a

e) $I = \dfrac{B\ell v}{2\lambda x + R}$ en dirección de a hacia b

Solución:

Supongamos un sistema coordenado en que el eje X, indicado por $x(t)$, coincide con la figura, y el eje Z sale de la hoja. Así, el campo magnético tiene por forma $\vec{B} = -B\,\hat{\boldsymbol{k}}$. Para la espira, podemos elegir dos direcciones de la normal. Recuerde que la dirección, de acuerdo a la regla de la mano derecha, indica la dirección en que la corriente es positiva. En este caso, elijamos como normal $\hat{n} = \hat{\boldsymbol{k}}$, que indica que la corriente positiva circula desde b hacia a. Con ello,

$$\Phi_B = -B\ell x(t) \quad \longrightarrow \quad \varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = B\ell v$$

Ahora bien, la resistencia total del circuito viene dada por la resistencia R y la porción de los dos rieles, $2\lambda x$. Por tanto,

$$I = \frac{\varepsilon_{ind}}{R_{total}} = \frac{B\ell v}{R + 2\lambda x} > 0$$

Como la corriente nos dio positiva, significa que va recorrida desde b hacia a.

Problema 5.15.
Considere la situación descrita en el Problema 5.14. ¿Cuál es la aceleración de la barra, en función de la distancia x? Aquí, a es la aceleración de la barra.

a) $a = \dfrac{2I^2\lambda(R+2\lambda x)}{B^2\ell^2}$

b) $a = \dfrac{2I\lambda(R+2\lambda x)}{B^2\ell^2}$

c) $a = \dfrac{2I^2\lambda}{B^2\ell^2}$

d) $a = \dfrac{2I^2\lambda(R+\lambda x)}{B^2\ell^2}$

e) $a = \dfrac{2I\lambda(R+\lambda x)}{B^2\ell^2}$

Solución:

Como la corriente es constante en el tiempo, significa que:

$$I = \frac{B\ell v}{R+2\lambda x} \quad \longrightarrow \quad IR + 2\lambda I x = B\ell v$$

Derivando con respecto al tiempo, y recordando que $\dot{x} = v$ y $\dot{v} = a$,

$$2\lambda I v = B\ell \dot{v} \quad \longrightarrow \quad a = \frac{2\lambda I v}{B\ell}$$

Como queremos que el resultado dependa de x y no de v, reemplazamos:

$$a = \frac{2\lambda I}{B\ell} v = \frac{2\lambda I}{B\ell} \frac{I(R+2\lambda x)}{B\ell} = \frac{2\lambda I^2(R+2\lambda x)}{B^2\ell^2}$$

Problema 5.16.
Considere la situación descrita en el Problema 5.14. ¿Cuál es la potencia disipada en el circuito? Aquí, a es la aceleración de la barra.

a) $P = \dfrac{aB^2\ell^2}{\lambda}$

b) $P = \dfrac{aB^2\ell^2}{2\lambda}$

c) $P = \dfrac{aB^2\ell^2}{2\lambda\ell + R}$

d) $P = \dfrac{aB^2\ell^3}{2\lambda}$

e) $P = \dfrac{aB^2\ell^3}{\lambda}$

Solución:

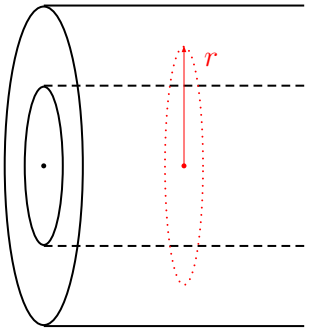
Recordemos que la potencia disipada por una resistencia es:

$$P = I^2 R_{total} = I^2(R + 2\lambda x) = I^2 \frac{B\ell v}{I} = BI\ell v$$

De la ecuación que relaciona la aceleración con la velocidad,

$$P = BI\ell v = BI\ell \frac{B\ell a}{2\lambda I} = \frac{aB^2\ell^2}{2\lambda}$$

Problema 5.17.
Un conductor sólido de radio a, está separado por un material aislante de un conductor delgado de radio b, de modo tal que forma un cable coaxial. Los dos conductores son MUY largos y conducen una corriente I en direcciones opuestas. La autoinductancia por unidad de largo del cable coaxial es:



a) $\frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

b) $\frac{\mu_0}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

c) $\frac{\mu_0}{3\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

d) $\frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Tomaremos una circunferencia de radio $r > a$ en torno al conductor interior. Por simetría, el campo magnético satisface:

$$2\pi r\, B = \mu_0 I \quad \longrightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

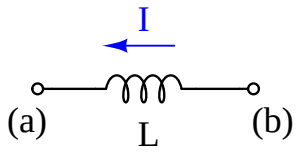
Para calcular el flujo magnético, tomaremos una sección transversal (coincidente con un radio) de largo ℓ. Así,

$$\Phi_B = \int_0^{\ell}\int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\, dr\, d\ell = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Con ello,

$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad \longrightarrow \quad \frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Problema 5.18.
El inductor de la figura tiene autoinductancia $L = 0.26\,\mathrm{H}$ y lleva una corriente en la dirección indicada. Esta corriente decrece uniformemente en el tiempo, con $\dot{I} = -0.018\,\mathrm{A/s}$. Entonces, el voltaje inducido $V_{ab} = V_a - V_b$ es:



a) $5.12\,\mathrm{mV},\ V_b > V_a$

b) $4.68\,\mathrm{mV},\ V_a > V_b$

c) $7.52\,\mathrm{mV},\ V_a > V_b$

d) $8.12\,\mathrm{mV},\ V_a > V_b$

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

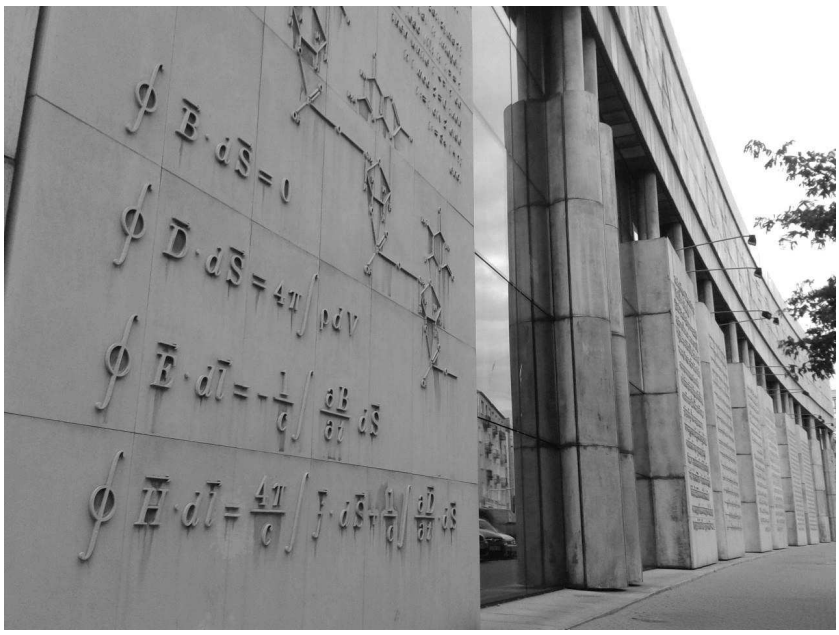
El voltaje en una inductancia viene dado por:

$$V_{ba} = L\dot{I} = -4.68\,\mathrm{mV}$$

puesto que se calcula en la dirección en que circula la corriente. Así, $V_a > V_b$.

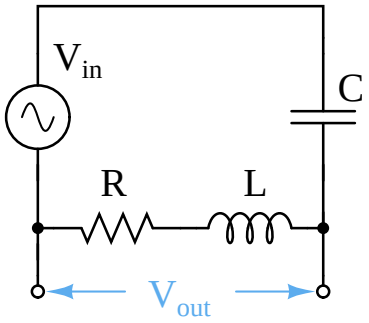
6

Circuitos de corriente alterna y campos variables en el tiempo



Ecuaciones de Maxwell en uno de los muros exteriores de la Universidad de Varsovia

Problema 6.1.
Considere el circuito de la figura con una corriente alterna de frecuencia angular ω. El valor de la razón $|\hat{V}_{out}/\hat{V}_{in}|$ de los respectivos fasores es:



a) $\sqrt{\dfrac{(\omega L)^2}{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}$

b) $\sqrt{\dfrac{R^2}{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}$

c) $\sqrt{\dfrac{(\omega L)^2 + R^2}{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}$

d) $\sqrt{\dfrac{(\omega L)^2 - R^2}{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}$

e) $\sqrt{\dfrac{(\omega LR)^2}{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}$

Solución:

La impedancia equivalente Z del circuito es:

$$Z = \frac{1}{i\,\omega C} + i\,\omega L + R = |Z|\,e^{i\,\theta_1}, \quad |Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

y la fase θ_1 no nos interesa por el momento. Por la ley de Ohm, el fasor de corriente que circula por el circuito es:

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}_{in}}{Z}$$

Así, el voltaje de salida viene dado por:

$$\hat{V}_{out} = (i\,\omega L + R)\hat{I} = \sqrt{(\omega L)^2 + R^2}\,e^{i\,\theta_2}\,\hat{I} = \sqrt{\frac{(\omega L)^2 + R^2}{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}\,e^{i(\theta_2 - \theta_1)}\,\hat{V}_{in}$$

Dividiendo y aplicando módulo, finalmente tenemos:

$$\left|\frac{\hat{V}_{out}}{\hat{V}_{in}}\right| = \sqrt{\frac{(\omega L)^2 + R^2}{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}$$

Problema 6.2.
Un inductor, un condensador, una resistencia y una fuente de poder de corriente alterna se conectan en serie. Si se doblan los valores de la capacidad, la inductancia y la resistencia, ¿qué ocurre con la frecuencia de resonancia?

a) Se duplica

b) Se cuadruplica

c) Se reduce a la mitad

d) Se reduce a un cuarto

e) Ninguna de las anteriores

Solución:

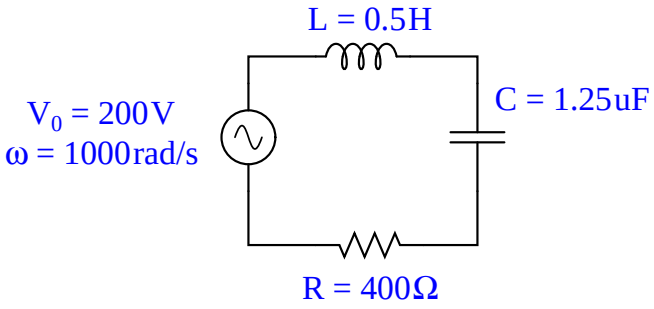
Recordemos que la frecuencia de resonancia viene dada por:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Así,

$$\omega_r{}' = \frac{1}{\sqrt{2L \cdot 2C}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{\omega_r}{2}$$

Problema 6.3.
La diferencia de fase, en grados, entre la corriente y el voltaje de la fuente de poder en la figura es:



a) 60.2°

b) 40.1°

c) 36.9°

d) 25.3°

e) 12.3°

Solución:

La impedancia equivalente viene dada por:

$$Z = i\,\omega L + \frac{1}{i\,\omega C} + R = |Z|\, e^{i\,\theta}$$

donde

$$\tan\theta = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R} = -\frac{3}{4} \quad \longrightarrow \quad \theta = -36.9°$$

Por la ley de Ohm,

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{Z} = \frac{V_0}{|Z|}\, e^{-i\,\theta}$$

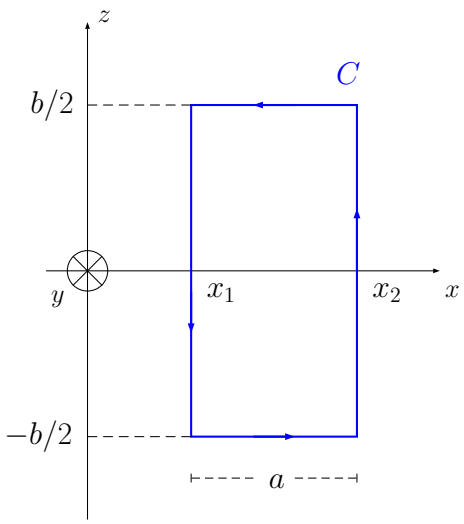
Con ello,

$$I(t) = \mathrm{Re}\{\hat{\mathrm{I}}\} = \frac{\mathrm{V_0}}{|\mathrm{Z}|}\cos\left(\omega \mathrm{t} - \theta\right)$$

y el desfase entre corriente y voltaje es de $|\theta| = 36.9°$, que era lo buscado.

Problema 6.4.
En una región del espacio hay un campo eléctrico dado por $\vec{E} = E_0 \sin(kx - \omega t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, donde E_0, k, ω son constantes. En el plano XZ de esa región, se escoge un camino rectangular C, de lados a y b, que intersecta al eje X en los puntos x_1 y x_2 (ver figura). Calcule la circulación del campo magnético a lo largo del camino C, i.e.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r}$$



a) $\mu_0\varepsilon_0\omega E_0 abk\Big[\sin(kx_2-\omega t)-\sin(kx_1-\omega t)\Big]$

b) $\dfrac{\mu_0\varepsilon_0\omega E_0 b}{k}\Big[\sin(kx_2-\omega t)-\sin(kx_1-\omega t)\Big]$

c) $\dfrac{\mu_0\varepsilon_0\omega E_0 ab}{k(a+b)}\sin(k[x_2-x_1]-\omega t)$

d) $\dfrac{\mu_0\varepsilon_0\omega E_0(a+b)}{k}\sin(k[x_2-x_1]-\omega t)$

e) $\dfrac{\mu_0\varepsilon_0\omega E_0}{kab}\sin(k[x_2-x_1]-\omega t)$

Solución:

De las ecuaciones de Maxwell, se sabe que la ley de Ampère generalizada sin una corriente externa viene dada por:

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r}=\mu_0\varepsilon_0\frac{d}{dt}\left(\iint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\;dS\right)$$

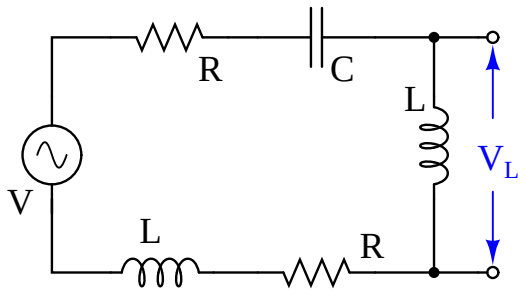
con una superficie S tal que $\partial S = C$. En este caso, tomaremos por S el interior del rectángulo limitado por C. Por la regla de la mano derecha, la normal de la superficie debe salir de la hoja, con lo que $\hat{n}=-\hat{\boldsymbol{\jmath}}$. Así,

$$\iint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\;dS=-\int_{-b/2}^{b/2}\int_{x_1}^{x_2} E_0\sin(kx-\omega t)\;dx\,dz=-\frac{E_0 b}{k}\Big[\cos(kx_1-\omega t)-\cos(kx_2-\omega t)\Big]$$

Con ello,

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r}=\frac{\mu_0\varepsilon_0\omega E_0 b}{k}\Big[\sin(kx_2-\omega t)-\sin(kx_1-\omega t)\Big]$$

Problema 6.5.
Un circuito contiene dos resistencias R, dos inductancias L y una capacitancia C. Estos elementos están conectados a una fuente de voltaje alterna $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$, como en la figura.



¿Cuál es la amplitud I_0 de la corriente alterna que provee la fuente?

a) $I_0 = \dfrac{V_0}{2R}\left[1 + \left(\dfrac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC}\right)^2\right]^{1/2}$

b) $I_0 = \dfrac{V_0}{2R}$

c) $I_0 = \dfrac{V_0}{2R}\left[1 + \left(\dfrac{\omega^2 LC - \frac{1}{2}}{\omega RC}\right)^2\right]^{-1/2}$

d) $I_0 = \dfrac{V_0}{2R}\left[1 + \left(\dfrac{\omega^2 LC - \frac{1}{2}}{\omega RC}\right)\right]^{-1/2}$

e) $I_0 = \dfrac{V_0}{2R}\left[1 + \left(\dfrac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC}\right)\right]^{-1/2}$

Solución:

En este circuito, la impedancia equivalente Z viene dada por:

$$Z = 2R + i\left(2\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = |Z|\, e^{i\varphi}$$

donde

$$|Z| = \left[(2R)^2 + \left(2\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2\omega L - \frac{1}{\omega C}}{2R}\right)$$

Por la ley de Ohm, la corriente que circula es:

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{Z} = \frac{\hat{V}}{|Z|}\, e^{-i\varphi}$$

En el dominio del tiempo,

$$I(t) = \frac{V_0}{|Z|}\cos(\omega t - \varphi)$$

de modo que la amplitud $I_0 = V_0/|Z|$ se puede escribir como:

$$I_0 = \frac{V_0}{2R}\left[1 + \left(\frac{\omega^2 LC - \frac{1}{2}}{\omega RC}\right)^2\right]^{-1/2}$$

Problema 6.6.
En el circuito de Problema 6.5, ¿cuál es la frecuencia de resonancia ω_0 para la cual la amplitud de la corriente es máxima?

a) $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

b) $\omega_0 = \dfrac{1}{2\sqrt{LC}}$

c) $\omega_0 = \dfrac{2}{\sqrt{LC}}$

d) $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2}{LC}}$

e) $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2LC}}$

Solución:

La amplitud de la corriente es máxima cuando el módulo de la impedancia equivalente, $|Z|$, es mínimo. Esto ocurre cuando la parte imaginaria de la impedancia equivalente se anula:

$$2\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \quad \longrightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$$

Problema 6.7.
En el circuito de Problema 6.5, ¿cuál es la amplitud $\mathcal{V}_L$ del voltaje alterno $V_L(t)$?

a) $\mathcal{V}_L = V_0\dfrac{\omega L}{2R}$

b) $\mathcal{V}_L = V_0\dfrac{\omega L}{2\omega L - \frac{1}{\omega C}}$

c) $\mathcal{V}_L = V_0 \dfrac{\omega L}{\sqrt{4R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$

d) $\mathcal{V}_L = V_0 \dfrac{\omega L}{\sqrt{4R^2 + \left(2\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$

e) $\mathcal{V}_L = V_0 \dfrac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$

Solución:

La diferencia de potencial pedida corresponde al voltaje en la inductancia, el cual se calcula de la siguiente forma:

$$V_L(t) = L\frac{dI}{dt} = -L\omega I_0 \sin(\omega t - \varphi) = LI_0\omega \sin(\omega t - \varphi - \pi)$$

donde hemos utilizado que $-\sin(x) = \sin(x - \pi)$. Con ello, la amplitud del voltaje viene dada por:

$$\mathcal{V}_L = \frac{V_0 L\omega}{|Z|} = V_0 \frac{\omega L}{\sqrt{4R^2 + \left(2\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Problema 6.8.
En el circuito de Problema 6.5, si la frecuencia ω de la fuente coincide con la frecuencia de resonancia ω_0, i.e. $\omega = \omega_0$, ¿cuál es la potencia promedio $\overline{P}$ que entrega la fuente?

a) $\overline{P} = \dfrac{{V_0}^2}{2R}$

b) $\overline{P} = \dfrac{{V_0}^2}{4R}$

c) $\overline{P} = 0\,\mathrm{W}$

d) $\overline{P} = -\dfrac{{V_0}^2}{4R}$

e) $\overline{P} = \dfrac{{V_0}^2}{8R}$

Solución:

La potencia instantánea del circuito viene dada por:

$$\mathcal{P}(t) = V(t)I(t) = V_0 I_0 \cos(\omega t)\cos(\omega t - \varphi)$$

En la frecuencia de resonancia, $\omega = \omega_0$, la parte imaginaria de la impedancia equivalente es nula, por lo que la fase y la amplitud de la corriente satisfaces que:

$$\varphi\Big|_{\omega=\omega_0} = 0 \qquad \wedge \qquad I_0\Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{V_0}{2R}$$

Así,

$$\mathcal{P}(t) = V_0 I_0 \cos^2(\omega t) \quad \longrightarrow \quad \overline{P} = \frac{V_0 I_0}{2}$$

Reemplazando,

$$\overline{P} = \frac{{V_0}^2}{4R}$$